

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ  
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИИ  
И ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
ПО АТОМНОЙ НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

---



# ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:  
ЯДЕРНЫЕ КОНСТАНТЫ  
ВЫПУСК 17

МОСКВА - 1974

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ.

С е р и я: ядерные константы

выпуск 17

Редакционная коллегия:

Л.А.Кузнецов (гл.науч.редактор), Л.Н.Усачев (зам.гл.науч.редактора), О.Д.Казачковский, В.Г.Заграфов, М.С.Замытнин, В.И.Мостовой, Г.И.Морозов, П.Э.Немировский, Л.А.Петржак, С.И.Сухоручкин, А.А.Абагян, Е.Г.Дубосский, В.Н.Манохин, В.И.Лыщенко, М.Н.Николаев, В.Е.Орлов, Д.А.Кардашев (отв.редактор)



Центральный научно-исследовательский институт информации и технико-экономических исследований по атомной науке и технике (ЦНИИатоминформ), 1974

## **DISCLAIMER**

**Portions of this document may be illegible in electronic image products. Images are produced from the best available original document**

ОПИСАНИЕ УПРУТОГО РАССЕЯНИЯ БЫСТРЫХ НЕЙТРОНОВ  
 ЯДРАМИ ОТ  $^{209}\text{Bi}$  ДО  $^{239}\text{Pu}$  В РАМКАХ ОПТИЧЕСКОЙ  
 МОДЕЛИ СО СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Г.В.Аникин, И.И.Котухов, Л.И.Прохорова

Оптическая модель ядра обычно используется как средство интерполяции имеющихся экспериментальных данных о взаимодействии нейтронов с ядрами вещества. Однако результаты интерполяции могут быть признаны надежными лишь в том случае, если параметры потенциала, хорошо описывающего опытные данные, плавно зависят от энергии нейтрона, атомного веса и заряда ядра.

В настоящей работе сделана попытка найти такие параметры для совокупности тяжелых ядер от  $^{209}\text{Bi}$  до  $^{239}\text{Pu}$ .

Подгонка параметров осуществлялась по полным сечениям взаимодействия  $\sigma_t$  и дифференциальным сечениям упругого рассеяния  $\sigma_1(\theta)$  в общей сложности для двух-трех энергетических энергий нейтронов. Как и в работе [1], численное интегрирование уравнения Шредингера проводилось в интервале  $0 \leq r \leq R_3$  ( $R_3 \approx 15+16$  ферми) с потенциалом  $V_0$ , включающим помимо чисто ядерного взаимодействия некоторые дальнедействующие добавки:

$$V_0 = V_{\text{яд}} + V_{\text{шв}} + V_{\text{пол}}, \quad (1)$$

где  $V_{\text{шв}}$  - швингеровское (спин-орбитальное) взаимодействие электромагнитной природы [2];  $V_{\text{пол}}$  - член, вводящий дальнедействие в центральную часть потенциала. Он был взят в форме  $\cos \alpha t / r^\beta$ . В работе [1]  $\beta = 4$ , т.е. взаимодействие  $V_{\text{пол}}$  связывалось с электрической поляризуемостью нейтрона; в настоящей работе величина  $\beta$  варьировалась в рамках поисковой программы. Отметим сразу, что оптимальное значение  $\beta$  оказалось близким к 4 ( $\beta \approx 3,9$ ).

Предполагалось, что внутри ядра эта добавка к потенциалу остается постоянным так же, как  $V_{\text{шв}}$ :

$$-V_{\text{пол}}(r) = \begin{cases} V_{\text{пол}} \frac{R_1^\beta}{r^\beta} & r > R_1, \\ V_{\text{пол}}, & r \leq R_1. \end{cases} \quad (2)$$

Величина  $v_{\text{пол}}$  также варьировалась и для  $^{209}\text{Bi}$  оказалась равной 0,18 Мэв, а для  $^{239}\text{Pu}$  - 0,22 Мэв, что не противоречило квадратичной зависимости поляризованного потенциала от энергии ядра.

Для ядерно-оптического потенциала в основном была сохранена усложненная форма, принятая в работе [1]:

$$-V_{\text{я}}(r) = V_0(r) + i[W_{\text{оп}}(r) + W_{\text{пп}}(r)] + V_{\text{со}}(r) \hat{1} \hat{2}, \quad (3)$$

Здесь

$$V_0(r) = \begin{cases} V_1 [1 + \exp(\frac{r-R_1}{a_1})]^{-1} & r \leq R_1, \\ V_2 [1 + \exp(\frac{r-R_1}{a_2})]^{-1} & r > R_1; \end{cases}$$

$$W_{\text{оп}}(r) = \begin{cases} W_1 [1 + \exp(\frac{r-R_1}{a_1})]^{-1} & r \leq R_1, \\ W_1 [1 + \exp(\frac{r-R_1}{a_2})]^{-1} & r > R_1, \end{cases}$$

где  $W_1 = W_{01} \exp(-E_n/E_{\text{я}})$ ;

$$W_{\text{пп}} = 4W_2 \exp(\frac{r-R_1}{b}) [1 + \exp(\frac{r-R_1}{b})]^{-2},$$

где  $t = \begin{cases} b_1 & r \leq R_2 \\ b_2 & r > R_2 \end{cases} \quad R_2 = R_{02} - \Delta R_2 \exp(-\frac{E_n}{E_1})$ ;

$$V_{\text{со}}(r) = (\frac{\hbar}{m\pi c})^2 \frac{\chi}{v} \left| \frac{dV_0(r)}{dr} \right|,$$

Был осуществлен поиск оптимальных параметров указанного потенциала, удовлетворительно описывающих величины  $\sigma_t$  и  $\sigma_1(\theta)$  отдельно для каждого из элементов: висмута, тория, урана и плутония. Большинство параметров, в том числе параметры мнимой части потенциала, зависящие от энергии  $E_n$ , не обнаружили существенных изменений при переходе от одного элемента к другому. Особо следует отметить незначительность изменения радиуса  $R_1$  (7,64 ферми для  $^{209}\text{Bi}$  и 7,7 ферми для  $^{239}\text{Pu}$ ), который связан, по-видимому, со свинцовым остовом этих ядер.

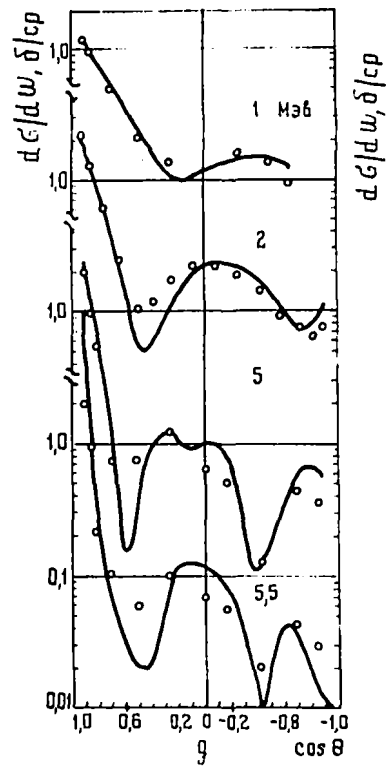
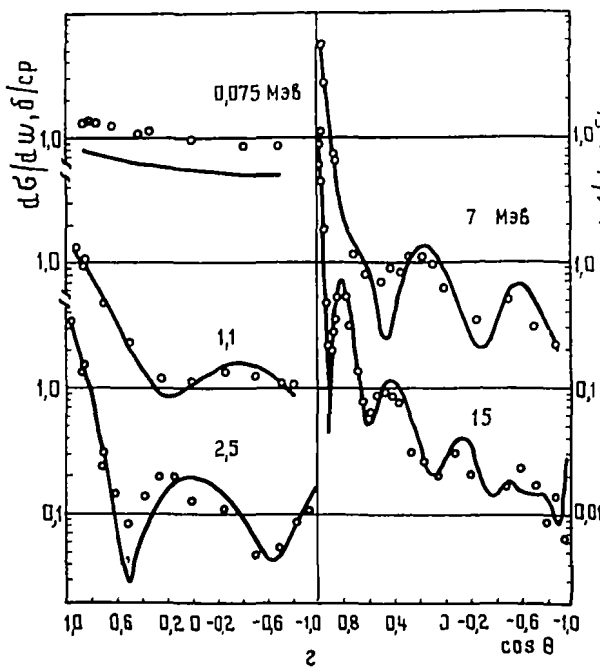
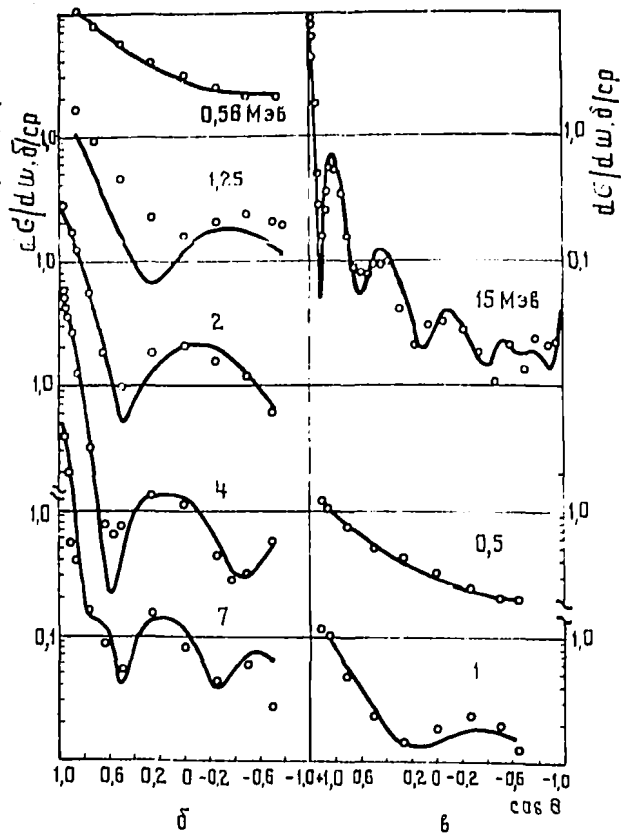
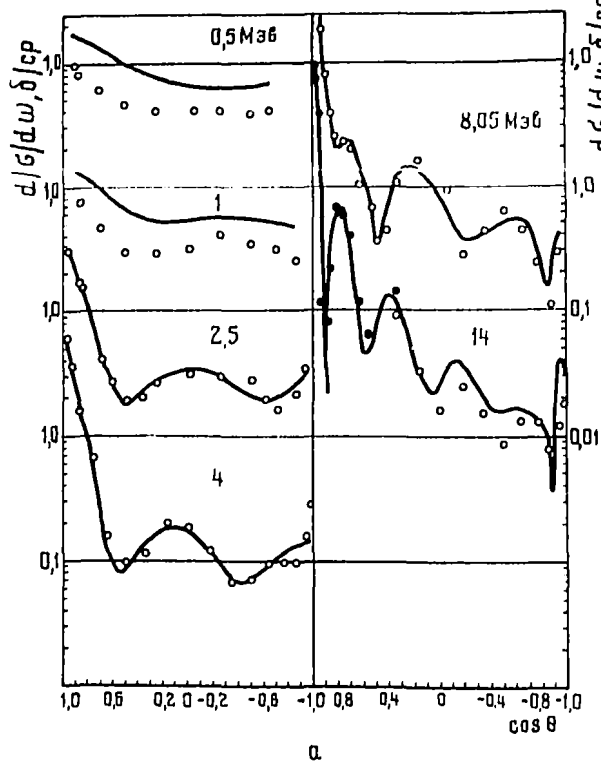
Индивидуальность ядер проявилась прежде всего в изменении параметра  $a_2$  (0,45 ферми для висмута и 0,54 ферми для плутония). Это изменение было введено в расчет аналитически при помощи следующего выражения:

$$a_2 = a_{02} + (A - A_{\text{маг}})^{1/3} a_2, \quad (4)$$

где  $A_{\text{маг}}$  - массовое число дважды магического ядра  $^{208}\text{Pb}$ .

После этого была найдена единая группа оптимальных параметров для всех элементов.

На каждом шаге изменения параметров расчетные величины полных сечений  $\sigma_t^{\text{расч}}$  сравнивались с экспериментальными  $\sigma_t^{\text{эксп}}$ :  $\sigma_{\text{я}}^{\text{расч}}(\theta) + \sigma_1 + \sigma_2/\cos^2 \theta$ , с одной стороны, и  $\sigma_1^{\text{эксп}}$  - с другой (см. рисунок).



Экспериментальные и фактические дифференциальные сечения  
упругого рассеяния нейтронов для:  
а -  $^{209}\text{Bi}$  ; б -  $^{232}\text{Th}$  ; в -  $^{235}\text{U}$  ; г -  $^{238}\text{U}$  ; д -  $^{239}\text{Pu}$

Ниже приведены числовые значения оптимальных параметров потенциала [см. (I)-(4)].

$V_1$ .....	44,5 Мэв
$V_2$ .....	37,4 Мэв
$a_1$ .....	0,8 ферми
$a_{02}$ .....	0,47 ферми
$\Delta a_2$ .....	0,03 ферми
$R_1$ .....	7,73 ферми
$R_{02}$ .....	7,64 ферми
$\Delta R_2$ .....	0,33 ферми
$W_{01}$ .....	7,3 Мэв
$W_2$ .....	5,0 Мэв
$b_1$ .....	0,42 ферми
$b_2$ .....	0,79 ферми
$E_1$ .....	0,806 Мэв
$E_2$ .....	0,592 Мэв
$V_{\text{пол}}$ .....	0,17 Мэв
$x$ .....	0,3
$\beta$ .....	3,95

Константы  $\sigma_1$  (изотропная составляющая) и  $\sigma_2$  учитывают феноменологически упругое рассеяние с образованием составного ядра и вклад неупругого рассеяния в рассматриваемые опытные сечения  $\sigma_1^{\text{эксп}}$ . множитель  $\xi$  учитывает возможную ошибку нормировки экспериментальных данных. Его можно было бы ограничить по величине и потребовать, например, чтоб он отличался от единицы по модулю не более чем на 10%. В противном случае предполагалось, что  $\xi = 1$ , т.е. нормировка не проводилась для каждой кривой на каждом шаге поиска констант  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , и  $\xi$  определялся методом наименьших квадратов. Если оказывалось, что  $\sigma_1$  или  $\sigma_2$  отрицательны, то предполагалось, что  $\sigma_1 = 0$  или  $\sigma_2 = 0$  соответственно. В настоящей попытке найти единую группу параметров ограничение на множитель было слабым: не допускалось отличие от единицы более чем на 30%. Но даже и это требование для части (около 20%) угловых распределений не выполняется при найденном наборе оптимальных параметров. Как видно на рисунке (см. а-г), это относится к нейтронам с  $E_n$ , равной 0,5 и 1 Мэв для  $^{209}\text{Bi}$ , 1,25 Мэв для  $^{232}\text{Th}$ , а также 0,075 Мэв для  $^{238}\text{U}$ . Для остальных кривых множитель  $\xi$  отличается от единицы не более чем на 5-15%.

Следует отметить, что не все возможности сферического потенциала исчерпаны. Не учтена, в частности,  $z$ -квадратичная зависимость поляризационного потенциала. Найдено лишь среднее значение  $V_{\text{пол}}$  для всех ядер.

#### Л и т е р а т у р а

1. Анигин Г.В., Котухов И.И. - "Ядерная физика", 1971, т.14, вып.2, с.269.
2. Schwinger J. - Phys.Rev., 1948, т.73, р.407.



## РАСЧЕТ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО ДЕТЕКТОРА НЕЙТРОНОВ

И.Е.Бочерова, Л.И.Прохорова, Г.Н.Смиренин

В связи с перспективами использования реакторов на быстрых нейтронах в ядерной энергетике значительное внимание уделяется экспериментальному изучению энергетической зависимости различных характеристик взаимодействия быстрых нейтронов с ядрами. Среди них видное место принадлежит  $\bar{\nu}(E_n)$ -зависимости среднего выхода вторичных нейтронов от энергии нейтронов  $E_n$ , вызывающих деление. Для измерения этой важнейшей ядерно-физической константы широко используется методика совпадений между импульсами от детекторов актов деления и мгновенных нейтронов. Наибольшее распространение в задачах об измерении  $\bar{\nu}$  получили детекторы с замедлителем, в которых нейтроны деления прежде чем зарегистрироваться, как правило, испытывают замедление и диффузию.

Среди детекторов этого типа все большее признание получают композиции гелиевых счетчиков в водородсодержащем замедлителе (полиэтилене или парафине). Типичный пример конструкции такого детектора приведен в работе [1].

Эти системы обладают достаточно высокой эффективностью порядка нескольких десятков процентов и измеренным временем жизни ( $\sim 50$  мксек), отличаются простотой и надежностью, нечувствительностью к гамма-квантам. Уступая другой широко распространенной методике измерения с помощью большого жидкостного сцинтилляционного бака (см., например, [2]) по первым двум признакам, упомянутая методика совпадений обладает значительным преимуществом по двум другим признакам, в особенности по чувствительности к гамма-квантам.

Основными характеристиками собственно детектора, определяющими точность измерений, выбор параметров регистрирующей аппаратуры, конструкцию детектора делений, являются: энергетическая и угловая зависимости эффективности, время жизни нейтронов, изменение эффективности при перемещении источника вдоль оси детектора. Многие из них представляют значительные трудности для экспериментального изучения, поэтому возникает необходимость прибегнуть к помощи расчета.

Статистический характер физических процессов, происходящих в детекторе, и его сложная геометрическая конфигурация дают основание для применения метода Монте-Карло к расчетам характеристик детектора. В основе метода лежит моделирование статистического эксперимента с помощью средств вычислительной техники и регистрации числовых характеристик, получаемых из этого эксперимента. При решении задач методом Монте-Карло прослеживаются независимые "истории" частицы в определенном фазовом пространстве  $t$  координат  $\vec{r}$  точки рассеяния, направления  $\vec{\Omega}$ , энергии  $E$  частицы после рассеяния и временной координаты  $t$  [3-6].

Возможность таких расчетов для поиска оптимального варианта детектора и согласие расчета с экспериментом будут показаны в § 3. В данной работе возникла необходимость расчета конкретной системы, поперечный разрез которой приведен на рис. I. Этот детектор был использован в измерениях  $\bar{v}(E_n)$  для  $^{238}\text{U}$ ,  $^{235}\text{U}$  и  $^{239}\text{Pu}$ , проводившихся в 1973 г. в Физико-энергетическом институте. Их особенность - одновременное проведение эксперимента для трех изотопов.

### § I. Конструкция детектора нейтронов

Возможность измерений  $\bar{v}(E_n)$  для трех изотопов была осуществлена в работе [2], где в качестве детектора нейтронов использовали сферический бак с жидким сцинтиллятором диаметром 76 см. В опыте с детектором из гелиевых счетчиков в полиэтилене для того, чтобы разместить вдоль оси протяженный набор слоев делящихся веществ (24 см) и избежать при этом значительного падения эффективности детектора нейтронов от центра к периферии, а также возникновения сильной угловой чувствительности, были использованы гелиевые счетчики длиной 50 см и диаметром 3,2 см с давлением гелия, равным 7 атм, в отличие от применявшихся ранее гелиевых счетчиков длиной 32 см и с давлением гелия, равным 4 атм [1,7,8].

Детектор нейтронов представлял собой цилиндрический блок из полиэтилена диаметром и высотой 40 и 60 см соответственно со сквозным центральным каналом диаметром 9 см для расположения в нем ионизационных камер деления (рис. I).

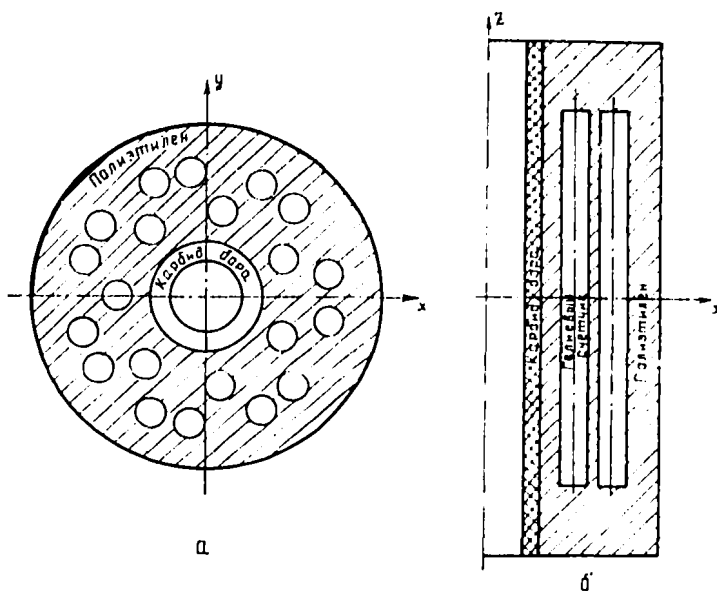


Рис. I. Расположение счетчиков в детекторе для измерения  $\bar{v}(E_n)$  одновременно для изотопов  $^{238}\text{U}$ ,  $^{235}\text{U}$  и  $^{239}\text{Pu}$ :  
а) вид на систему сверху; б) поперечный разрез системы

### § 2. Характеристики детектора нейтронов

Энергетическая чувствительность детектора  $\eta(E_n)$ . Эта характеристика детектора существенна из-за разницы спектров нейтронов деления, постоянно меняющихся для различных делящихся изотопов, и зависит от энергии нейтронов или других частиц, вызывающих деление ядер. Энергетическая чувствительность детектора вычислялась для двух положений изотропного источника нейтронов: в центре детектора и в крайней точке набора делящихся веществ (рис. 2).

Угловая чувствительность детектора. Поправка на угловую чувствительность детектора мгновенных нейтронов возникает вследствие того, что при вынужденном делении из-за угловой анизотропии

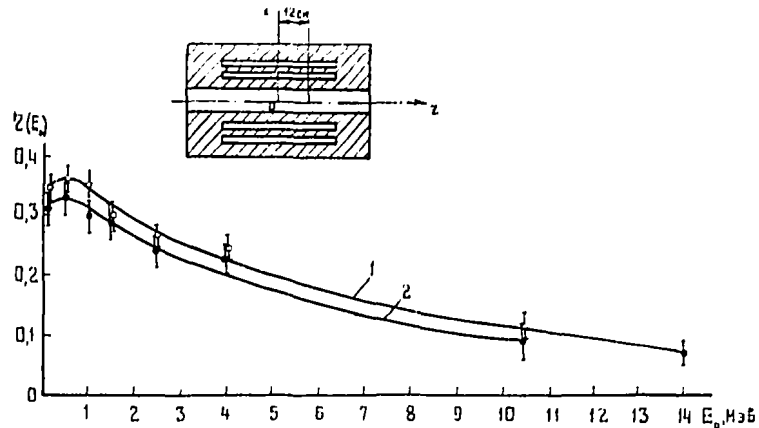


Рис.2. Зависимость эффективности нейтронного детектора  $\eta$  от энергии нейтронов деления  $E_n$  :  
 Источник расположен: 1 - в центре (ось  $z=0$ ); 2 - в 12 см от центра по оси  $z$

разлета осколков имеется угловая корреляция нейтронов деления с падающими вдоль оси детектора первичными нейтронами. Изучение этой характеристики нейтронного детектора требует технически неудобного опыта с разрезанием щели вдоль детектора [9]. В расчетах это делается значительно проще. Угловая чувствительность вычислялась также для двух положений источника нейтронов в центре ( $z=0$ ) и на краю сборки слоев ( $z=12$  см). Для центрального положения источника помимо расчетов угловой чувствительности детектора к нейтронам с энергией  $E_n = 1,5$  МэВ вычислялась угловая чувствительность к нейтронам с  $E_n$ , равной 0,2; 0,5; 1,5; 4 и 14 МэВ (рис.3).

Время жизни нейтронов. Время жизни нейтронов в системе изображено на рис.4. Несмотря на невысокую точность этой величины ( $\pm 10\%$  для основной группы нейтронов), можно видеть примесь двух групп нейтронов (короткоживущих с временем жизни  $\sim 10$  мксек и долгоживущих с временем жизни  $\sim 100$  мксек) к основной группе нейтронов с временем жизни 50 мксек. Такая неоднородность времени жизни нейтронов вызвана не только гетерогенностью системы, но и нерегулярным расположением счетчиков в полиэтилене (см.рис.1).

Эффективность детектора нейтронов по длине детектора изображена на рис.5. В реальном опыте при введении поправки на чувствительность детектора к положению источника нейтронов требуется высокая точность этого коэффициента (выше 0,3%). Такая точность не могла быть достигнута из-за недостатка времени на вычислительных машинах (на расчет одного варианта из 1000 историй требуется около 80 мин вычислительного времени). Кроме того, в этом опыте не требовалось высокой точности, так как в рабочих условиях такая характеристика детектора легко определяется перемещением источника по длине детектора.

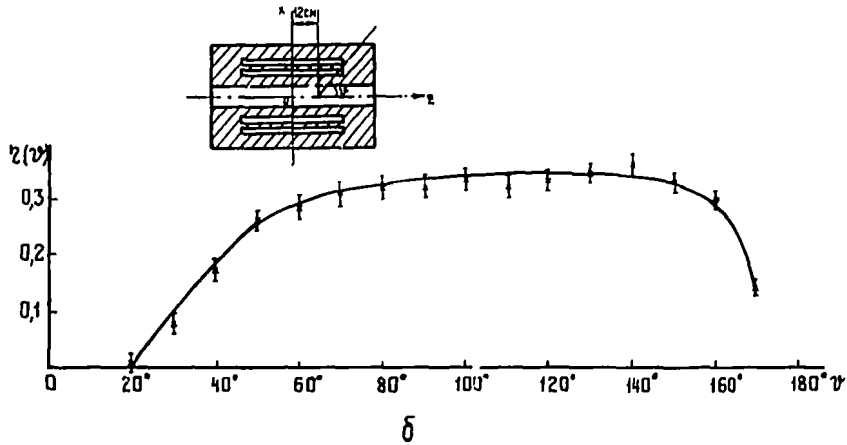
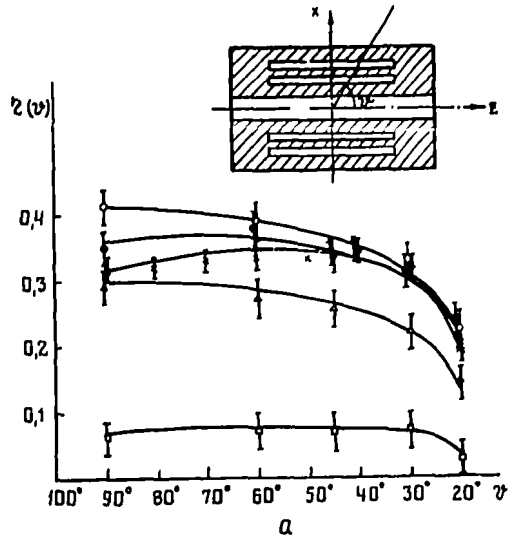


Рис.3. Зависимость эффективности нейтронного детектора  $\eta$  от угла  $\psi$  направления вылета нейтронов деления к направлению падающих первичных нейтронов (ось  $z$ ).

Источник расположен: а - в центре; б - в 12 см от центра по оси  $z$  ( $E_0 = 1,5$  Мэв).  $E_0$  равна, Мэв:  $\circ$  - 0,5;  $\bullet$  - 0,2;  $\times$  - 1,5;  $\Delta$  - 4;  $\square$  - 14

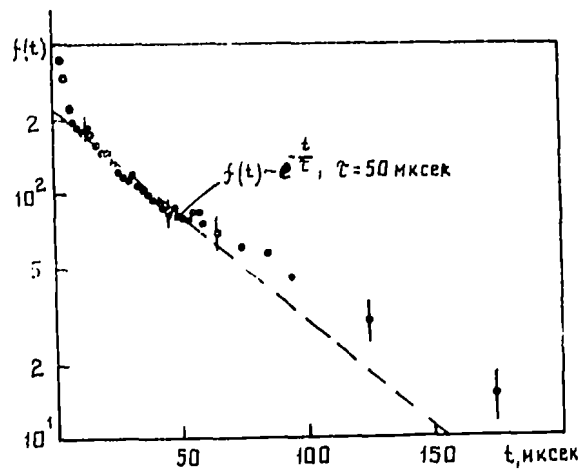


Рис.4. Распределение времени жизни  $t$  нейтронов в детекторе  $f(t)$

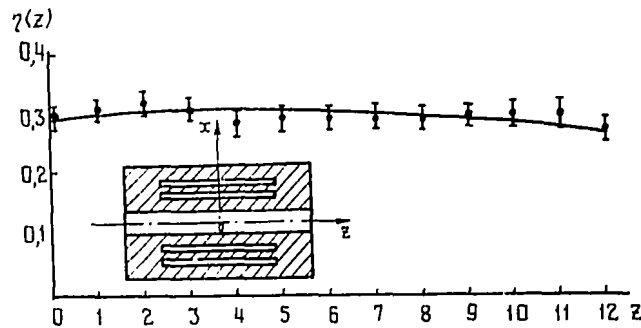


Рис.5. Зависимость эффективности детектора  $\eta$  от положения  $z$  изотропного источника нейтронов с  $E_0 = 1,5$  Мэв

### § 3. Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными

Сравнивались результаты расчетов для детектора, содержащего 84 гелиевых счетчика типа СММ-18; счетчики располагались по сторонам гексагональной решетки. В опыте использовали бак, наполненный турбинным маслом, по составу аналогичным парафину, до уровня 50 см (рис.6.). В центре бака по всей его длине проходила цилиндрическая полость диаметром 8,6 см, не заполненная маслом. В этой трубе устанавливались источники нейтронов  $Pu+Li$ ,  $Pu+F$ ,  $Pu+W$  и  $Pu+Be$ .

В таблице указаны значения энергий источников и их интенсивность, полученные с помощью счетчика с известным ходом чувствительности к нейтронам различных полей. Средние энергии источников вычислялись с учетом энергетической чувствительности системы.

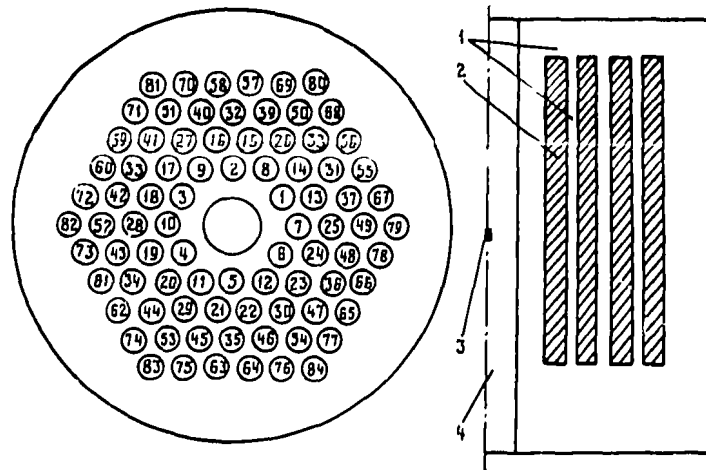


Рис.6. Расположение счетчиков в детекторе с гексагональной решеткой и нумерация счетчиков, использованная при расчете (в зависимости от удаления от центра):

1 - масло (среда I); 2 - гелиевый счетчик (среда II); 3 - источник;  
4 - полая цилиндрическая щель

Таблица

Энергия и интенсивность различных источников

Источник нейтронов	Средняя энергия, Мэв	Интенсивность, нейтр/сек · 10 <sup>3</sup>
$^{239}\text{Pu} + \text{L1}$	0,17	$0,682 \pm 0,06$
$^{239}\text{Pu} + \text{F}$	1,61	$1,78 \pm 0,15$
$^{239}\text{Pu} + \text{B}$	2,34	$0,975 \pm 0,08$
$^{239}\text{Pu} + \text{Be}$	4,24	$3,039 \pm 0,25$

Вокруг центральной трубы устанавливалась сборка из счетчиков типа СММ-18 (длина 31 см, диаметр 3,2 см, давление газа 4 атм). Зазор между счетчиками для первых трех рядов 2 см, в последнем ряду 1,5 см. На рис.7 черными кружками показана суммарная эффективность этой сборки и ее зависимость от энергии нейтронов. Из этого рисунка видно, что детектор такого типа может иметь эффективность регистрации нейтронов около 45%. Дополнительные исследования показали, что можно увеличить эффективность регистрации всей сборки еще на 10%, доливая масло поверх счетчика.

Таким образом, получена модель детектора мгновенных нейтронов из 84 счетчиков в парафине. Этот детектор может иметь эффективность регистрации нейтронов, равную 50%, что, безусловно, не является для него пределом. Могут быть и другие варианты расположения счетчиков, которые приведут к большей эффективности. Одним из наиболее важных вопросов оптимизации данного типа детектора нейтронов деления является выбор радиуса счетчика. По программе проведены расчеты эффективности цилиндрического парафинового детектора высотой и диаметром 70 см с 84 счетчиками. Расчеты были проведены для начальных энергий нейтронов 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 4; 6; 8; 10; 12 и 14 Мэв.

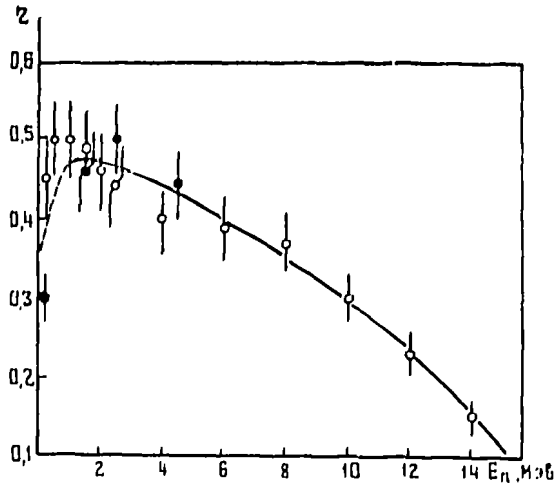


Рис.7. Зависимость эффективности детектора  $\eta$  от энергии источника  $E_n$ .  
 Данные:  $\circ$  - расчетные;  $\bullet$  - экспериментальные

На рис.7 результаты расчета сравниваются с измеренными значениями эффективности такого детектора. Энергетическая зависимость эффективности детектора, рассчитанная методом Монте-Карло, согласуется с экспериментом в пределах ошибок расчета и эксперимента, за исключением значения  $\eta(E_n)$  при  $E_n = 0,2$  МэВ. Так как одной из возможных причин расхождения могут быть неточности в определении мощности источника  $P_{Li}$  ( $E_n \approx 0,2$  МэВ), необходимо произвести дополнительную проверку его интенсивности. Времена жизни нейтронов в детекторе находятся в хорошем согласии:  $t_{\text{экс}} = 51$  мксек,  $t_{\text{расч}} = 48$  мксек.

#### § 4. Алгоритм решения задачи методом Монте-Карло

Решение задачи заключается в прослеживании независимых историй частиц и оценке интеграла захвата по длине пути  $\Sigma_p$  для каждого пролета частицы внутри счетчика. Эта оценка наиболее эффективна для тонких областей, где  $l < 1,26/\Sigma_t$  [10]. История частицы начинается с ее рождения. В программе предусмотрены два вида источника: изотропный и направленный моноэнергетический источник. Частице приписываются начальные координаты  $x_0, y_0, z_0$ , энергия  $E_0$ , вес  $P_0$ , время жизни, равное 0. Для изотропного источника косинусы углов траектории полета частицы с осями координат вычислялись по формулам

$$u_0 = \frac{1 - 2\alpha_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 (1 - 2\alpha_i)^2}}; \quad v_0 = \frac{1 - 2\alpha_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 (1 - 2\alpha_i)^2}}; \quad w = \frac{1 - 2\alpha_3}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 (1 - 2\alpha_i)^2}}; \quad (I)$$

при этом 
$$\sum_{i=1}^3 (1 - 2\alpha_i)^2 \leq 1.$$

Если это неравенство не выполняется, то выбираются три следующих случайных числа. Если  $w \geq w_{\text{макс}}^+$  ( $w > 0$ ) или  $|w| \geq |w_{\text{мин}}^-|$  ( $w < 0$ ), то история не рассматривается, так как эти условия

соответствуют вылету нейтрона из системы через торцы полого цилиндра. Для направленного источника косинус угла полета частицы с осью  $z(w_0)$  задан, а  $u_0$  и  $v_0$  вычислялись по формулам

$$u_0 = \frac{(1-2\alpha_1)\sqrt{1-w_0^2}}{\sqrt{(1-2\alpha_1)^2+(1-2\alpha_2)^2}}; \quad v_0 = \frac{(1-2\alpha_2)\sqrt{1-w_0^2}}{\sqrt{(1-2\alpha_1)^2+(1-2\alpha_2)^2}}; \quad (2)$$

при этом  $(1-2\alpha_1)^2 + (1-2\alpha_2)^2 \leq 1$ .

Далее в соответствии с энергией вычисляются сечения захвата для гелия и сечения рассеяния для водорода:

$$\sum_c^{He^3} = \rho^{He^3} \frac{0,88}{\sqrt{E, \text{МэВ}}}; \quad (3)$$

$$\sum_B^H = \rho^H \left( \frac{3\pi}{y^2 + (0,089y^2 - 1,85)^2} + \frac{\pi}{y^2 + (0,135y^2 + 0,422)^2} \right), \quad (4)$$

где  $y^2 = 1,21 \text{ МэВ} [II]$ ;  $\rho$  - плотность элемента.

Сечения для углерода задавались таблицей и интерполировались для нужной энергии  $E_n$  по формуле

$$\sigma(E_n) = \frac{\sigma(E_{1+1})(E_1 - E_n) + \sigma(E_1)(E_n - E_{1+1})}{E_1 - E_{1+1}}. \quad (5)$$

В области термализации считалось, что нейтрон может иметь только одну энергию и сечения, соответствующие средней энергии по спектру нейтронов. Теперь, имея все данные о нейтроне, проследим его путь до следующего столкновения. Прежде всего определим максимальное расстояние, которое он может пройти в системе, т.е. расстояние до границы системы. Решая совместно уравнение цилиндра

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (6)$$

и уравнения траектории частицы

$$\left. \begin{aligned} x &= x_n + u_n t; \\ y &= y_n + v_n t; \\ z &= z_n + w_n t; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

получим расстояние до границы цилиндра:

$$t_{1,2} = \frac{-(x_n u_n + y_n v_n) \pm \sqrt{(x_n u_n + y_n v_n)^2 - (u_n^2 + v_n^2)(x_n^2 + y_n^2 - R^2)}}{u_n^2 + v_n^2}. \quad (8)$$

Отрицательное расстояние не учитывается. При этом

$$|z| = |z_n + w_n t| \leq H/2,$$

в противном случае расстояние  $t$  определяется из уравнения

$$t = \begin{cases} \frac{-H/2 - z_n}{w_n} & \text{при } w_n < 0; \\ \frac{H/2 - z_n}{w_n} & \text{при } w_n > 0. \end{cases} \quad (9)$$

Расстояния до пересечения с полным цилиндром и цилиндром, содержащим карбид бора, определяются по формулам (8) и (9) с заменой  $R$  на соответствующий радиус. Все решения больше, чем  $t_{\text{макс}}$



во внимание не принимаются. Расстояния до пересечения со счетчиками определяются по формуле

$$t_{1,2} = \frac{-(x_n - x_1)u_n - (y_n - y_1)v_n}{u_n^2 + v_n^2} \pm \frac{\sqrt{[(x_n - x_1)u_n + (y_n - y_1)v_n]^2 - (u_n^2 + v_n^2)[(x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2 - r_{сч}^2]}}{u_n^2 + v_n^2}, \quad (10)$$

где  $x_1, y_1$  - координаты центра  $i$ -го счетчика;  $r_{сч}$  - радиус счетчика. Учитываются только положительные расстояния, меньшие  $t_{\max}$ . Если нейтрон первоочеред торца счетчика, то расстояние определяется по формулам

$$t = \begin{cases} \frac{-z_H - z_n}{w_n} & \text{и} & \frac{z_B - z_n}{w_n} & \text{при} & w_n < 0; \\ \frac{z_H - z_n}{w_n} & \text{и} & \frac{z_B - z_n}{w_n} & \text{при} & w_n > 0, \end{cases} \quad (11)$$

где  $z_H$  и  $z_B$  - соответственно нижняя и верхняя координаты торцов счетчиков. Длина свободного пробега определяется по формуле

$$l = l_1^+ \dots + l_{i-1}^+ + \frac{-\ln \alpha - (\tau_1 + \dots + \tau_{i-1})}{\sum_1}, \quad (12)$$

где  $l_i$  - пробег в  $i$ -й среде;  $\tau_i$  - оптическая толщина  $i$ -й среды в направлении полета нейтрона;  $\sum_1$  - полное макроскопическое сечение  $i$ -й среды.

Номер  $i$  определяется из уравнения [3,6]

$$\sum_{k=1}^{i-1} \tau_k < -\ln \alpha < \sum_{k=1}^i \tau_k. \quad (13)$$

Значение  $-\ln \alpha$  определялось по модификации метода таблиц, предложенной в работе [10]. Если  $l > t_{\max}$ , то нейтрон покинул систему, история его закончилась и надо проследивать новую историю. Если  $l < t_{\max}$ , то координаты точки столкновения определяются по формуле (7). Если точка столкновения оказалась в счетчике или в цилиндре с бором, то история тоже считалась законченной, так как для бора и гелия рассматривается только процесс поглощения.

При столкновении в парафине определяется элемент, на котором произошло взаимодействие (при  $E_n > E_{\text{терм}}$ ). Если  $\sum_{\text{в}}^H / \sum_{\text{в}}^{\text{среды}} < \alpha$ , то рассеяние осуществляется на водороде, в противном случае - на углероде. При рассеянии на водороде

$$\begin{aligned} \cos \theta_{\text{л}} &= \sqrt{\alpha}; \\ E_{n+1} &= \alpha E_n, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\theta_{\text{л}}$  - угол рассеяния в лабораторной системе.

При упругом рассеянии на углероде

$$\begin{aligned} \cos \theta_{\text{ц.м}} &= 2\alpha - 1; \\ \cos \theta_{\text{л}} &= \frac{A \cos \theta_{\text{ц.м}} + 1}{\sqrt{A^2 + 2A \cos \theta_{\text{ц.м}} + 1}}; \\ E_n &= E_{n-1} \left( \frac{\cos \theta_{\text{л}} + \sqrt{A^2 - 1 + \cos^2 \theta_{\text{л}}}}{A + 1} \right)^2, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $A$  - атомный номер элемента;  $\theta_{\text{ц.м}}$  - угол рассеяния в системе центра масс.

При неупругом рассеянии  $\cos \theta_{\text{ц.м}}$  определяется из уравнения

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i \cos^i \theta_{\text{ц.м}} = \alpha. \quad (16)$$

Вероятность поглощения на углероде учитывается статистическим весом

$$P_{n+1} = \frac{\sum_s w_s}{\sum_t w_t} P_n, \quad (17)$$

После рассеяния новые направляющие косинусы полета нейтрона запишутся в виде

$$u_n = (bc w_{n-1} u_{n-1} - bd v_{n-1}) / \sqrt{1-w_{n-1}^2} + a u_{n-1}; \quad (18)$$

$$v_n = (bc w_{n-1} v_{n-1} - bd u_{n-1}) / \sqrt{1-w_{n-1}^2} + a v_{n-1};$$

$$w_n = -bc \sqrt{1-w_{n-1}^2} + a w_{n-1},$$

где  $a = \cos \theta_L$ ;  $b = \sin \theta_L$ ;

$$c = \frac{0,5 - \alpha_1}{\sqrt{(0,5 - \alpha_1)^2 + (0,5 - \alpha_2)^2}}; \quad d = \frac{0,5 - \alpha_2}{\sqrt{(0,5 - \alpha_1)^2 + (0,5 - \alpha_2)^2}}. \quad (19)$$

При  $|1 - w_n^2| < \varepsilon$

$$u_n = bc; \quad v_n = bd; \quad w_n = a w_n.$$

Расстояние между двумя соударениями нейтрон пролетает за время

$$t_n \text{ (мксек)} = \frac{0,723 \cdot 10^{-3} \ell_n \text{ (см)}}{\sqrt{E_n \text{ (МэВ)}}}. \quad (20)$$

При каждом пролете через счетчик определяются  $\sum_c \ell$  (вес нейтрона, заносимый в анализатор) и времена нейтрона до влета и после вылета из счетчика. В соответствии с этими временами вес нейтрона распределяется по заданным временным интервалам анализатора. В конце работы определяется полный интеграл захвата.

Программа написана в кодах машины М-20 и занимает около 1500 ячеек. Время счета одного варианта в 500 историй занимает 20-40 мин в зависимости от начальной энергии нейтрона.

#### Выводы

Разработан метод расчета, имеющий гибкие возможности описания произвольной конфигурации гетерогенных сборок в цилиндрической оболочке с вертикальным положением счетчиков.

Этот метод является перспективным для расчета композиций из гелиевых счетчиков, получивших в настоящее время большое распространение благодаря их нечувствительности к гамма-квантам и простоте общения с ними.

Рассмотренная композиция из 84 счетчиков по своей энергетической чувствительности к различным энергиям нейтронов совпадает с энергетической зависимостью сцинтилляционного бака в работе [1]. Наличие гетерогенной сборки из счетчиков открывает новые возможности для улучшения энергетической чувствительности системы и, кроме того, открывает пути к измерениям разнообразных характеристик.

## Л и т е р а т у р а

1. Прохорова Л.И. и др. - "Атомная энергия" , 1971, т.30, с.250.
2. Soleilhac M. et al. Nucl.Energy, 1969, v.23, p.257.
3. Буолошко Н.П. и др. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). М., Физматгиз, 1962.
4. Золотухин В.Г., Ермаков С.М. Применение метода Монте-Карло к расчету защиты от ядерных излучений.-В кн.: "Вопросы физики защиты реакторов". М., Госатомиздат, 1963.
5. Золотухин В.Г. и др. Прохождение излучений через неоднородности в защите. М., Атомиздат, 1968.
6. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М., "Наука", 1971.
7. Володин К.Е. и др.-"Атомная энергия", 1972, т.33, с.901.
8. Нурпейсов Б. и др. Там же, 1973, т.34, с.491.
9. Прохорова Л.И., Смиренин Г.Н.-"Ядерная физика", 1968, т.7, с.961.
10. Франк-Каменецкий А.Д. Расчет коэффициента размножения ядерного реактора методом Монте-Карло.-В кн.: "Метод Монте-Карло в проблеме переноса излучений". М., Атомиздат, 1967.
11. Рыбаков Б.В., Сидоров В.А. Спектрометрия быстрых нейтронов. М., Атомиздат, 1953.

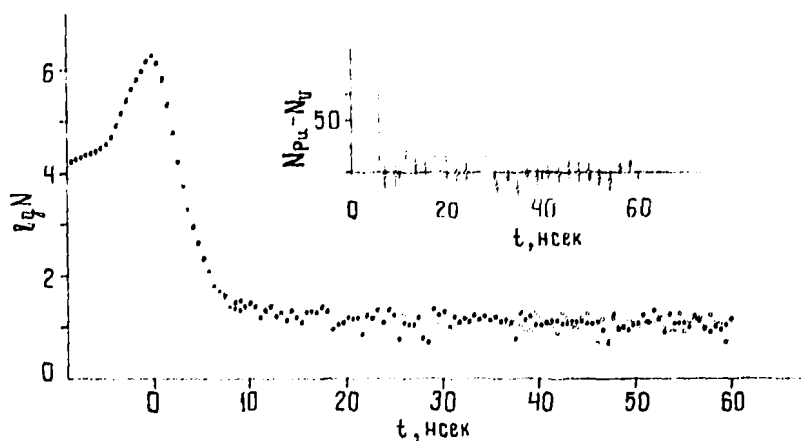
О ВЕРОЯТНОСТИ ОБРАЗОВАНИЯ СПОНТАННО-ДЕЛЯЩИХСЯ ИЗОМЕРОВ  
 ПРИ ЗАХВАТЕ ТЕПЛЫХ НЕЙТРОНОВ ЯДРАМИ  $^{235}\text{U}$  И  $^{239}\text{Pu}$  X)

Г.В. Вальский, О.М. Мрачковский, Г.А. Петров, Ю.С. Плева

Процесс образования спонтанно-делящихся изомеров в реакции радиационного захвата нейтронов еще мало изучен [1]. Сведения об образовании изомеров  $^{236\text{m}}\text{U}$  и  $^{240\text{m}}\text{Pu}$  при захвате нейтронов малочисленны и противоречивы. Известно, что при бомбардировке мишени  $^{235}\text{U}$  нейтронами с энергией до 3 эв отношение сечений образования делящегося изомера ( $\sigma_1$ ) к сечению мгновенного деления ( $\sigma_f$ ) составляет величину, меньшую  $0,8 \cdot 10^{-4}$  [2]. В случае захвата теплых нейтронов мишенью  $^{239}\text{Pu}$   $\sigma_1/\sigma_f = (0,67 \pm 0,42) \cdot 10^{-4}$  [3]. Предполагалось, что в реакции образования изомера испускаются два гамма-кванта с энергией около 0,5 Мэв (для мишени  $^{235}\text{U}$ ) и 0,8 Мэв (для мишени  $^{239}\text{Pu}$ ). Результаты работ [4,5], относящиеся к исследованию изомера  $^{236\text{m}}\text{U}$ , согласуются с результатами работы [2]. Для нейтронов с энергией 2,2 Мэв были опубликованы значительно более высокие отношения  $\sigma_1/\sigma_f$ :  $3 \cdot 10^{-4}$  и  $4 \cdot 10^{-3}$  соответственно для  $^{236\text{m}}\text{U}$  и  $^{240\text{m}}\text{Pu}$  [6]. В то же время известно, что для мишеней  $^{241}\text{Am}$  и  $^{243}\text{Am}$  реакции образования соответствующих спонтанно-делящихся изомеров тем успешнее конкурируют с мгновенным делением, чем меньше энергия бомбардирующих нейтронов [7].

Авторы считают важным продолжить работу, предварительные результаты которой были опубликованы ранее [3]. Улучшение фоновых условий и временного разрешения описанной установки [3] позволило получить уточненные результаты для отношения сечений образования спонтанно-делящихся изомеров  $^{236\text{m}}\text{U}$  и  $^{240\text{m}}\text{Pu}$ . В настоящем эксперименте при помощи время-амплитудного конвертора регистрировались спектры запаздываний импульсов, производимых осколками деления в газовой сцинтилляционной камере, относительно импульсов сцинтилляционного счетчика с пластическим сцинтиллятором. Мишени, содержащие  $\sim 110$  мкг  $^{239}\text{Pu}$  и  $\sim 130$  мкг  $^{235}\text{U}$ , попеременно экспонировались в пучке термализованных нейтронов, а соответствующие спектры запаздываний записывались в двух подгруппах памяти анализатора амплитуд. Одна из серий измерений представлена на рисунке. Большое отношение ( $\approx 10^5$ ) высоты пика мгновенных совпадений к фону случайных совпадений позволяло обнаруживать малую примесь запаздывающих делений. Однако при этом трудно исключить возможность некоторых видов полей. В частности, из данных, представленных на рисунке, можно было вывести

X) Настоящая статья поступила в Центр по ядерным данным в июне 1973 г. в качестве доклада на вторую всесоюзную конференцию по нейтронной физике.



Распределения запаздываний импульсов, вызванных осколками деления, относительно импульсов сцинтилляционного счетчика, регистрирующего гамма-кванты: ● - мишень  $^{235}\text{U}$ ; ○ - мишень  $^{239}\text{Pu}$  / На вставке - разностное распределение (перед вычитанием одного распределения из другого из каждого вычитали фон и производили нормировку)

ошибочное заключение о наличии запаздывающих делений в обоих случаях в количестве  $\sim (1,0 \pm 0,4) \cdot 10^{-4}$  площади пика мгновенных делений с периодами полураспада в диапазоне нескольких нсек. Однако величина этих периодов плохо воспроизводилась от серии к серии, изменяясь более или менее коррелированно для обеих мишеней в пределах от 1 до 9 нсек. Это дает основание думать, что наблюдаемые "хвосты" связаны в основном с аппаратными эффектами. Поэтому эффект изомерного деления следует искать как отклонение экспериментального временного распределения для одной из мишеней от реперного распределения, полученного для другой мишени. Мишени  $^{239}\text{Pu}$  и  $^{235}\text{U}$  могут служить реперами друг для друга, так как периоды полураспада соответствующих изомеров сильно отличаются и хорошо известны. В табл. I приведены полученные значения  $G_1/G_f$  для мишени  $^{239}\text{Pu}$  при различных предположениях о величине периода полураспада  $T_{1/2}$  и числе гамма-квантов с энергией более 0,7 Мэв  $n_\gamma$ , предшествующих заселению изомерного состояния. Все резуль-

Таблица I

$n_\gamma$	Значения $G_1/G_f$ для $^{239}\text{Pu}$			
	$T_{1/2}$ , нсек			
	2,8	4,4	7,0	11,0
1	$0,89 \pm 0,94$	$0,68 \pm 0,63$ ( $-0,71 \pm 1,25$ )	$0,78 \pm 0,48$	$0,94 \pm 0,48$
2	$0,46 \pm 0,49$	$0,35 \pm 0,32$ ( $-0,32 \pm 0,65$ )	$0,40 \pm 0,24$	$0,49 \pm 0,24$

тати умножены на  $10^4$ . Результаты в скобках относятся к отдельной серии, в которой вместо  $^{235}\text{U}$  в качестве второй мишени использовался  $^{233}\text{U}$ . Остальные результаты соответствуют серии измерений, изображенной на рисунке. Полученные данные слабо зависят от величины предполагаемого периода полураспада изомера. Остановившись на величине  $T_{I/2} = 4,4$  нсек, авторы получили следующие результаты:  $\sigma_1/\sigma_f = (0,56 \pm 0,49) \cdot 10^{-4}$ , если при заселении изомерного состояния испускается только один гамма-квант с энергией, большей 0,7 Мэв, и  $\sigma_1/\sigma_f = (0,29 \pm 0,25) \cdot 10^{-4}$ , если таких гамма-квантов два.

Оценка верхнего предела для случая  $^{236}\text{mU}$  может быть получена на основании сравнения тех же экспериментальных временных распределений в интервале времен 10–100 нсек после регистрации гамма-квантов. Если в выбранном интервале все события относятся к случайным совпадениям, то в обоих случаях должен соблюдаться один закон, связывающий скорость счета совпадений и скорости счета в отдельных каналах. Отклонения могут служить мерой примеси неслучайных совпадений в этом временном интервале. В табл.2 приведены результаты оценки отношения  $(\sigma_1/\sigma_f) \cdot 10^4$  для  $^{236}\text{mU}$ , полученные путем обработки серий, в которых особенно тщательно контролировались необходимые скорости счета. Оценки сделаны для двух предполагаемых периодов полураспада изомера  $^{236}\text{mU}$  и двух значений  $n_{\gamma}$ .

Таблица 2

Значения  $\sigma_1/\sigma_f$  для  $^{236}\text{mU}$

$n_{\gamma}$	$T_{I/2}$ , нсек	
	70,0	110,0
1	$-0,60 \pm 0,64$	$-0,88 \pm 0,90$
2	$-0,31 \pm 0,33$	$-0,46 \pm 0,45$

Полагая, что более вероятным является испускание двух гамма-квантов, предшествующих заселению изомерного состояния, и считая, что разности случайных величин подчиняются гауссову закону распределения, авторы получили для  $T_{I/2} = 110$  нсек на уровне двойной стандартной ошибки  $\sigma_1/\sigma_f < 0,5 \cdot 10^{-4}$ .

Оба полученные результаты ниже, чем аналогичные результаты для случая захвата нейтронов с энергией 2,2 Мэв [6]. Следует отметить, что полученная оценка для  $^{236}\text{mU}$  находится в согласии с результатами измерений вероятности образования этого же изомера в (d, pf)-реакции [8].

#### Л и т е р а т у р а

1. Поликанов С.М. "Успехи физ.наук", 1972, т.107, с.685.
2. Browne J.C., Bowman C.D. Phys.Rev.Lett., 1972, v.28, p.617.
3. Вальский Г.В., Мрачковский О.М., Петров Г.А., Плева М.С. "Ядерная физика", 1972, № 16, с.667.
4. Гангрский М.П. и др. "Ядерная физика", 1971, № 14, с.682.
5. Попеко Л.А. и др. Препринт ФТИ им.А.Ф.Иоффе АН СССР, 1972, № 341.
6. Elwin A.J., Ferguson A.T.G. Nucl.Phys., 1970, v.A148, p.337.
7. Надь Т. и др. Acta Physica Acad. Sci. (Hungaricae), 1971, т.30 (3), с.293.
8. Pedersen J., Rasmussen B. Nucl.Phys., 1972, v.A178, N 2, p.449.

## О КОРРЕКЦИИ СЕЧЕНИЙ ПО ДАННЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

М.Н. Николаев, Б.Г. Рязанов

Введение

Задаче коррекции сечений по данным интегральных экспериментов уделялось довольно много внимания [1-6]. Методы решения ее разными авторами различались незначительно: коррекция сводилась к отысканию таких значений констант, которые обращали в минимум некоторый квадратичный функционал, зависящий от расхождений между результатами расчета и эксперимента и от нескольких добавок к сечениям, взятых с статистическим весом, зависящим от их ошибок. При этом точность констант предполагалась достаточно высокой для того, чтобы вариации констант и обусловленные ими вариации результатов расчета можно было считать линейно связанными друг с другом. Результаты последних работ (в частности, [3]) показали, что наиболее строгим видом минимизируемого функционала является следующий:

$$P = (I - I_0)^T V^{-1} (I - I_0) + (t - t_0)^T M^{-1} (t - t_0), \quad (1)$$

где  $I_0$  - вектор результатов экспериментов;  $I$  - вектор результатов расчета экспериментально измеряемых величин, вычисленных с использованием вектора откорректированных параметров  $t'$  некоторой используемой теории;  $t$  - вектор исходных параметров используемой теории (т.е. нейтронно-физических констант  $\sigma$ , концентраций  $N$ , размеров  $R$ );  $M, V$  - ковариационные матрицы векторов  $t$  и  $I$  соответственно.

Связь между изменениями компонент векторов  $I$  и  $t$  можно записать в виде

$$I - I_0 = H_t (t' - t), \quad (2)$$

где  $I$  - вектор результатов расчета экспериментально измеряемых величин с использованием исходных значений параметров;  $H_t$  - матрица коэффициентов чувствительности вектора  $I$  по отношению к  $t$  (в работах [1, 2] коэффициентами чувствительности обозначают безразмерные величины, равные  $\frac{t_i}{I_j} H_{ij}$ ).

Можно видеть, что корректируемые параметры и функционалы используются для корректировки констант и входят в (1) совершенно одинаково. Их разделение возможно (и удобно) потому, что погрешности этих величин не коррелируют между собой.

Корректировка констант заключается в определении таких значений  $t'$ , которые обращают в минимум квадратичный функционал (1), и в оценке квадратичной матрицы  $M'$

\*

---

Последние работы по этим вопросам можно найти в материалах Международного симпозиума по физике быстрых реакторов (Токио, 16-23 октября 1973 г.)

погрешностей откорректированных констант. Такая корректировка позволяет повысить точность расчетного предсказания физических характеристик проектируемых реакторов. Например, если интерес вызывает характеристика  $F$ , обладающая вектором чувствительности и константой  $Z$ , то константная компонента дисперсии расчетной оценки по исходным константам  $\hat{G}$

$$D_G = Z_G^T \hat{M}_G Z_G$$

больше, чем соответствующий вклад в дисперсию на откорректированных константах:

$$D_G' = Z_G'^T \hat{M}_G' Z_G'$$

Следует отметить, что повышение точности расчетного предсказания реакторных характеристик в результате коррекции констант может быть гарантировано лишь в том случае, если сама коррекция выполнена корректно, т.е. должна быть уверенность в том, что единственной причиной расхождений между расчетными и экспериментальными значениями функционалов  $I$  являются погрешности параметров  $t$ , а не погрешности расчетной методики. В противном случае откорректированные константы обеспечат повышение точности расчета, если характеристика  $F$  рассчитывается с помощью той же приближенной методики и  $Z_G = Z_G'$ , т.е. линейная комбинация измеренных функционалов обладает примерно той же чувствительностью к константам, что и интересующий нас функционал.

Предполагается также, что матрицы  $\hat{V}$  и  $\hat{M}$  оценены правильно. Если в матрице  $\hat{V}$  не учтены корреляции между различными измерениями одного и того же функционала, обусловленные, например, общей для всех измерений систематической погрешностью, то дисперсия  $D'$  может быть существенно занижена. Точно так же неучет положительных корреляций в матрице  $\hat{M}$  занижает  $D$  и одновременно ведет к увеличению разности  $\hat{M} - \hat{M}'$ . Таким образом, неправильная оценка матрицы  $\hat{V}$  приводит к ошибочной оценке дисперсии расчетного предсказания функционала  $F$ . В настоящей работе априори предполагается, что корректная оценка дифференциальных данных (вектора  $\hat{G}$  и матрицы  $\hat{V}_G$ ) и результатов макроэкспериментов (векторов  $I_0$  и  $I$ , вектора экспериментальных условий  $s \equiv \{\rho, R\}$ , ковариационных матриц  $\hat{M}_s$  и  $\hat{V}$ ) возможна, и используемые векторы корректируемых параметров и "подгоняемых" функционалов, а также ковариационные матрицы получены именно в результате такой оценки.\*

Далее предполагаем, что полное сечение не входит в список корректируемых констант, а информация о полном сечении учтена в процессе оценки сечений парциальных процессов и их ковариационной матрицы. При этом откорректированные парциальные сечения в сумме будут совпадать с оцененной на основе дифференциальных данных величиной полного сечения в пределах ошибок определения последнего (если, конечно, матрицы погрешностей  $\hat{V}$  и  $\hat{M}$  оценены правильно и алгоритм коррекции последователен).

В настоящей работе будут рассмотрены следующие вопросы методики коррекции констант:

1. Учет информации об условиях выполнения экспериментов. По существу этот вопрос уже рассмотрен: параметры  $s = \{\rho, R\}$  следует включать в вектор корректируемых параметров  $t$  наряду с константами  $\hat{G}$ . Это обстоятельство делает задачу корректировки констант более громоздкой, и, поскольку уточнение условий эксперимента не является нашей задачей, возникает проблема, как избавиться от необходимости корректировки величины  $s$  таким образом, чтобы это не повлияло на результат корректировки интересующих нас констант  $\hat{G}$ . Эта проблема будет рассмотрена в § 3.

2. Учет условия критичности или иных условий нейтронного баланса, при которых выполняются многие макроскопические эксперименты. В частности, будет показано, что величину  $K_{эфф}$  не следует включать в список подгоняемых функционалов  $I$ . Более последовательной является минимизация функционала (1) при условии соблюдения условия баланса. Этот

\* Вопросы оценки дифференциальных и макроскопических экспериментов освещены в докладах, представленных на Вторую всесоюзную конференцию по нейтронной физике (Киев, май 1973 г.).



вопрос будет рассмотрен в § I (так как от его решения зависит и решение проблемы п. I ). Полученные в § I общие результаты будут пояснены в § 2 применительно к основным типам макроэкспериментов.

3. Проблема компенсации реактивности при расчете коэффициентов чувствительности  $H$  для функционалов  $I$ , измеренных при соблюдении нейтронного баланса (например, условия критичности), и коэффициентов  $Z$  для функционалов  $I$  проектируемого реактора, уточнение расчетного предсказания которых является важнейшей целью процедуры коррекции констант. Применительно к коэффициентам  $H$  этот вопрос будет рассмотрен в § I, применительно к  $Z$  - в § 5.

4. Предлагаемый алгоритм коррекции констант несколько отличается от общепринятого (например, тем, что  $K_{эфф}$  не включается в список подгоняемых функционалов). Условия, при которых предлагаемый, несколько более общий подход становится эквивалентным традиционному, рассмотрены в § 4. В § 6 на простом примере будет показано, как влияет различие в алгоритмах коррекции констант на оценку информативности макроэкспериментов.

### § I . Учет условий критичности

В работах, посвященных коррекции констант по результатам макроскопических экспериментов, расчет коэффициентов чувствительности производился на основе методов, развитых в классических работах по обобщенной теории возмущений [7, 8]. Следует отметить, что последние работы были посвящены не проблеме коррекции констант, а решению иной проблемы - оценке тех возмущений реакторных функционалов, которые обусловлены изменениями параметров теории (констант, концентрации, размеров) на стадии проектирования реактора, т.е. когда из условия критичности

$$K_{эфф}(c, \rho, k) = 1,$$

выполняемого точно, определяется один из параметров (критическая концентрация или критический размер реактора).

В этом случае расчет коэффициента чувствительности интересующего нас функционала, например коэффициента воспроизводства (КВ), к вариациям того или иного параметра  $t$  должен производиться с учетом необходимости скомпенсировать изменения реактивности, обусловленные вариацией  $t$ , соответствующим изменением другого (компенсирующего) параметра  $t_k$  с тем, чтобы

$$\frac{\partial K_{эфф}}{\partial t} \delta t + \frac{\partial K_{эфф}}{\partial t_k} \delta t_k = 0.$$

Тогда коэффициент чувствительности интересующего нас КВ по отношению к  $t$  должен определяться как

$$Z(t_k) = \frac{\partial K_{эфф}}{\partial t} = \frac{\partial K_{эфф}}{\partial t_k} \left( \frac{\partial K_{эфф}}{\partial t} / \frac{\partial K_{эфф}}{\partial t_k} \right).$$

Очевидно, что определенный таким образом коэффициент чувствительности может существенно зависеть от способа компенсации реактивности (т.е. от выбора  $t_k$ ).

В задачах, рассматриваемых в работах [7, 8], проблема выбора компенсирующего параметра решалась естественным путем: компенсация осуществлялась тем параметром, величина которого определялась в процессе проектирования из условия критичности.

В задаче коррекции констант ни один из "критичных" параметров: ни размер, ни концентрация того или иного изотопа, ни их комбинация (критическая масса, например) - не может быть выбран в качестве компенсирующего.

Более того, требования сохранения условия критичности при расчете коэффициентов чувствительности и включение  $K_{эфф}$  в список "подгоняемых" функционалов (что предполагает необходимость изменения расчетного значения  $K_{эфф}$ ), очевидно, противоречат друг другу и делают алгоритм коррекции констант непоследовательным. Это обстоятельство уже отмечалось в работе [6].

Чтобы решить вопрос о том, как учесть условие критичности в алгоритме коррекции констант, необходимо, прежде всего принять во внимание, что "экспериментальные" значе-

нии функционалов  $J$  получены путем введения в непосредственные экспериментальные результаты целого ряда поправок (например, на конечные размеры образца, на перенос нейтронного поля органами регулирования и т.п.). Введение этих поправок (поправок типа А по терминологии С.М.Завицкого и др. [9]) обеспечивает приведение экспериментальных данных к "обсчитываемой модели" реального эксперимента.

Что касается расчетных значений функционалов  $J$ , то они также обычно получаются путем введения поправок к величинам, полученным в основной расчетной модели, с тем, чтобы привести их к условиям "обсчитываемой модели". Эти поправки (типа Б) учитывают как погрешности расчетных методов (конечное число узлов конечно-разностной сетки и т.п.), так и отличие основной расчетной модели от обсчитываемой (поправки на гетерогенность и т.п.). Матрица  $V$  учитывает погрешности и ковариации, обусловленные конечной точностью экспериментальных измерений и точностью введения поправок. Примеры обсчитываемой модели также содержат неопределенности, как непосредственного их определения в условиях реального эксперимента, так и погрешности, связанные с построением обсчитываемой модели (т.е. с введением поправок).

Следует отметить важный факт: каким бы образом ни производилось построение обсчитываемой модели реального эксперимента, параметры этой модели всегда определяются из условия сохранения коэффициента размножения, равенство которому единице в реальном эксперименте устанавливается с чрезвычайно высокой точностью.

Так, нерегулярная граница активной зоны преобразуется в правильную именно из соображений сохранения критичности. Регулирующие стержни и каналы для них в обсчитываемой модели реактора обычно отсутствуют, но их реактивность компенсируется изменением внешних размеров на основе тех же соображений. Выбор размеров (как правило, радиуса) для компенсации реактивности при переходе от реальных экспериментальных условий к обсчитываемой модели является вполне естественным, прежде всего потому, что вариация размера слабо (обычно пренебрежимо слабо) влияет на величины функционалов, используемые при коррекции констант (центральные отношения сечений, реактивностей, время жизни мгновенных нейтронов и т.п.). Кроме того, в этом случае построение обсчитываемой модели может быть осуществлено на основе экспериментальных данных.

Сложнее обстоит дело, если выбранная обсчитываемая модель гомогенна, тогда как реальный реактор состоит из гетерогенных сред. Однако гомогенизация реактора (экспериментальная - путем экстраполяции гетерогенных эффектов к нулю - или расчетная) также всегда производится при условии сохранения  $K_{эфф}$ ; особенность состоит лишь в том, что процесс гомогенизации нередко заметно сказывается на величинах других функционалов.

Итак, процесс перехода от реального эксперимента к обсчитываемой его модели всегда осуществляется на основе требования сохранения точного равенства  $K_{эфф}$  единице. Погрешности, неизбежные в этом процессе, следует отнести к погрешностям параметров построенной обсчитываемой модели (как правило, размеров); условие же критичности для нее должно выполняться столь же точно, как и в реальном эксперименте. В связи с этим представляется очевидным, что последовательный алгоритм коррекции констант должен предусматривать включение параметров обсчитываемой модели (размеров и концентраций) в список корректируемых параметров, а минимизация квадратичного функционала (I) должна производиться так, чтобы откорректированные параметры (в том числе концентрации и размеры) обеспечили точное равенство  $K_{эфф}$  единице:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial J}{\partial x_i} (I, x) = 0 \quad (3)$$

где  $K_{эфф}$  - эффективный коэффициент размножения в  $i$ -м эксперименте;  $i$  - номер критического эксперимента.

Поиск условного экстремума функционала (I) может быть осуществлен, например, методом неопределенных множителей Лагранжа. Сформулированный подход может представляться несколько странным, поскольку он предусматривает уточнение таких параметров, как концентрации и размеры определенной критической сборки (точнее ее обсчитываемой модели),

а не только нейтронных констант. Разумеется, рассчитывать на существенное уточнение концентраций и размеров в процессе коррекции констант обычно не приходится, кроме того, знать уточненные размеры и концентрации, как правило, не требуется. Однако исключение этих параметров в список корректируемых увеличивает число степеней свободы минимизируемого функционала и это сказывается на результатах коррекции.

Далее будет рассмотрено, в каких случаях и как можно свести сформулированную общую задачу к задаче корректировки только одних нейтронных констант, в каких случаях эта задача становится эквивалентной традиционной постановке проблемы и когда  $K_{эфф}$  рассматривается наравне с прочими функционалами. При этом будет показано, каким именно образом следует вычислять погрешность  $K_{эфф}$ .

Сделаем еще одно замечание. Наиболее корректный подсчет модели критического эксперимента может быть выполнен методом Монте-Карло. Однако расчетное значение  $K_{эфф}$  содержит в себе статистическую погрешность, обусловленную конечным числом разыгранных нейтронных историй. Эту погрешность можно учесть в рамках рассмотренного подхода как поправку к расчетному значению  $K_{эфф}$ , среднее значение которой равно нулю, а дисперсия оценена в программе расчета реактора методом Монте-Карло. Эту поправку следует включить в список корректируемых параметров, а ее дисперсию - в матрицу  $\hat{M}$ . Очевидно, что статистическая погрешность расчетного значения  $K_{эфф}$  не коррелирует с погрешностями других параметров.

Сформулированный подход позволяет внести полную ясность и в алгоритм расчета коэффициентов чувствительности, используемых в процедуре коррекции. Поскольку исходные параметры не обеспечивают точного равенства единице  $K_{эфф}$  обчислимой модели, расчет ее по этим константам ведется путем решения условно-критического уравнения. Суммарный эффект вариации всех параметров расчетной модели согласно излагаемому алгоритму должен быть точно таким, чтобы компенсировать отличие  $K_{эфф}$ , полученного на исходных параметрах, от единицы. Компенсация реактивности при расчете коэффициентов чувствительности должна осуществляться так же, как она осуществляется при расчете функционалов, в данном случае путем вариации собственного числа. Например, вариация линейного функционала  $a_i$  (скорости чисел процесса поглощения), в полном соответствии с данными работы [7] выражается через поток  $F'$  для возмущенной и ценность  $\Phi'$  для невозмущенной задачи с  $K' = 1$  и  $K_{эфф} = K$  соответственно следующим образом (используем обозначения работы [7]):

$$\delta a_i = \left\{ \left( \frac{1}{\ell_a^i} - \frac{1}{\ell_a^i} \right) F' d \Omega d E d V \right\} \left\{ \left( \frac{1}{K'} - \frac{1}{K} \right) F' \Phi' d \Omega d E d V + \int (\omega' - \omega) F' \Phi' d \theta + \frac{1}{K'} \int \left[ \left( \frac{\lambda \nu}{\ell_f} \right) - \left( \frac{\lambda \nu}{\ell_f} \right) \right] F' \Phi' d \theta + \left( \frac{1}{K'} - \frac{1}{K} \right) \int F' \frac{\lambda \nu}{\ell_f} \Phi' d \theta \right\}$$

Подставляя сюда выражение для  $\left( \frac{1}{K'} - \frac{1}{K} \right)$ , получим

$$\delta a_i = \left\{ \left( \frac{1}{\ell_a^i} - \frac{1}{\ell_a^i} \right) F' d \Omega d E d V + \left( 1 - \frac{\int \Phi' \frac{\lambda \nu}{\ell_f} F' d \theta}{\Omega N D'} \right) \times \left[ - \int \left( \frac{1}{\ell'} - \frac{1}{\ell} \right) F' \Phi' d \Omega d E d V + \int (\omega' - \omega) F' \Phi' d \theta + \frac{1}{K'} \int \delta \left( \frac{\lambda \nu}{\ell_f} \right) F' \Phi' d \theta \right] \right\} \quad (4)$$

Из этого выражения ясны формулы, по которым должны вычисляться чувствительности функционала  $a_i$  к константам  $\ell_a^i$ ,  $\ell$ ,  $\omega$ ,  $\lambda$ ,  $\nu$ ,  $\ell_f$ . Аналогичным образом должно производиться вычисление коэффициентов чувствительности к более сложным (билинейным, дробно-линейным и дробно-билинейным) функционалам потока и ценности. О том, как это следует делать, подробно написано в работах [7, 8, 10]. Алгоритм вычисления коэффициентов чувствительности с компенсацией реактивности собственным числом иногда называют "вычислением без компенсации". Это выражение, разумеется, неточно. Компенсация реактивности путем введения в кинетическое уравнение формального параметра  $K$  эквивалентно увеличению  $\lambda$

\* Исключение составляют пусковые критические эксперименты на реакторах энергетических установок, для которых уточнение концентраций и размеров представляет очевидный интерес.

в  $I/K$  раз, т.е. компенсация осуществляется путем вариации  $V$  при неизменных размерах и концентрациях. Спектральная составляющая коэффициента чувствительности при этом обусловлена вариацией только того параметра, по отношению к которому определяется чувствительность: компенсирующая вариация  $V$  не влияет на спектр нейтронов.

Если коррекцию проводить с использованием коэффициентов чувствительности, рассчитанных иным способом компенсации, то это может существенно повлиять на результат коррекции констант.

В § 6 на простом примере будет продемонстрировано, в чем проявляется этот эффект и насколько существенным он может быть.

## § 2. Формирование векторов, подготавливаемых функционалом $I$ , и корректируемых констант $t$

Задача настоящего параграфа - конкретизация выбора векторов  $l$  и  $t$  для макроэкспериментов различного типа. Как надо выбирать эти векторы, однозначно следует из предыдущего рассмотрения. Чтобы устранить риск неправильного понимания, будет не лишним дать конкретные указания. Рассмотрим основные типы макроскопических экспериментов, результаты которых целесообразно использовать для коррекции нейтронных констант. К ним относятся [9]:

- асимптотические (экспоненциальные) нестационарные эксперименты;
- асимптотические стационарные эксперименты (экспоненциальные опыты, опыты на подкритических вставках, дополняющих реактор до критичности);
- критические эксперименты;
- эксперименты по измерению пространственных распределений скоростей реакций, обладающих различным энергетическим ходом сечения, по ячейке гетерогенной решетки;
- интегральные эксперименты - измерения, выполняемые на нейтронных спектрах, форма которых не зависит от величин корректируемых констант (измерение резонансных интегралов, сечений увода под порог в опытах по сферическому пропусканию и т.п.).

Наиболее общим является случай асимптотических нестационарных экспериментов, в которых с определенной конечной точностью измерены константа временного спада  $\lambda$ , геометрический параметр (или определяющие его размеры) и набор некоторых функционалов - отношений сечений на спектре основной временной гармонике или даже возмущений величины  $\alpha$  - путем введения в систему в малой концентрации различных материалов (эксперименты, аналогичные измерениям возмущений реактивности в критических системах). Несмотря на то что измерение функционалов в нестационарных экспериментах проводится редко и здесь трудно добиться высокой точности результатов, в принципе подобные измерения возможны. Использование результатов нестационарных экспериментов для коррекции констант целесообразно лишь тогда, когда имеется полная уверенность в том, что вклад высоких временных гармоник пренебрежительно мал (асимптотические эксперименты). Лишь при этом условии расчет наблюдаемых величин может быть выполнен с высокой степенью надежности. Поэтому желательно использовать результаты тех асимптотических нестационарных экспериментов, в которых соблюдены условия, обеспечивающие возможность разделения пространственных и энергетических переменных (эксперименты на достаточно протяженных голых системах или на системах с отражателем, в котором время жизни нейтрона меньше времени жизни в исследуемой зоне). При обсчете таких экспериментов константа определяется из условия сохранения баланса нейтронов в среде как минимальное собственное число. Например, в многогрупповом диффузионном приближении для однозонной системы условие баланса имеет вид

$$K_{gr\psi}(\alpha) \equiv \sum_g v_g \sum_{j \neq g} \psi_j = 1, \quad (5)$$

где групповые потоки  $\psi_g$  определяются из системы уравнений

$$\left( \sum_{j \neq g} \nu_j - \frac{\alpha}{v_g} + D_g B_g^2 \right) \psi_g = \sum_{j=1}^{g-1} \sum_{j'=1}^{g-j} \nu_{j'} \psi_{j'} + \chi_g \left[ \frac{\sum_{j=1}^G \nu_j \sum_{j'} \psi_{j'}}{\Lambda_{gr\psi}(\alpha)} \right] \quad (6)$$

(величина в квадратных скобках согласно условию баланса равна единице).

В выражении (6)  $B_g^2$  - геометрический параметр,  $g$  - номер группы,  $v$  - скорость.

Условие баланса на откорректированных константах имеет вид

$$\sum_i \frac{\partial K_{\text{эфф}}(\alpha, t)}{\partial t_i} (t'_i - t_i) = 0. \quad (7)$$

Измеренная величина  $\alpha$  должна быть включена в список подгоняемых функционалов (как правило,  $\alpha$  является единственным функционалом, измеренным в таком эксперименте), а размеры, определяющие  $B_{\text{eff}}^2$ , следует включать в список корректируемых параметров  $t$  наряду с концентрациями и константами.

Результаты стационарных экспоненциальных экспериментов, а также экспериментов на вставках из исследуемой среды в активную зону реактора, подпитывающего подкритическую вставку нейтронами, также целесообразно привлекать к задаче коррекции констант лишь тогда, когда имеется уверенность в том, что в той пространственной области, где проведены измерения, достигнуто асимптотическое равновесие нейтронного спектра и пространственные, энергетические переменные разделяются, а на вклад высших гармоник введены соответствующие поправки. В экспериментах такого типа измеряются некоторое число функционалов (отношений скоростей реакций, отношений реактивностей) и (или) материальный параметр среды. Управления для потоков нейтронов имеют тот же вид (6), что и в случае асимптотического нестационарного эксперимента, но  $\alpha \equiv 0$  и в качестве собственного числа используется материальный параметр  $B_{\text{M}}^2$ , заменяющий параметр геометрический. Условие баланса  $K_{\text{эфф}}(B_{\text{M}}^2) = 1$  должно сохраняться и на откорректированных константах:

$$\sum_i \frac{\partial K_{\text{эфф}}(B_{\text{M}}^2, t)}{\partial t_i} (t'_i - t_i) = 0. \quad (8)$$

Материальный параметр, если он измерен, должен быть включен в список подгоняемых функционалов. В список корректируемых параметров включаются концентрации, константы, размеры (последние в том случае, когда они использовались для определения экспериментального значения  $B_{\text{M}}^2$ ).

Критические параметры на голых системах являются предельным случаем асимптотических экспериментов как нестационарных ( $\alpha \rightarrow \alpha_c$ ), так и стационарных ( $B_{\text{M}}^2 \rightarrow B_{\text{c}}^2$ ). Однако результаты критических экспериментов целесообразно использовать для коррекции констант и тогда, когда пространственные и энергетические переменные не разделяются. В последнем случае уравнения для потоков сложны и не содержат естественного параметра, который можно было бы использовать в качестве собственного числа. Поэтому в качестве такового используется  $K_{\text{эфф}}$  (условно-критические уравнения: реактор был бы критическим, если бы все величины  $\nu_{g\Sigma_f}$  были в  $1/K_{\text{эфф}}$  раз больше (или меньше), чем при принятых константах). В критических экспериментах равенство  $K_{\text{эфф}}$  единице установлено точно, поэтому критический параметр ( $K_{\text{эфф}}$ , критическая масса, критический размер) не должен включаться в список подгоняемых функционалов. В список корректируемых параметров включаются константы, концентрации и размеры. Условие баланса имеет вид (3).

Эксперименты в ячейке по методике анализа результатов отличаются от критического эксперимента на реакторе в целом лишь другой постановкой граничных условий. Расчет ведется путем решения условно-критического уравнения для ячейки, находящейся в бесконечной гетерогенной решетке из подобных ей ячеек обычно с  $\beta^2 = B_{\text{M}}^2$ , однако, поскольку эксперимент в одной ячейке не позволяет определить материальный параметр решетки, условие баланса может не сохраняться ни на исходных, ни на откорректированных константах. Таким образом, корректировка констант на основании данных экспериментов, выполненных в ячейках, не требует обеспечения условия баланса. Отсутствие условия баланса при использовании данных интегральных экспериментов на известных спектрах является совершенно очевидным.

Заметим, что в список корректируемых параметров следует включать лишь те, априорная точность которых не слишком велика. В противном случае исходная ковариационная матрица корректируемых констант [матрица  $\hat{M}$  в уравнении (1)] будет близка к особенной. Во многих случаях точными могут считаться размеры, реже - концентрации, еще реже - те или иные константы.

§ 3. Исключение из вектора корректируемых параметров размеров критических сборок и концентраций входящих в их состав изотопов

В § I было показано, что последовательный алгоритм коррекции констант по данным макроэкспериментов должен предусматривать коррекцию параметров, определяющих эти эксперименты: размеров критическихборок и концентраций входящих в их состав изотопов — путем вариации параметров в пределах погрешностей их определения. Эти погрешности, как правило, нельзя считать малыми, особенно, если речь идет о сравнении расчетных и экспериментальных значений функционалов для обосновываемой модели реального эксперимента (гомогенной, с правильными границами и т.п.).

Включение концентраций и размеров в список корректируемых параметров усложняет процесс коррекции, однако, используя клетчатую структуру матриц  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ , можно получить систему линейных уравнений для поправок к одним лишь сечениям (см. приложение). Обозначим параметры, в коррекции которых мы не заинтересованы, через  $s$  (тогда  $i \in \{s\}$ ), и предположим, что они между собой не коррелируют; тогда искомую систему уравнений можно привести к виду [см. (П-6)]

$$\begin{aligned} & \left\{ \hat{M}_G' + \hat{H}_G' \hat{V}^{-1} [\hat{E} - \hat{H}_G' (\hat{M}_G' + \hat{H}_G' \hat{V}^{-1} \hat{H}_G')^{-1} \hat{H}_G' \hat{V}^{-1} \hat{H}_G'] \right\} \hat{V}^{-1} \hat{H}_G' \hat{C}_G' - \\ & - \hat{H}_G' \hat{V}^{-1} [\hat{E} - \hat{H}_G' (\hat{M}_G' + \hat{H}_G' \hat{V}^{-1} \hat{H}_G')^{-1} \hat{H}_G' \hat{V}^{-1} \hat{H}_G'] \hat{V}^{-1} \hat{H}_G' \hat{C}_G' - \\ & - \left[ \left( \frac{\partial \lambda}{\partial G} \right)'_{\mu} - \hat{H}_G' \hat{V}^{-1} \hat{H}_G' \hat{M}_G' \left( \frac{\partial \lambda}{\partial S} \right)'_{\nu} \right] \Omega_{\mu\nu}^{-1} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial S} \right)'_{\nu} \hat{M}_G' \hat{H}_G' \hat{V}^{-1} \hat{H}_G' \hat{C}_G' - \\ & \times [\hat{E} - (\hat{H}_G' \hat{M}_G' \hat{H}_G' + \hat{H}_G' \hat{V}^{-1} \hat{H}_G')^{-1} (\hat{H}_G' \hat{M}_G' \hat{H}_G' + \hat{H}_G' \hat{V}^{-1} \hat{H}_G')] \hat{V}^{-1} \hat{H}_G' \hat{C}_G' - \\ & + \left[ \left( \frac{\partial k}{\partial G} \right)'_{\mu} - \hat{H}_G' \hat{V}^{-1} \hat{H}_G' \hat{M}_G' \left( \frac{\partial k}{\partial S} \right)'_{\nu} \right] \Omega_{\mu\nu}^{-1} (I - \lambda)_{\nu} \end{aligned} \quad (9)$$

Из этого выражения видно, что при  $\hat{H}_G' = 0$  система (9) становится близкой к традиционной. В § 4 будет показано, что при этом условии они полностью эквивалентны. Точный учет влияния погрешностей в параметрах  $s$  (т.е. в условиях экспериментов), как видно, заметно усложняет вычисление коэффициентов системы.

Уравнение (9) можно существенно упростить, если постулировать, что для коррекции целесообразно использовать те эксперименты, условия которых достаточно точно определены, т.е.

$$|\hat{H}_G' \hat{M}_G' \hat{H}_G'| \ll |\hat{V}|; \quad (10a)$$

$$|\hat{H}_G' \hat{M}_G' \hat{H}_G'| \ll |\hat{H}_G' \hat{M}_G' \hat{H}_G'|. \quad (10b)$$

В этом случае уравнение (9) примет вид

$$\begin{aligned} & (\hat{M}_G' + \hat{H}_G' \hat{V}^{-1} \hat{H}_G') (G - G) = \hat{H}_G' \hat{V}^{-1} (G - G) + \left[ \left( \frac{\partial \lambda}{\partial G} \right)'_{\mu} - \hat{H}_G' \hat{V}^{-1} \hat{H}_G' \hat{M}_G' \left( \frac{\partial \lambda}{\partial S} \right)'_{\nu} \right] \Omega_{\mu\nu}^{-1} (I - \lambda)_{\nu} - \\ & - \left[ \left( \frac{\partial \lambda}{\partial G} \right)'_{\mu} - \hat{H}_G' \hat{V}^{-1} \hat{H}_G' \hat{M}_G' \left( \frac{\partial k}{\partial S} \right)'_{\nu} \right] \Omega_{\mu\nu}^{-1} \left[ \left( \frac{\partial \lambda}{\partial G} \right)'_{\nu} \hat{M}_G' \hat{H}_G' + \left( \frac{\partial k}{\partial S} \right)'_{\nu} \hat{M}_G' \hat{H}_G' \right] - \\ & \times [\hat{E} - (\hat{H}_G' \hat{M}_G' \hat{H}_G' + \hat{V})^{-1} \hat{H}_G' \hat{M}_G' \hat{H}_G'] \hat{V}^{-1} (I - I), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\left( \frac{\partial k}{\partial G} \right)'_{\mu}$  — вектор-столбец коэффициентов чувствительности коэффициента размножения для  $\mu$ -го эксперимента;  $\Omega_{\mu\nu}$  — ковариационная матрица  $K_{\text{эфф}}$ , определяемая формулами (П-4) и (П-8).

Используя приближение (10), можно получить следующее выражение для ковариационной матрицы скорректированных констант:

$$\begin{aligned} \hat{M}_G' &= C_G^{-1} - C_G^{-1} \left[ \left( \frac{\partial k}{\partial G} \right)'_{\mu} - \hat{H}_G' \hat{V}^{-1} \hat{H}_G' \left( \frac{\partial \lambda}{\partial S} \right)'_{\nu} \right] \Omega_{\mu\nu}^{-1} \times \\ & \times \left[ \left( \frac{\partial \lambda}{\partial G} \right)'_{\nu} - \left( \frac{\partial k}{\partial S} \right)'_{\nu} \hat{M}_G' \hat{H}_G' \hat{V}^{-1} \hat{H}_G' \right] C_G^{-1}; \quad (C_G^{-1} = \hat{M}_G' + \hat{H}_G' \hat{V}^{-1} \hat{H}_G'). \end{aligned} \quad (12)$$

Из выражений (II) и (I2) следует, что для определения поправок к сечениям кроме ковариационных матриц  $\hat{M}_s$  и  $\hat{V}$  и матриц коэффициентов чувствительности  $\hat{H}_s$  и  $(\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma})_s$  необходимо хранить, а также обращать ковариационную матрицу коэффициентов разложения  $\hat{C}$  и хранить матрицу коэффициентов ковариации между  $I$  и  $K_{эфф}$ , равную  $\hat{H}_s \hat{M}_s (\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma})_s'$ .

§ 4. Определение условий, при которых коэффициент размножения может быть включен в список подгоняемых функционалов

Чтобы определить условия, при которых коэффициент размножения может быть включен в список подгоняемых функционалов, следует сравнить результаты коррекции по традиционному и изложенному в предыдущем параграфе алгоритму (если имеется только один критический эксперимент). В обычном подходе значению  $K_{эфф}$  приписана некоторая ошибка  $\Delta^2 K$  и коэффициенты ковариации с экспериментами  $I - K_{IK}$ . Ковариационная матрица скорректированных констант может быть представлена в этом случае в виде

$$\hat{M}' = \hat{C}_s^{-1} - [\hat{M}_s \hat{H}_s' (\hat{H}_s \hat{M}_s \hat{H}_s' + \hat{V})^{-1} (K_{IK} + \hat{H}_s \hat{M}_s \frac{\partial K}{\partial \sigma}) - \hat{M}_s \frac{\partial K}{\partial \sigma}] \lambda$$

$$\times \frac{[(\lambda_{IK}' + \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \hat{M}_s \hat{H}_s') (\hat{H}_s \hat{M}_s \hat{H}_s' + \hat{V})^{-1} \hat{H}_s \hat{M}_s - \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \hat{M}_s']}{\Delta^2 K + \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \hat{M}_s \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} - (K_{IK}' + \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \hat{M}_s \hat{H}_s') (\hat{H}_s \hat{M}_s \hat{H}_s' + \hat{V})^{-1} (K_{IK} + \hat{H}_s \hat{M}_s \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma})}$$
(I3)

а для поправок к сечениям можно получить выражение

$$\sigma' = \hat{C}_s^{-1} \hat{H}_s' \hat{V}^{-1} (I - K) \hat{C}_s^{-1} \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \hat{H}_s' \hat{V}^{-1} (I - K) + \hat{C}_s^{-1} (\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} - \hat{H}_s' \hat{V}^{-1} K_{IK}) \frac{1 - K}{\Delta^2 K - K_{IK}' \hat{V}^{-1} K_{IK}} -$$

$$- \hat{C}_s^{-1} \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \hat{H}_s' \hat{V}^{-1} (\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} - \hat{H}_s' \hat{V}^{-1} K_{IK}) \frac{1 - K}{\Delta^2 K - K_{IK}' \hat{V}^{-1} K_{IK}} -$$

$$- (\hat{C}_s^{-1} \hat{C}_s^{-1} \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \hat{H}_s' \hat{V}^{-1} \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \hat{H}_s' \hat{V}^{-1} \lambda_{IK}) \lambda_{IK}' \hat{V}^{-1} (I - K).$$
(I4)

Здесь с помощью  $\Omega$  обозначено следующее выражение:

$$\Omega' = \Delta^2 K + \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \hat{M}_s \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} - (\lambda_{IK}' + \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \hat{M}_s \hat{H}_s') (\hat{H}_s \hat{M}_s \hat{H}_s' + \hat{V})^{-1} (K_{IK} + \hat{H}_s \hat{M}_s \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma}).$$
(I5)

Из сравнения формул (I5) и (II-3) видно, что для расчета ошибки  $K_{эфф}$  и коэффициентов ковариации  $K_{IK}$  необходимо воспользоваться формулами

$$\Delta^2 K = \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \hat{M}_s \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma}; \quad K_{IK} = \hat{H}_s \hat{M}_s \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma}.$$
(I6)

Из сравнения формул (I3) и (I2) видно, что ковариационные матрицы совпадут, если

$$|\hat{H}_s \hat{M}_s \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma}| \gg |\lambda_{IK}'| = |\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \hat{M}_s \hat{H}_s'|,$$
(I7)

т.е. корреляция между  $K_{эфф}$  и другими экспериментами, обусловленная условиями проведения эксперимента, гораздо меньше, чем корреляция, обусловленная сечениями. Из сравнения формул (I6) и (I3) видно, что значения скорректированных сечений в обоих случаях будут одинаковы, если наряду с (I8) и (I9) выполняется также и условие

$$|\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma}| \gg |\hat{H}_s' \hat{V}^{-1} \lambda_{IK}'| = |\hat{H}_s' \hat{V}^{-1} \hat{H}_s \hat{M}_s \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma}|.$$
(I8)

Это означает, что прямая чувствительность  $K_{эфф}$  к сечениям гораздо выше косвенной, обусловленной сходными или одинаковыми экспериментальными условиями измерения  $K_{эфф}$  и некоторых других функционалов (например, измерения на одной сборке).

При соблюдении указанных условий традиционный и рассматриваемый алгоритмы будут совпадать только в случае, если коэффициенты чувствительности  $H_s$  и  $H'_s$  вычислены одинаково, причем, как уже отмечалось, правильный (применительно к задаче коррекции констант) алгоритм вычисления коэффициентов чувствительности должен предусматривать компенсацию реактивности собственным числом.

Из рассмотрения, проведенного в этом и предыдущем параграфе, следует следующее:

1. Общий алгоритм, предусматривающий как коррекцию сечений, так и коррекцию параметров  $s$ , может быть применен для обработки экспериментов любого качества. Применение этого алгоритма, безусловно, целесообразно при обработке данных пусковых экспериментов на энергетических установках. В этом случае коррекция концентраций и размеров представляет непосредственный интерес для повышения точности предсказания неизмерявшихся характеристик реактора (например, КВ). Такое повышение точности произойдет лишь в том случае, если измерявшиеся и предсказываемые характеристики рассчитываются достаточно корректно. В противном случае необходимо иметь доказательства, что погрешности расчетной методики на измерявшиеся и предсказываемые характеристики сказываются одинаково. Если это не так или если таких доказательств дать нельзя, проведенный пусковой эксперимент не может быть использован для повышения точности расчетного предсказания неизмерявшейся характеристики.

2. Общий алгоритм коррекции констант (9) сводится к более простому (II) лишь при выполнении условий (IO). Для экспериментов, учет которых при коррекции констант целесообразен, эти условия могут нарушаться. Из выражений (П-IO) и (П-II) легко видеть, что учет при коррекции  $\hat{C}$  измерений набора функционалов нецелесообразен, если

$$|\hat{V}| \gg |\hat{H}_s \hat{M}_s \hat{H}'_s|.$$

Если это неравенство не выполняется, целесообразность учета рассматриваемого набора экспериментов не очевидна. В частности, если для всех экспериментов, информативных по отношению к некоторым константам (например, к константам тяжелых изотопов плутония или к константам осколков деления), не соблюдается условие (IOб), например

$$|\hat{H}_s \hat{M}_s \hat{H}'_s| \sim |\hat{H}'_s \hat{M}_s \hat{H}_s|,$$

из-за значительных неопределенностей в концентрациях интересующих изотопов, то такие эксперименты все равно принимаются во внимание при коррекции констант, но при этом следует пользоваться общим алгоритмом. Условие (IOа) нарушается, если измерения функционалов выполнены особенно точно. В этом случае условие нецелесообразности (IOа) может быть не выполнено, даже если чувствительности  $H'_s$  этих функционалов к интересующим константам низки. Такие эксперименты целесообразно использовать при коррекции констант, когда нарушается условие

$$|\hat{H}_s \hat{M}_s \hat{H}'_s| \gg |\hat{H}'_s \hat{M}_s \hat{H}_s|,$$

обратное условию (IOб). Коррекция констант в этих случаях также должна производиться по общему алгоритму.

3. Упрощенный алгоритм коррекции констант (II) переходит в еще более простой традиционный алгоритм, в котором  $K_{эфф}$  рассматриваются наряду с остальными функционалами, при соблюдении условия (I8), являющегося более жестким, чем (IOа), поскольку  $\hat{H}_s$  в (I8) входит линейно, а не квадратично, как в (IOа).

4. Подобно тому, как в § 3 были исключены из рассмотрения параметры  $s$  и получен общий алгоритм коррекции одних только констант  $\hat{C}$ , можно исключить из рассмотрения сечения тех изотопов или тех реакций, надеяться на уточнение которых при использовании данной совокупности макроэкспериментов нет оснований (соответствующие элементы матрицы  $H'_s$  малы). В этом случае, однако, необходимо обосновать возможность пренебрежения корреляциями между погрешностями этих констант и констант, подлежащих корректировке. Очевидно, легче исключить из рассмотрения константы, относящиеся к разным изотопам, корреляции между которыми могут быть обусловлены лишь общностью экспериментальных методик и общностью опорного сечения. Если вклад этих источников погрешности в суммарную дисперсию мал, то корреляции несущественны. Возможность исключения из рассмотрения сечений, относящихся к тем энергетическим группам, в которых поток мал, пред-



оставляется лишь тогда, когда корреляции между сечениями в различных энергетических группах малы. Следует отметить, что эти корреляции велики, как правило, когда имеется теоретическая модель для описания энергетической зависимости сечения. В этом случае сокращение числа корректируемых параметров может быть осуществлено путем перехода от сечений  $\sigma$  к параметрам соответствующей модели  $\rho$ , причем

$$\hat{H}_\rho = \hat{H}_\sigma \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} \right),$$

где  $(\partial \sigma / \partial \rho)$  – матрица коэффициентов чувствительности сечений  $\sigma$  к параметрам  $\rho$  теоретической модели.

### § 5. Влияние способа компенсации реактивности на оценку информативности макроскопического эксперимента

Определение информативности эксперимента по отношению к некоторому реакторному функционалу  $F$  было дано в работе [6], где информативность определена, как уменьшение дисперсии расчетного предсказания функционала  $F$  в результате коррекции констант на основе результатов данного эксперимента:

$$J_a = D[F(t)] - D[F(t')]. \quad (19)$$

Определенную таким образом информативность естественно назвать абсолютной. Наряду с нею целесообразно, по-видимому, ввести понятие относительной информативности

$$J_z = \frac{D[F(t)] - D[F(t')]}{D[F(t)]},$$

меняющейся от 0 для эксперимента, не уточняющего предсказания функционала  $F$ , до единицы – в случае эксперимента, позволяющего определить  $F$  абсолютно точно (определение критической массы реактора во время пуска имеет по отношению к критической массе именно этого реактора информативность  $J_z$ , равную единице). Относительные информативности легче поддаются сравнению. Можно также ввести понятие целевой или прагматической информативности:

$$J_p = \frac{D[F(t)] - D[F(t')]}{D[F(t)] - D_0[F(t)]}.$$

где  $D_0[F]$  – требуемый для интересующей нас цели уровень дисперсии функционала  $F$  (например, для целей предсказания характеристик топливного цикла быстрых энергетических реакторов требуемый уровень точности КВ составляет 2% ( $D_0[\lambda B] = 4 \cdot 10^{-4}$ ) при условии, что уровень точности предсказания  $K_{eff}$  составляет 1% /10/).

Таким образом, если прагматическая информативность некоторого эксперимента (или совокупности экспериментов) равна или превышает единицу, то выполнение этих экспериментов позволяет обеспечить требуемый уровень точности расчетного предсказания интересующего нас функционала. Когда интересующий нас функционал  $F$  зависит не только от констант  $\sigma$ , но и от параметров эксперимента  $s$  (например, информативность экспериментов, выполненных при пуске реактора по отношению к КВ первой загрузки), т.е. когда корректируются все параметры, формула (19) для абсолютной информативности имеет вид

$$J_a = Z^+ \left\{ \hat{M}_\sigma^+ \hat{H}_\sigma^+ (\hat{H}_\sigma \hat{M}_\sigma \hat{H}_\sigma^+ + \hat{V} \hat{\Lambda})^{-1} \hat{H}_\sigma \hat{M}_\sigma + (C'_\sigma)^+ \left[ \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \right)_\mu^+ - \hat{H}_\sigma^+ \hat{V}^{-1} \hat{H}_s \hat{M}_s \left( \frac{\partial k}{\partial s} \right)_\mu^+ \right] \Omega_{\mu\nu}^{-1} \left[ \left( \frac{\partial k}{\partial \sigma} \right)_\nu^+ - \left( \frac{\partial k}{\partial s} \right)_\nu^+ \hat{M}_s \hat{H}_s^+ \hat{V}^{-1} \hat{H}_\sigma \right] (C'_\sigma)^- \right\} Z. \quad (20)$$

Здесь в матрице  $C'_\sigma$  матрица  $\hat{V}$  заменяется на  $\hat{V} \hat{\Lambda}$  (определение  $\hat{\Lambda}$  см. в (П-12)). Если  $F$  не зависит от  $s$  и, как это обычно бывает, погрешности  $s$  и  $\sigma$  независимы ( $\hat{M}_{\sigma s} = 0$ ), то коррекция, выполненная путем решения системы уравнений (II) дает информативность

$$J_a = Z^+ \{ \hat{M}_0 \hat{H}_0^+ (\hat{H}_0 \hat{M}_0 \hat{H}_0^+ + \hat{V})^{-1} \hat{H}_0 \hat{M}_0 + \\ + C_0^{-1} [ (\frac{\partial \lambda}{\partial c})_M^+ - \hat{H}_0^+ \hat{V}^{-1} \hat{H}_0 \hat{M}_0 (\frac{\partial \lambda}{\partial s})_M^+ ] \Omega_{\mathcal{N}\mathcal{V}}^{-1} [ (\frac{\partial \kappa^+}{\partial c})_V - (\frac{\partial \kappa^+}{\partial s})_V \hat{M}_0 \hat{H}_0^+ \hat{V}^{-1} \hat{H}_0 ] C_0^{-1} \} Z. \quad (21)$$

Выполнение условия (18) приводит это выражение к более простому, справедливому для традиционного алгоритма коррекции констант:

$$J_a = Z^+ \{ \hat{M}_0 \hat{H}_0^+ (\hat{H}_0 \hat{M}_0 \hat{H}_0^+ + \hat{V})^{-1} \hat{H}_0 \hat{M}_0 + \\ + C_0^{-1} (\frac{\partial \lambda}{\partial c})_M^+ \Omega_{\mathcal{N}\mathcal{V}}^{-1} (\frac{\partial \kappa^+}{\partial c})_V C_0^{-1} \} Z \equiv Z^+ \hat{M}_0 \hat{H}_0^+ (\tilde{H}_0 \tilde{M}_0 \tilde{H}_0^+ + \tilde{V})^{-1} \tilde{H}_0 \tilde{M}_0 Z, \quad (22)$$

где  $\tilde{H}_0$  и  $\tilde{V}$  - матрицы коэффициентов чувствительности и ковариаций всех функционалов, включая  $K_{\text{эфф}}$ .

Если матрица  $\tilde{V}$  диагональна, то матрица  $\hat{M}_0$  может быть определена путем последовательного учета одного эксперимента за другим. При этом информативность  $(i+1)$ -го эксперимента зависит от того, какие эксперименты были учтены до этого [4]. В частности, первый эксперимент, имеющий малую или даже нулевую информативность, может так преобразовать матрицу  $M_0$ : ( $M_0^{(i)} \rightarrow M_0^{(i+1)}$ ), что это приведет к заметному повышению информативности второго эксперимента. Суммарная информативность экспериментов в рассматриваемом приближении не зависит от последовательности их учета, поэтому целесообразно при планировании совокупности экспериментов, выполнение которых возможно в течение заданного срока, выбирать ту из возможных совокупностей, которая обладает наибольшей информативностью. Этот подход к планированию оптимальной совокупности экспериментов был развит в работе [4] (по-видимому, впервые применительно к рассматриваемой задаче). Несмотря на то что он предполагает независимость макроэкспериментов друг от друга, которая может сильно нарушаться, применимость его для оценки планов экспериментов представляется вполне оправданной. Если среди альтернативных возможностей существуют совокупности экспериментов, существенно различающиеся степенью корреляции их результатов, то оптимальный план, построенный в предположении о диагональности  $\tilde{V}$ , может потребовать корректив, (например, совокупность достаточно большого числа экспериментов по измерению  $\sigma_c^1, \sigma_f^2$  может показаться в предположении об их независимости более информативной по отношению к КВ, чем совокупность, включающая наряду с измерениями этого отношения другие измерения, которые менее информативны по отношению к КВ, но зато действительно независимы). Как правило, эти коррективы могут быть учтены из общих соображений при выборе альтернативных возможностей.

В работе [6] указано, что оценка информативности планирующихся экспериментов является необходимым условием выбора оптимальной совокупности экспериментов, обеспечивающих требуемый уровень точности расчетного предсказания физических характеристик реакторов. В связи с этим интересно рассмотреть, как может меняться оценка информативности в зависимости от способа расчета коэффициентов чувствительности  $Z$  (т.е. способа компенсации реактивности).

Проведем это рассмотрение на конкретном примере. Пусть эксперимент состоит в измерении отношения сечения радиационного захвата нейтронов в  $^{238}\text{U}$  к сечению поглощения нейтронов в  $^{235}\text{U}$  на асимптотическом спектре среды, содержащей в своем составе кроме указанных изотопов урана такие изотопы, сечения которых можно считать точно известными. Будем считать, что сечения поглощения этих изотопов равны нулю. Примем далее, что условие асимптотического равновесия нейтронного спектра обеспечено путем сооружения гомогенной критической сборки интересующего нас состава без отражателя; измерение отношения  $I_3 = \sigma_c^3 / \sigma_a^3$  с погрешностью  $\pm \Delta I_3$  осуществлено в центре этой сборки. Таким образом, полагаем, что помимо измерения  $I_3$  устанавливается также с пренебрежимо малой ошибкой факт равенства  $K_{\text{эфф}} = 1$  для сборки заданных размеров.

Пусть цель эксперимента заключается в уточнении расчетного предсказания коэффициента воспроизводства в однородной активной зоне энергетического реактора (КВА). Если активная зона имеет большие размеры и ее состав совпадает с составом сборки, то интересующий нас КВА будет близок к коэффициенту воспроизводства для критической сборки. Для простоты рассуждений и выкладок постулируем, что  $KVA = KV$  сборки. Поскольку сборка не имеет отражателя и размеры ее по предположению достаточно велики, при обчете выполненного на ней эксперимента можно ограничиться одnogрупповым нуль-мерным диффузионным приближением. Пренебрежем делением  $^{238}U$ , тогда в принятом приближении коэффициенты размножения и воспроизводства для сборки и реактора и расчетная величина функционала будут равны:

а) для сборки:

$$K_{eff} = \frac{\rho_0 \rho_1 \rho_2}{\rho_0 \rho_1 + \rho_2 \rho_3 + \rho_4 \rho_5} \approx \frac{t_1}{t_1 t_2 t_3 + t_4} ;$$

$$KB = \frac{\rho_0 \rho_1}{\rho_2 \rho_3} \cdot t_1 t_2 + t_3 = \frac{\rho_0 \rho_1}{\rho_2 \rho_3} t_2 ;$$

б) для реактора:

$$K_{eff} = \frac{\rho_0 \rho_1 \rho_2}{\rho_0 \rho_1 + \rho_2 \rho_3 + \rho_4 \rho_5} \approx \frac{t_1}{t_1 t_2 t_3 + t_4} ;$$

$$KB = \frac{\rho_0 \rho_1}{\rho_2 \rho_3} \cdot t_1 t_2 + t_3 = \frac{\rho_0 \rho_1}{\rho_2 \rho_3} t_2 ;$$

Здесь звездочкой отмечены величины, зависящие от концентрации изотопов в реакторе, равные соответствующим величинам для критической сборки;

$$t_1 = \frac{D^2}{\rho_0 \rho_1} + t_2 = \frac{D^2}{\rho_0 \rho_1} + t_3 = \frac{D^2}{\rho_2 \rho_3} + t_4 = \frac{D^2}{\rho_4 \rho_5} = \frac{D^2 B^2}{\rho_5 \rho_6} = \frac{D^2 B^2}{\rho_5 \rho_6} \dots$$

параметры используемой теории, один из которых ( $t_2$ ) совпадает с измеренным функционалом. Таким образом, среди параметров  $t_2$  лишь два ( $t_1$  и  $t_2$ ) определяются сечениями, а остальные характеризуют условия эксперимента. Если топливные материалы исследованной сборки и интересующего нас реактора изготавливались независимо друг от друга, то  $\delta t_1 \delta t_2 = \delta t_2 \delta t_1 = 0$  и уточнение концентраций и размера критической сборки по данным выполненного эксперимента непосредственно не отразится на точности расчетного предсказания интересующего нас функционала КВА. В этих условиях задача состоит лишь в уточнении параметров  $t_1$  и  $t_2$ . Дисперсия КВА на неоткорректированных константах равна

$$\Delta K_{eff}^2 = t_1^2 \delta t_1^2 + 2 t_1 t_2 \delta t_1 \delta t_2 + t_2^2 \delta t_2^2 .$$

Дисперсия обогаченности  $\delta^2 t_2^*$  может состоять из двух частей: первая - дисперсия, обусловленная принятыми при изготовлении топлива технологическими допусками  $\Delta^2 t_3$ ; вторая - вклад в дисперсию обогаченности, который будет наблюдаться в том случае, если решено, что возможные просчеты в критических параметрах  $t_3^*$  и  $t_4^*$  при выводе реактора в критическое состояние будут скомпенсированы изменениями обогаченности по сравнению с проектным значением, равным  $t_3$ , на  $\Delta_1 t_3$  (значение же  $t_4^*$ , т.е. радиуса активной зоны, сохранится равным проектному  $t_4$ ). В этом случае

$$\delta^2 t_3^* = \Delta_1^2 t_3 + \Delta_2^2 t_3 + 2 \Delta_1 \Delta_2 t_3 .$$

Для оценки  $\Delta_1^2 t_3$  и  $\delta t_2 \delta t_3^*$  потребуем равенства нулю вариации  $K_{eff}$ , обусловленного вариацией параметров (как случайными, так и преднамеренной вариацией  $\Delta_1 t_3$  для обеспечения критичности):

$$\delta K_{eff} = \frac{\Delta t_1 + K_{eff} (t_1 \Delta t_1 + t_2 \Delta t_2 + t_3 \Delta_1 t_3 + \Delta t_4)}{1 + t_1 t_3 + t_4} = 0 .$$

Отсюда

$$\Delta_1 t_3 = \frac{1}{t_3} \left[ \Delta t_1 - K_{eff} (t_1 \Delta t_1 + t_2 \Delta t_2 + \Delta t_4) \right] .$$

Предполагая независимость случайных вариаций параметров  $t_i^*$  и учитывая, что  $K_{\text{эфф}}=1$ , получаем

$$\Delta_1^2 t_3^* = \frac{1}{t_2^2} \overline{\Delta^2 t_1} + \frac{t_3^2}{t_2^2} \overline{\Delta^2 t_2} + \overline{\Delta^2 t_3^*} + \frac{1}{t_2^2} \overline{\Delta^2 t_4^*};$$

$$\frac{\overline{\Delta t_3^* \Delta_1 t_3^*}}{\overline{\Delta t_2 \Delta_1 t_3^*} - \delta t_2 \delta t_3} = \frac{\overline{\Delta^2 t_3^*}}{\frac{1}{t_2^2} \overline{\Delta^2 t_2}}.$$

Таким образом,

$$\overline{\delta^2 t_3} = \frac{1}{t_2^2} \overline{\Delta^2 t_1} + \frac{t_3^2}{t_2^2} \overline{\Delta^2 t_2} + \frac{1}{t_2^2} \overline{\Delta^2 t_4^*}.$$

Итак, если просчеты в критичности компенсируются обогащением, то

$$D[KBA(t)] = D_1 [KBA(t)] \overline{\Delta^2 t_1} + \overline{\Delta^2 t_3^*}.$$

Если же просчеты в критичности компенсируются радиусом (т.е. параметром  $t_4^*$ , от величины которого КВА в принятой расчетной модели явно не зависит), то  $\overline{\Delta^2 t_4^*} = 0$  и

$$D[KBA(t)] = D_2 [KBA(t)] \cdot t_3^2 \overline{\Delta^2 t_2} + \overline{\Delta^2 t_3^*}.$$

Выражения для дисперсий КВА, вычисленного по откорректированным константам, отличаются от написанных лишь тем, что дисперсии  $\overline{\Delta^2 t_1}$  и  $\overline{\Delta^2 t_2}$  заменяются на меньшие дисперсии  $\overline{\Delta'^2 t_1}$  и  $\overline{\Delta'^2 t_2}$ . Таким образом, абсолютные информативности макроскопического эксперимента по отношению к КВА существенно зависят от того, какое техническое решение принято для компенсации ожидаемых просчетов в величине критических параметров. Если компенсация проводится вариацией обогащений (в реальных проектах увеличением объема зоны высокого обогащения за счет зоны малого обогащения или наоборот), то

$$J_{\alpha_1} = \overline{\Delta'^2 t_1} - \overline{\Delta'^2 t_1'},$$

если же радиусом (например, радиусом зоны большого обогащения при постоянном объеме зоны малого обогащения), то

$$J_{\alpha_2} = (\overline{\Delta'^2 t_2} - \overline{\Delta'^2 t_2'}) t_3^2.$$

Очевидно, что эксперимент по измерению отношения  $\sigma_{\alpha_2}^2 / \sigma_{\alpha_1}^2$ , позволяющий повысить точность параметра  $t_2$ , позволит снизить дисперсию КВА лишь во втором случае. Его информативность по отношению к КВА при компенсации обогащением в принятой модели точно равна нулю.

Эксперимент по измерению  $K_{\text{эфф}}$  (точнее, по измерению параметров  $t_3$  и  $t_4$ , при которых критическая сборка достигает критичности) позволяет повысить точность  $t_1$  и  $t_2$ . Поэтому его информативность по отношению к КВ будет отлична от нуля и при том, и при другом способе компенсации реактивности. Таким образом, при компенсации реактивности обогащением информативность эксперимента по измерению  $K_{\text{эфф}}$  по отношению к КВ выше, чем эксперимента по измерению  $\bar{t} = t_3 = \frac{\sigma_{\alpha_2}^2}{\sigma_{\alpha_1}^2}$ .

До сих пор рассматривалась зависимость информативности эксперимента от компенсации при расчете коэффициентов чувствительности реактивного функционала (КВА) для определения зависимости информативности от способа компенсации при расчете коэффициентов чувствительности для измеряемых функционалов качественной оценки недостаточно. Количественная оценка информативностей для рассматриваемого примера будет проведена в следующем параграфе.

\* Из выражений для  $t_i$  видно, что для предположения о независимости их погрешностей нет никаких оснований: неопределенность в  $\sigma_{\alpha_2}^2$  дает одинаковый вклад в неопределенность  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_4$ ; погрешности  $t_3$  и  $t_4$  скоррелированы за счет общего вклада погрешности  $\rho_5$ . Следует пренебречь этими корреляциями, чтобы сделать выкладки менее громоздкими.

§ 6. Влияние способа компенсации реактивности при расчете коэффициентов чувствительности для подгоняемых функционалов

В предыдущем параграфе было показано, что при оценке информативности эксперимента по отношению к некоторому реакторному функционалу необходимо учитывать, для какого реактора рассчитывается функционал, поскольку от этого зависит способ компенсации при расчете коэффициентов чувствительности для функционала. Чтобы определить, как влияет способ компенсации при расчете коэффициентов чувствительности, используемых в коррекции функционалов, рассмотрим пример предыдущего параграфа. При этом введена зависимость  $t_2 = \frac{\sigma_c^8}{\sigma_a^5}$  от параметра  $t_3 = \frac{\rho_B}{\rho_5}$  следующим образом: пусть среднее значение  $t_2$  не зависит от  $t_3$ , а производная  $\delta t_2 / \delta t_3 = \alpha$ , т.е.

$$t_2 = t_2 + \alpha (t_3 - t_{3, \text{уст}}).$$

В табл. I приведены величины коэффициентов чувствительности, необходимые для расчета информативности.

Таблица I  
Зависимость коэффициентов чувствительности функционалов от способа компенсации реактивности

Параметр	Компенсация при расчете $H_{KB}$		Компенсация при расчете $H_I$		$K_{\text{эфф}}$
	$t_3$	$t_4$	$t_3$	$t_4$	
$t_1$	$\frac{1}{K} = 1$	0	$\frac{\alpha}{K t_2} = 1$	0	$\frac{K}{t_1} = 0,5$
$t_2$	0	$t_3 = 8$	$1 - \frac{\alpha t_3}{t_2} = -\tilde{r}$	1	$-\frac{\lambda^2 t_3}{t_1} = -4$
$t_3$	0	$t_2 = 0,1$	0	$\alpha = 0,1$	$-\frac{\lambda^2 t_2}{t_1} = -0,05$
$t_4$	1	0	$-\frac{\alpha}{t_2} = -1$	0	$-\frac{K^2}{t_1} = -0,5$

Численные значения коэффициентов чувствительности, приведенные в табл. I, а также значения информативности, приведенные в табл. 2 и 3, рассчитаны в предположении, что

$$t_1 = \sqrt{\frac{\sigma_t^5}{\sigma_a^2}} = 2; \quad t_2 = \frac{\sigma_c^8}{\sigma_a^5} = 0,1; \quad t_3 = \frac{\rho_B}{\rho_5} = 8; \quad t_4 = \frac{B^2 D}{\rho_5 \sigma_a^5} = 0,2;$$

$$\delta t_1 = 3\%; \quad \delta t_2 = 5\%; \quad \delta t_3 = 0,5\%; \quad \delta t_4 = 2\%;$$

$$\Delta^2 t_1 = 36 \cdot 10^{-4}; \quad \Delta^2 t_2 = 0,25 \cdot 10^{-4}; \quad \Delta^2 t_3 = 16 \cdot 10^{-4}; \quad \Delta^2 t_4 = 0,16 \cdot 10^{-4};$$

$$\alpha = 0,1; \quad \delta I_3 = 1\%; \quad \Delta^2 I_3 = 0,01 \cdot 10^{-4}.$$

Таблица 2

Формулы для расчета абсолютной информативности экспериментов по отношению к КВ

Информативность	Компенсация при расчете $H_1$	Компенсация при расчете $H_{КВ}$	
		$t_3$	$t_4$
$J_{a_1} \cdot 10^4$	$t_3$	$\frac{\left(\frac{\alpha}{K t_2}\right)^2 \frac{\Delta^2 t_1}{\Delta^2 I_3} \Delta^2 t_1}{1 + \frac{1}{t_2^2 \Delta^2 I_3} \left[ \left(\frac{\alpha}{K}\right)^2 \Delta^2 t_1 + (t_2 - \alpha t_3) \Delta^2 t_2 \right]}$	$\frac{\left(\frac{t_3}{t_2}\right)^2 (t_2 - \alpha t_3)^2 \frac{\Delta^2 t_2}{\Delta^2 I_3} \Delta^2 t_2}{1 + \frac{1}{t_2^2 \Delta^2 I_3} \left[ \left(\frac{\alpha}{K}\right)^2 \Delta^2 t_1 + (t_2 - \alpha t_3) \Delta^2 t_2 \right]}$
	$t_4$	0	$\frac{t_3^2 \Delta^2 t_2}{1 + \frac{\Delta^2 t_2}{\Delta^2 I_3}}$
$J_{a_K} \cdot 10^4$		$\frac{\frac{1}{t_1^2} \cdot \frac{\Delta^2 t_1}{\Delta^2 K} \Delta^2 t_1}{1 + \frac{1}{\Delta^2 K} \left(\frac{K^2}{t_1}\right)^2 \left[ \frac{\Delta^2 t_1}{K^2} + t_3^2 \Delta^2 t_2 \right]}$	$\frac{\left(\frac{K t_3}{t_1}\right) (K t_3)^3 \frac{\Delta^2 t_2}{\Delta^2 K} \Delta^2 t_2}{1 + \frac{1}{\Delta^2 K} \left(\frac{K^2}{t_1}\right)^2 \left[ \frac{\Delta^2 t_1}{K^2} + t_3^2 \Delta^2 t_2 \right]}$
$J_{a_{K \text{ после } I}} \cdot 10^4$	$t_3$	$\frac{\left(\frac{\theta}{t_1}\right)^2 \frac{\Delta^2 t_1}{\Delta^2 K} \Delta^2 t_1}{1 + \frac{\xi}{\Delta^2 K}}$	$\frac{\left(\frac{K t_3}{t_1}\right)^2 \left(\frac{\Delta^2 t_2}{\Delta^2 K} \Delta^2 t_2\right)}{1 + \frac{\xi}{\Delta^2 K}}$
	$t_4$	$\frac{\frac{1}{t_1^2} \cdot \frac{\Delta^2 t_1}{\Delta^2 K} \Delta^2 t_1}{1 + \frac{1}{\Delta^2 K} \left(\frac{K^2}{t_1}\right)^2 \left( \frac{\Delta^2 t_1}{K^2} + \frac{t_3^2 \Delta^2 t_2}{1 + \Delta^2 t_2 / \Delta^2 I_3} \right)}$	$\frac{(K t_3)^4 \cdot \frac{\Delta^2 t_2}{\Delta^2 K (1 + \Delta^2 t_2 / \Delta^2 I_3)} \Delta^2 t_2}{1 + \frac{1}{\Delta^2 K} \left(\frac{K^2}{t_1}\right)^2 \left( \frac{\Delta^2 t_1}{K^2} + \frac{t_3^2 \Delta^2 t_2}{1 + \Delta^2 t_2 / \Delta^2 I_3} \right)}$

**Примечание.** 
$$\xi = \left(\frac{K^2}{t_2}\right)^2 \left\{ \frac{\Delta^2 t_1}{K_2} \left[ 1 - \left(\frac{\alpha}{K t_2}\right)^2 \frac{\Delta^2 t_1}{W + \Delta^2 I_3} \right] + 2 \frac{\alpha t_3 (t_2 - \alpha t_3)}{(K t_2)^2} \cdot \frac{\Delta^2 t_1 \Delta^2 t_2}{W + \Delta^2 I_3} + \Delta^2 t_2 t_3^2 \left[ 1 - \left(\frac{t_2 - \alpha t_3}{t_2}\right)^2 \frac{\Delta^2 t_2}{W + \Delta^2 I_3} \right] \right\};$$

$$W = \frac{1}{t_2^2} \left[ \left(\frac{\alpha}{K}\right)^2 \Delta^2 t_1 + (t_2 - \alpha t_3)^2 \Delta^2 t_2 \right];$$

$$\theta = \left\{ 1 - \left(\frac{\alpha}{K t_2}\right)^2 \frac{\Delta^2 t_1}{W + \Delta^2 I_3} + \frac{\alpha t_3 (t_2 - \alpha t_3) \Delta^2 t_2}{t_2^2 (W + \Delta^2 I_3)} \right\};$$

$$Q = \frac{\alpha (t_2 - \alpha t_3)}{(K t_2)^2} \cdot \frac{\Delta^2 t_1}{W + \Delta^2 I_3} + t_3 \left[ 1 - \left(\frac{t_2 - \alpha t_3}{t_2}\right)^2 \frac{\Delta^2 t_2}{W + \Delta^2 I_3} \right].$$

Таблица 3

Оценки информативности экспериментов

Компенсация при расчете $H_1$	Методы	Компенсация при расчете $H_{КВ}$	
		$t_3 = \rho_8 / \rho_5$	$t_4 = B^2 D / \rho_5 \epsilon_a^5$
$t_4$	Алгоритм работы [4]	$35,99 \cdot 10^{-4}$ (0,999)	$15,67 \cdot 10^{-4}$ (0,975)
	Формула (20)	$31,46 \cdot 10^{-4}$ (0,875)	$10,43 \cdot 10^{-4}$ (0,652)
$t_3$	Алгоритм работы [4]	$30,37 \cdot 10^{-4}$ (0,843)	$8,72 \cdot 10^{-4}$ (0,545)

Рассчитанные с такими значениями параметров  $t_i$  значения  $K_{эфф} = I$ ;  $KB = 0,8$ ;

$$\widetilde{\Delta^2 K} = 13,08 \cdot 10^{-4}; \quad \widetilde{\delta K} = 3,6\%; \quad \Delta^2 KH = \begin{cases} 30 \cdot 10^{-4} \text{ (компенсация } t_3) \text{ (} \delta KB = 7,5\%); \\ 16 \cdot 10^{-4} \text{ (компенсация } t_4) \text{ (} \delta KB = 5\%). \end{cases}$$

Отметим, что коэффициенты чувствительности, рассчитанные в примере с компенсацией реактивности за счет изменения  $t_i$ , совпадают с коэффициентами чувствительности, рассчитанными с компенсацией собственным числом. Условия применимости традиционного алгоритма коррекции в нашем примере имеют вид

$$\alpha^2 \Delta^2 t_3 \ll \Delta^2 I_3 \quad (0,16 \ll 0,01(1)). \quad (10a')$$

Это условие грубо нарушается из-за высокой точности измерения и "большого"  $\alpha$ ;

$$\alpha^2 \Delta^2 t_3 \ll \Delta^2 t_2 \quad (0,16 \ll 0,25(1)). \quad (10б')$$

Это условие также не выполнено. Дисперсия  $K_{эфф}$  за счет погрешностей размеров и концентраций

$$\Delta^2 K = \left(\frac{K^2 t_2}{t_1}\right)^2 \Delta^2 t_3 + \left(\frac{K^2}{t_1}\right)^2 \Delta^2 t_4 = 0,08 \cdot 10^{-4} \delta K = 0,3\%. \quad (15')$$

Коэффициент корреляции между погрешностями  $I$  и  $K_{эфф}$

$$\Lambda_{IK} = \alpha \Delta^2 t_3 \left(-\frac{K^2 t_2}{t_1}\right) = -0,08 \cdot 10^{-4}. \quad (16)$$

Эту корреляцию можно считать малой:

$$\left| \alpha \Delta^2 t_3 \frac{K^2 t_2}{t_1} \right| \ll \left| \frac{K^2 t_3}{t_1} \Delta^2 t_2 \right| \quad (0,08 \ll 1). \quad (17)$$

Поэтому прямая чувствительность  $K_{эфф}$  к константам много больше косвенной (за счет корреляции с  $I$ ):

$$\begin{aligned} \left| \frac{K}{t_1} \right| &\gg 0 \quad (0,5 \gg 0); \\ \left| \frac{K^2 t_3}{t_1} \right| &\gg \left| \alpha \frac{K^2 t_2}{t_1} \frac{\Delta^2 t_3}{\Delta^2 I_3} \right| \quad (4 \gg 0,8). \end{aligned} \quad (18)$$

В табл.2 приведены аналитические выражения для абсолютной информативности проведенных экспериментов по отношению к KB реакторов, полученные с помощью алгоритма работы [4]. Их численные оценки сделаны на основании выбранных значений для параметров  $t_i$  и их ошибок  $\Delta^2 t_i$ . Как показано выше, применение этого алгоритма для выбранных значений параметров не оправдано и для того, чтобы оценить, насколько из-за этого завышается информативность, были проведены оценки по формуле (20). Для абсолютной информативности эксперименты по измерению  $I$  относительно KB реакторов на основании формулы (20) получают следующие выражения:

$$J_{a1} = \begin{cases} 0 & \text{(компенсация при расчете } N_{KB} \text{ параметром } t_3 = \frac{\rho_8}{\rho_s} \text{)}; \\ \frac{t_3 \Delta^2 t_2 \frac{\Delta^2 t_2}{\Delta^2 I_3}}{1 + \frac{\Delta^2 t_2}{\Delta^2 I_3} + \alpha^2 \frac{\Delta^2 t_3}{\Delta^2 I_3}} = 9,52 \cdot 10^{-4} (0,59) & \text{(компенсация параметром } t_4 \text{ - размером)}. \end{cases}$$

В скобках дана относительная информативность.

Аналитические формулы для суммарной информативности проведенных экспериментов сложны и лишены наглядности, поэтому в табл.3 приводятся только ее численные оценки, полученные с выбранными значениями  $t_i$  и  $\Delta^2 t_i$  по формуле (20).

В табл.3 приведены оценки информативности экспериментов по измерению  $\beta$  и критических параметров относительно КВ реактора, сделанные различными методами. Причем рассматриваются разные случаи компенсации реактивности при расчете коэффициентов чувствительности как для КВ, так и для  $\beta$ . В скобках дана относительная информативность.

Приведем, наконец, точности  $K_{eff}$  и КВ, рассчитанных по откорректированным сечениям нашей грубой модели:

$$\frac{\delta \hat{\lambda}}{\hat{\lambda}} = 0,12\% \text{ (вместо } 3,6\%); \quad \frac{\delta \lambda_{eff}}{\lambda_{eff}} = \begin{cases} 2,65 \text{ (вместо } 7,5\%) - \text{ компенсация } \hat{\beta}_3; \\ 2,95 \text{ (вместо } 5\%) - \text{ компенсация } \hat{\beta}_4. \end{cases}$$

Из полученных результатов видно, что информативность по отношению к некоторому реакторному функционалу зависит не только от того, для какого реактора рассчитывался этот функционал, но также и от алгоритма коррекции констант (в том случае, если неоправданно исключены из процесса коррекции достаточно сильно влияющие на ее результат параметры). Информативность может завышаться довольно сильно (иногда в 1,5 раза). При этом получаются не только неверная оценка информативности, но и неверно скорректированные константы. Поэтому законность исключения из рассмотрения тех или иных параметров необходимо обосновывать не только при коррекции констант, но и при использовании метода "переноса" [II]. На практике могут встретиться случаи, когда влияние отброшенных параметров на измеряемые функционалы мало или точность измерения этих функционалов не очень высока (т.е. выполняется условие  $|\hat{V}| \gg |\hat{H}_0, \hat{M}, \hat{U}_0|$  [Ia]). Тогда возможно применение алгоритмов коррекции (и "переноса") с использованием только оставшихся параметров, но во всяком случае, как видно из рассмотренного примера (в котором выбирались, по-видимому, вполне возможные значения параметров и их ошибок), необходимо обосновывать возможность такого исключения.

## П Р И Л О Ж Е Н И Е

### Вывод формулы для поправок к корректируемым сечениям

Пользуясь методом неопределенных множителей Лагранжа, задачи (I), (2), (4) можно свести к решению системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa_{\mu}}{\partial t} (t-t) - \lambda_{\mu} \left( \kappa_{\mu} - \kappa_{\mu}^0 \right) &= 0, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots, r; \\ 2(\hat{M}^{-1} + \hat{H}^{-1} \hat{V}^{-1} \hat{H})(t-t) + \lambda_{\mu}^t \frac{\partial \kappa_{\mu}}{\partial t} - 2\hat{H}^{-1} \hat{V}^{-1} (I_0 - I) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{II-1})$$

где  $\lambda_{\mu}^t = \|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\|$  - множители Лагранжа. Из последнего соотношения имеем

$$t-t = \hat{C}^{-1} \left[ \hat{H}^{-1} \hat{V}^{-1} (I_0 - I) - \frac{1}{2} \lambda_{\mu}^t \frac{\partial \kappa_{\mu}}{\partial t} \right], \quad (\text{II-2})$$

где  $\hat{C} = \hat{M}^{-1} + \hat{H}^{-1} \hat{V}^{-1} \hat{H}$  - информационная матрица Фишера для  $t$ . Подставляя (II-2) в уравнение связи, получим для множителей Лагранжа

$$\lambda_{\mu} = 2 \left[ \left( \frac{\partial \kappa_{\mu}}{\partial t} \right)_{\mu} \hat{C}^{-1} \left( \frac{\partial \kappa}{\partial t} \right)_{\nu}^t \right] \left[ \left( \frac{\partial \kappa}{\partial t} \right)_{\nu} \hat{C}^{-1} \hat{H}^{-1} \hat{V}^{-1} (I_0 - I) - (I - K)_{\nu} \right].$$

Подставляя это выражение в (II-2), получим следующую систему уравнений для  $(t-t)$ :

$$\hat{C} (t-t) = \hat{H}^{-1} \hat{V}^{-1} (I_0 - I) + \left( \frac{\partial \kappa}{\partial t} \right)_{\mu}^t \hat{\Sigma}_{\mu\nu}^{-1} \left[ (I - K)_{\nu} - \left( \frac{\partial \kappa}{\partial t} \right)_{\nu} \hat{C}^{-1} \hat{H}^{-1} \hat{V}^{-1} (I_0 - I) \right], \quad (\text{II-3})$$



где через  $\hat{Q}$  обозначена матрица

$$\hat{Q}_{\mu\nu} = \left( \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right)_{\mu}^{\dagger} \hat{C}^{-1} \left( \frac{\partial \kappa}{\partial t} \right)_{\nu}^{\dagger}. \quad (\text{П-4})$$

Структура матриц  $\left( \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right)_{\mu}^{\dagger}$  и  $\left( \frac{\partial \kappa}{\partial t} \right)_{\nu}^{\dagger}$  ясна из (П-4).

Построим вектор  $t$  таким образом, что  $t^{\dagger} = \|\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_N, s_1, s_2, \dots, s_p\|$ .

Тогда, пользуясь блоччатой структурой матриц  $\hat{M}$ ,  $\hat{L}$  и  $\hat{H}$ , а также тем, что между ошибками сечений  $\hat{\sigma}$  - концентраций и размеров  $S$  отсутствуют корреляции для поправок к вектору  $z$ , из (П-3) можно получить выражение

$$(s_1 - \hat{s}) - \hat{M}_s^{\dagger} + \hat{H}_s^{\dagger} \hat{V}^{-1} \hat{H}_s^{\dagger} \left\{ \hat{H}_s^{\dagger} \hat{V}^{-1} (I_0 - I) + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial S} \right)_{\mu}^{\dagger} \hat{\Omega}_{\mu\nu}^{-1} \left[ (I - K)_{\nu}^{\dagger} - \left( \frac{\partial \kappa}{\partial t} \right)_{\nu}^{\dagger} \hat{C}^{-1} \hat{H}^{\dagger} \hat{V}^{-1} (L_0 - I) - \hat{H}_s^{\dagger} \hat{V}^{-1} \hat{H}_s^{\dagger} (\hat{\sigma}' - \hat{\sigma}) \right] \right\}. \quad (\text{П-5})$$

Подставляя (П-5) в уравнение для  $\hat{\sigma}$  из (П-3), получим систему уравнений для поправок к сечениям:

$$\left\{ \hat{M}_s^{\dagger} + \hat{H}_s^{\dagger} \hat{V}^{-1} \hat{H}_s^{\dagger} \left[ \hat{E} - \hat{H}_s^{\dagger} (\hat{M}_s^{\dagger} + \hat{H}_s^{\dagger} \hat{V}^{-1} \hat{H}_s^{\dagger})^{-1} \hat{H}_s^{\dagger} \hat{V}^{-1} \hat{H}_s^{\dagger} \right] (\hat{\sigma}' - \hat{\sigma}) - \hat{H}_s^{\dagger} \hat{V}^{-1} \left[ \hat{E} - \hat{H}_s^{\dagger} (\hat{M}_s^{\dagger} + \hat{H}_s^{\dagger} \hat{V}^{-1} \hat{H}_s^{\dagger})^{-1} \hat{H}_s^{\dagger} \hat{V}^{-1} \hat{H}_s^{\dagger} \right] (I_0 - I) \right\} \hat{\Omega}_{\mu\nu}^{-1} \left[ (I - K)_{\nu}^{\dagger} - \left( \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right)_{\nu}^{\dagger} \hat{C}^{-1} \hat{H}^{\dagger} \hat{V}^{-1} (L_0 - I) \right]. \quad (\text{П-6})$$

Уравнение (П-6) можно существенно упростить, если рассматривать только те эксперименты, в которых достаточно хорошо определены условия их проведения, т.е.

$$|\hat{H}_s^{\dagger} \hat{M}_s^{\dagger} \hat{H}_s^{\dagger}| \ll |\hat{V}|; |\hat{H}_s^{\dagger} \hat{M}_s^{\dagger} \hat{H}_s^{\dagger}| \ll |\hat{H}_s^{\dagger} \hat{M}_s^{\dagger} \hat{H}_s^{\dagger}|. \quad (\text{П-7})$$

Тогда, пользуясь для обращения матриц  $\hat{C}$  и  $\hat{C}_s = \hat{M}_s^{\dagger} + \hat{H}_s^{\dagger} \hat{V}^{-1} \hat{H}_s^{\dagger}$  леммой, доказанной, например, в работе [12], для  $\hat{\Omega}$  можно получить выражение

$$\hat{\Omega}_{\mu\nu}^{-1} = \left( \frac{\partial \lambda}{\partial S} \right)_{\mu}^{\dagger} \hat{M}_s^{\dagger} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial S} \right)_{\nu}^{\dagger} + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial S} \right)_{\mu}^{\dagger} \hat{M}_s^{\dagger} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial S} \right)_{\nu}^{\dagger} - \left[ \left( \frac{\partial \kappa}{\partial \sigma} \right)_{\mu}^{\dagger} \hat{M}_s^{\dagger} \hat{H}_s^{\dagger} + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial S} \right)_{\mu}^{\dagger} \hat{M}_s^{\dagger} \hat{H}_s^{\dagger} \right] (\hat{H}_s^{\dagger} \hat{M}_s^{\dagger} \hat{H}_s^{\dagger} + \hat{V})^{-1} \left[ \hat{H}_s^{\dagger} \hat{M}_s^{\dagger} \left( \frac{\partial \kappa}{\partial \sigma} \right)_{\nu}^{\dagger} + \hat{H}_s^{\dagger} \hat{M}_s^{\dagger} \left( \frac{\partial \kappa}{\partial S} \right)_{\nu}^{\dagger} \right], \quad (\text{П-8})$$

а уравнение (П-6) преобразовать к виду

$$\hat{C}_s^{-1} (\hat{\sigma}' - \hat{\sigma}) - \hat{H}_s^{\dagger} \hat{V}^{-1} (L_0 - I) + \left[ \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \right)_{\mu}^{\dagger} - \hat{H}_s^{\dagger} \hat{V}^{-1} \hat{H}_s^{\dagger} \hat{M}_s^{\dagger} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial S} \right)_{\mu}^{\dagger} \right] \hat{\Omega}_{\mu\nu}^{-1} (I - K)_{\nu}^{\dagger} - \left[ \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \right)_{\mu}^{\dagger} - \hat{H}_s^{\dagger} \hat{V}^{-1} \hat{H}_s^{\dagger} \hat{M}_s^{\dagger} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial S} \right)_{\mu}^{\dagger} \right] \hat{\Omega}_{\mu\nu}^{-1} \left[ \left( \frac{\partial \kappa}{\partial \sigma} \right)_{\nu}^{\dagger} \hat{M}_s^{\dagger} \hat{H}_s^{\dagger} + \left( \frac{\partial \kappa}{\partial S} \right)_{\nu}^{\dagger} \hat{M}_s^{\dagger} \hat{H}_s^{\dagger} \right] \times \left[ \hat{E} - (\hat{H}_s^{\dagger} \hat{M}_s^{\dagger} \hat{H}_s^{\dagger} + \hat{V})^{-1} \hat{H}_s^{\dagger} \hat{M}_s^{\dagger} \hat{H}_s^{\dagger} \right] \hat{V}^{-1} (I_0 - I). \quad (\text{П-9})$$

Используя (П-8) для определения ковариационной матрицы поправленных сечений  $\hat{M}'_{\hat{\sigma}}$  получим

$$\hat{M}'_{\hat{\sigma}} = E \left[ (\hat{\sigma}' - \hat{\sigma}) (\hat{\sigma}' - \hat{\sigma})^{\dagger} \right] = -\hat{C}_s^{-1} - \hat{C}_s^{-1} \left[ \left( \frac{\partial \kappa}{\partial \sigma} \right)_{\mu}^{\dagger} - \hat{H}_s^{\dagger} \hat{V}^{-1} \hat{H}_s^{\dagger} \hat{M}_s^{\dagger} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial S} \right)_{\mu}^{\dagger} \right] \hat{\Omega}_{\mu\nu}^{-1} \left[ \left( \frac{\partial \kappa}{\partial \sigma} \right)_{\nu}^{\dagger} - \left( \frac{\partial \kappa}{\partial S} \right)_{\nu}^{\dagger} \hat{M}_s^{\dagger} \hat{H}_s^{\dagger} \hat{V}^{-1} \hat{H}_s^{\dagger} \right] \hat{C}_s^{-1}. \quad (\text{П-10})$$

Здесь для  $\hat{C}_s^{-1}$  можно использовать выражение

$$\hat{C}_s^{-1} = \hat{M}_s^{\dagger} - \hat{M}_s^{\dagger} \hat{H}_s^{\dagger} (\hat{H}_s^{\dagger} \hat{M}_s^{\dagger} \hat{H}_s^{\dagger} + \hat{V})^{-1} \hat{M}_s^{\dagger} \hat{H}_s^{\dagger}. \quad (\text{П-11})$$

Заметим, что для ковариационной матрицы скорректированных констант в случае, если условия (П-7) не выполняются, можно, воспользовавшись (П-6), получить выражение, аналогичное (П-10), в котором матрица  $V$  в (П-11) заменена на

$$\hat{V} \left\{ \hat{E} - \hat{H}_s (\hat{M}_s^{-1} + \hat{H}_s^{-1} \hat{V}^{-1} \hat{H}_s)^{-1} \hat{H}_s^{-1} \hat{V}^{-1} \right\}^{-1} = \hat{V} \Lambda. \quad (\text{П-12})$$

Из (П-3) для полной матрицы скорректированных параметров можно получить

$$\begin{aligned} \hat{M}' &= \left[ \hat{E} - \hat{C}^{-1} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right)'_u \Omega'_{uv} \left( \frac{\partial \Lambda'}{\partial t} \right)'_v \right] \hat{C}^{-1} \left[ E - \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right)'_u \Omega'_{uv} \left( \frac{\partial \Lambda'}{\partial t} \right)'_v \right] C^{-1} = \\ &= \hat{C}^{-1} \left[ E - \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right)'_u \Omega'_{uv} \left( \frac{\partial \Lambda'}{\partial t} \right)'_v \right] C^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{П-13})$$

### Л и т е р а т у р а

- I. Rowlands J.L., MacDougall J.D. The use of integral measurements to adjust cross-sections and predict reactor properties. - Report 1.16 of BNES Intern. Conf. on Phys. of Fast Reactor Oper. and Dev., 1966.
2. Ballance B.M.O. e.a. The optimization of neutron cross-section data adjustments to give agreement with spectrum measurements of the centre of critical systems. - Report 1.13. Ibid.
3. Dragt Jan.B. Statistical consideration and techniques for adjustment of differential cross sections with measured integral parameters. Труды советско-бельгийско-голландского симпозиума по физике быстрых реакторов. (Мелекесс, 1972.)
4. Усачев Л.Н., Бобков Ю.Г. Последовательное планирование интегральных экспериментов и эффективный метод подгонки констант с учетом коррекции погрешностей совокупности микроскопических измерений. - Сб. "Ядерные константы". Вып.10. М., Атомиздат, 1972, с.3.
5. Антонова Л.В. и др. Уточнение ядерных данных для быстрых реакторов на основе анализа результатов интегральных экспериментов. - Доклад на советско-индийском семинаре по физике быстрых реакторов. (Бомбей, декабрь 1972.)
6. Ваньков А.А. Некоторые важные вопросы анализа реакторно-физических данных. М., ФЭИ, 1973.
7. Усачев Л.Н. Теория возмущений для коэффициента воспроизводства и других отношений чисел процессов в реакторе. - "Атомная энергия", 1972, т.15, вып.6, с.472.
8. Абагян А.А. и др. Доклад P/656 (СССР), представленный на Первую международную конференцию по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1955).
9. Зарицкий С.М. и др. Использование макроскопических экспериментов для коррекции констант и уточнения расчета быстрых реакторов. - Доклад на советско-шведском симпозиуме. (Дубна, 1972.)
10. Усачев Л.Н., Зарицкий С.М. Вычисление вариаций времени жизни нейтронов, реактивности, вносимой образцом, и эффективной доли запаздывающих нейтронов при помощи теории возмущения. - Бюллетень информационного центра по ядерным данным, 1965, вып.2, с.242.
11. Ваньков А.А., Воробьев А.И. Уточнение групповых констант и расчетных значений функционалов в результате ряда экспериментов на критических сборках БЭС. М., ФЭИ, 1972.
12. Федоров В.В. Последовательные методы планирования экспериментов при изучении механизма явлений. - Сб. "Новые идеи в планировании экспериментов". М., "Наука", 1969, с.257.

К ВОПРОСУ О КОРРЕКЦИИ СЕЧЕНИЙ ПО ДАННЫМ  
ИНТЕГРАЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ  
А.А.Ваньков, А.И.Воропаев

В последнее время теме статистической корректировки ядерных констант уделяется большое внимание как в методическом, так и практическом плане (см., например, [1-6]). В отдельных работах делается, по нашему мнению, спорная попытка усовершенствовать метод (алгоритм) корректировки по сравнению с предложенным в более ранних работах [1]. Именно такой представляется публикуемая в настоящем сборнике статья "О коррекции сечений по данным интегральных экспериментов" [6]. Постановка вопросов в этой статье заслуживает детального рассмотрения и обсуждения, поскольку в них затрагивается физический смысл результатов корректировки. Эти вопросы следующие:

1. Как при корректировке сечений  $\sigma$  избавиться от неопределенностей технологических параметров в  $\{R, \rho\}$  (размеров, ядерных концентраций), если эти неопределенности не слишком малы? При этом делается оговорка, что совместную корректировку  $\sigma$  и  $v$  проводить не следует, поскольку задача корректировки становится более громоздкой. Далее в статье неопределенность  $v$  трактуется в широком смысле: она включает в себя также неопределенность поправок на отличие реальной критической сборки от ее приближенной расчетной модели.

По словам авторов статьи [6], возникли "проблемы", якобы решаемая формулами (9) - (14). По нашему мнению, они не учитывают того факта, что неопределенность  $v$  обуславливает одну из компонент ковариационной матрицы  $\hat{V}$  вектора измеряемых величин  $I$ . Данная компонента есть (в обозначениях авторов [6])  $n_B^+ \hat{M}_B n_B$ . По существующей теории она должна быть включена в  $\hat{V}$  в качестве одного из слагаемых. В этих условиях результат корректировки одних лишь сечений получится именно такой, какой хотят авторы статьи [6]: он полностью совпадает с результатом совокупной корректировки  $\sigma$  и  $v$ . Этот факт легко доказывается в рамках существующего алгоритма корректировки, выражаемого формулами

$$\hat{M}' = \hat{M} - A^+ \hat{W} A;$$

$$\delta \sigma = A^+ \hat{W} \delta I,$$

где  $M'$ ,  $\delta \sigma$  - результат корректировки вектора сечений с ковариационной матрицей  $\hat{M}$ ;  $\delta I$  - расхождение эксперимента и расчета.

Здесь введены обозначения  $A = n^+ \hat{M}$  и  $\hat{W} = (\hat{V} + n^+ \hat{M} n)^{-1}$ .

Доказательство состоит в следующем. Пусть расширенный вектор корректируемых параметров есть  $v = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \rho \end{Bmatrix}$ . Тогда

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \hat{M}_G & 0 \\ 0 & \hat{M}_B \end{pmatrix};$$

$$\Lambda = (H_G^T \hat{M}_G, H_B^T \hat{M}_B);$$

$$\hat{W} = (\hat{V} + H_G^T \hat{M}_G H + H_B^T \hat{M}_B H_B)^{-1}.$$

Как видно, матрица  $\hat{W}$  не зависит от того, включаем ли мы неопределенность  $\beta$  в ковариационную матрицу эксперимента в виде скалярного  $H_G^T \hat{M}_G H$  или в ковариационную матрицу корректируемых параметров в виде диагональной "матрицы"  $\hat{M}_B$  при совокупной корректировке  $\beta$  и  $\alpha$ . В последнем случае имеем

$$\begin{pmatrix} \hat{M}_G & \hat{M}_G \hat{\alpha} \\ \hat{M}_G \hat{\alpha} & \hat{M}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{M}_G & 0 \\ 0 & \hat{M}_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{M}_G H_G \hat{W} H_G^T \hat{M}_G & \hat{M}_G H_G \hat{W} H_B^T \hat{M}_B \\ \hat{M}_G H_G \hat{W} H_B^T \hat{M}_B & \hat{M}_B H_B \hat{W} H_B^T \hat{M}_B \end{pmatrix};$$

$$\delta \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{M}_G H_G \\ \hat{M}_B H_B \end{pmatrix} \hat{W} \delta I,$$

откуда видно, что результат корректировки сечения  $\beta$  в обоих вариантах один и тот же. Таким образом, нет необходимости усовершенствовать алгоритм корректировки сечений с целью учета технологических неопределенностей. Последующие вопросы статьи [6] разворачиваются вокруг тезиса о необходимости такого усовершенствования.

2. Как в процессе корректировки учесть условие критичности? Авторы [6] хотят показать, что величину  $K_{эфф}$  не следует включать в список подгоняемых функционалов (хотя в большинстве работ по корректировке сечения  $K_{эфф}$  включается в подобный список). Последующее разъяснение в § 1 этого утверждения фактически сводится к его отрицанию. Разъяснение же сводится к тому, что корректировать сечения  $\beta$  следует вместе с  $\alpha$  при условии  $K_{эфф} = 1$  (т.е. решать задачу на условный экстремум методом множителей Лагранжа). Это полностью эквивалентно включению  $K_{эфф}$  в подгонку. "Усовершенствование" опять состоит лишь в совместности корректировки  $\beta$  и  $\alpha$ .

Желание авторов [6] усовершенствовать алгоритм легко понять из текста статьи. Они усматривают противоречие в том, что факт критичности в эксперименте устанавливается очень точно, а в обычной процедуре подгонки величине  $K_{эфф}$  приписывается ошибка, обусловленная неопределенностью расчетной модели. Именно поэтому они видят выход в переводе модельных  $\alpha$ -параметров в разряд корректируемых. Тогда  $K_{эфф}$  в подгонке трактуется как точная величина. Однако при таком формальном рассмотрении упущено то обстоятельство, что  $\alpha$ -параметры практически индивидуальны для каждой сборки (и даже для каждого вида функционалов). Следовательно, их корректировка не ведет к уточнению предсказанных характеристик реактора. Корректировать  $\alpha$ -параметры (в основном подразумевается радиус активной зоны) физически неоправданно: весь эффект заключается в появлении формальной корреляции  $\beta$  и  $\alpha$ .

Правда, роль модельных погрешностей уменьшается в подходе "переноса" - при расчете моделирующей сборки и реактора одним методом. Но этот подход касается интерпретации моделирующих экспериментов и имеет отдаленное отношение к задаче корректировки констант на основе "чистых" экспериментов. В проблеме корректировки необходимо добиваться адекватности эксперимента и расчета, совершенствуй то и другое, а не корректировать поправки вместе с константами, как предложено в статье.

3. Основной вывод состоит в том, что проводить корректировку технологических параметров совместно с сечениями физически не целесообразно, хотя формально такая совместная корректировка возможна в рамках известного алгоритма. В связи с этим возникает вопрос об интерпретации полученных в работе [6] новых формул корректировки. Их физический смысл, на наш взгляд, трудно установить, поскольку математический вывод содержит ошибочность исходных посылок. В частности, можно оспаривать возможность двух уровней приближений, обсуждавшихся в § 4 работы [6]. Дело в том, что рассматриваемые функционалы являются линейными по  $\alpha$  и возможен лишь один критерий малости  $H_G^T \hat{M}_G H$  по сравнению с  $H_B^T \hat{M}_B H_B$ .

Вопросам, относящимся к теории и практике статистического анализа интегральных данных, безусловно, следует уделять большее внимание, потому что эти вопросы затрагивают деятельность разных специалистов по освоению атомной энергии. Успех этой деятельности будет зависеть, следовательно, от ясности в теории корректировки и "переноса" и в других общих вопросах использования экспериментальной информации.

#### Л и т е р а т у р а

1. Dragt I.B. . Труды трехстороннего советско-бельгийско-голландского симпозиума по проблемам физики быстрых реакторов (15-21 ноября), Мелкерсес, 1969.
2. Campbell C.G., Rowlands I.L. Second Internat. Conf. Nuclear. Data for Reactors. (Helsinki, 15-19 June 1970). Conf. Proc., v.II. Vienna, IAEA, 1970, p.391.
3. Gandini A., Petilli M., Solvatores M. Internat. Symposium on Physics of Fast Reactors (Tokio, 16-23 October 1973). Conf. Proc., v.1, Tokio, 1973, p.629.
4. Усачев Л.Н., Бобков М.Г. в кн.: "Нейтронная физика" (материалы Всесоюзного совещания), ч.И. Киев, "Наукова думка", 1971, с.139.
5. Ваньков А.А., Зоропаев А.И. Препринт ФЭИ-474. Обнинск, 1973.
6. Николаев М.М., Рязанов Е.Г. См. настоящий сборник, с.21.

## ЧИСЛЕННАЯ КОМПЕНСАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИСКАЖЕНИЙ ПРИ РЕГИСТРАЦИИ СИГНАЛОВ

А.А.Грешинлов, В.Ф.Махонин

В физическом эксперименте для визуальных наблюдений часто используют осциллографы или подобные им приборы, когда по вертикали на экране откладывается интенсивность сигнала, а по горизонтали - ось времени (при прямоугольной системе координат). Известно, что прибор стремятся сконструировать так, чтобы получить наименее искаженные сигналы. Если сигнал проходит дальнейшую обработку на цифровых вычислительных устройствах, иногда целесообразно не добиваться точного совмещения декартовой и проекционной осей, а, подавая на вход прибора калибрационные сигналы, получить на экране их искаженные изображения. Используя эти сигналы и их изображения и производя соответствующие вычисления, можно получить неискаженные значения параметров исследуемого сигнала, т.е. осуществить обратное преобразование координат. Такой способ обработки сигналов был разработан и применен для сигналов, регистрируемых на фотопленку с экрана осциллографа. Расчетные работы производились с использованием вычислительной машины "Мин-5".

Задача восстановления исходного сигнала по его искаженной записи относится к числу обратных. Обратные задачи разрешимы в том случае, если существует обратное преобразование. Пренебрегая влиянием энергоемких элементов измерительного устройства, автор ограничил класс преобразований рассмотрением уравнений безинерционной проекционной системы. В этом случае положение точки на экране осциллографа  $(x, y)$  определяется известными значениями сигналов, подаваемых на входы усилителей горизонтального и вертикального отклонений. Когда преобразование  $x = x(u, v)$  и  $y = y(u, v)$  ( $x$  - абсцисса,  $y$  - ордината точки записи;  $u, v$  - отклоняющие сигналы) неустойчиво и двусторонне в прямом и обратном направлениях, то задачу можно считать решенной, если определен вид функции обратного преобразования  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$ . Такая функция можно построить экспериментально, но для этого необходима длительная серия измерений в большом числе точек, что заняло бы много времени, и результаты этих измерений обесценились бы к моменту их окончания из-за влияния нестабильностей различных элементов измерительных цепей, таких, как нестабильность источников питания, коэффициентов усиления усилителей и т.п. Чтобы исключить это влияние на правильность полученных результатов, необходимо одновременно регистрировать исследуемый сигнал и калибрационные сигналы, подаваемые на входы измерительного прибора. Обратное преобразование  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$  определяется значениями этих калибрационных сигналов в отдельных точках экрана; расположение последних связано с выбором класса преобразования. Существуют два пути: путь, при котором формула преобразований справедлива для любого участка экрана регистрирующего прибора, и путь, при котором экран разделяется на отдельные участки и для каждого участка применяется своя локальная формула преобразований. Первый путь связан с применением интерполяционных формул высоких степеней, что осложняет процесс вычислений (кроме того, использование таких формул затруднено из-за высокой точности, обусловленной ограниченной разрешающей способностью приборов, в частности толщиной луча). В данной работе был выбран второй путь, обеспечивающий простой и четкий алгоритм, но требующий большого числа отдельных однотипных вычислений, так как при нем используется густая сетка калибрационных точек с шагом, определенным разрешающей способностью прибора и максимальными нелинейными искажениями в нем. Однако этот путь дает возможность существенно упростить каждое такое вычисление, поэтому объем всех вычислений значительно уменьшается, что обеспечивает экономию машинного времени.

Для решения задачи восстановления сигнала были использованы известные из аналитической геометрии свойства аффинных преобразований [1, 2]. Обратное преобразование для каждой точки сигнала определяется только тремя соседними калибровочными точками, которые являются вершинами некоторого треугольника; при этом внутри каждого такого треугольника используется своя формула обратных преобразований. Размер каждого треугольника выбирается достаточно малым, поэтому сглаживание преобразований при переходе с одного треугольника к другому не производится, так как поправки на сглаживание теряют смысл из-за конечной толщины луча. Следовательно, если в пределах треугольника из-за ограниченной разрешающей способности прибора нельзя отличить прямую линию от дуги  $P$ , то можно считать стороны любого треугольника прямыми и использовать свойства аффинных преобразований, которые сохраняют прямолинейность линии. Эти преобразования локальны, так как меняют свои параметры от треугольника к треугольнику.

Таким образом, основная идея решения обратной задачи состоит в следующем. В поле зрения набора калибровочных сигналов с известными значениями  $u_j$  и  $v_j$

$[u_1 = u_0 + i \Delta u, v = v_0 + j \Delta v (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)]$  на выходе регистрирующего прибора получают сетку точек; это должно происходить практически одновременно с регистрацией графика  $y(x)$  исследуемого сигнала  $v(u)$ , чтобы исключить влияние нестабильностей элементов измерительной системы. Для восстановления вида функции  $v(u)$ , т.е. исследуемого сигнала, каждая точка графика сигнала  $y(x)$  преобразуется независимо от остальных. При нахождении координат этой точки определяется, в какой треугольник она попала, после чего по формуле, принятой для этого треугольника, из системы  $x, y$  она переводится в систему  $u, v$ .

Аффинные преобразования сохраняют отношение площадей преобразованных фигур. Из этого свойства следует, что, если соединить некоторую точку внутри треугольника с его вершинами, отношение площадей образовавшихся малых треугольников к площади охватываемого треугольника является инвариантом аффинных преобразований. Эти отношения и являются так называемыми барицентрическими координатами точки, лежащей внутри треугольника. Барицентрические координаты обычно используются в механике, где они указывают, какие веса нужно сосредоточить в вершинах треугольника, чтобы центр тяжести получившейся при этом статической системы совпадал бы с намеченной точкой [3]. Координаты центра тяжести определяются просто: координаты вершин треугольника умножаются на относительные веса, т.е. на отношения площадей треугольников, производения складываются.

При решении данной задачи на первом этапе вычислений определяются барицентрические координаты путем вычисления площадей на плоскости  $x, y$ . При этом используются известные формулы для определения площади треугольника через координаты вершин [4]. Введем следующие обозначения:  $x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C$  — координаты вершин треугольника;  $x_K, y_K$  — координаты точки внутри треугольника;  $D_A$  — площадь треугольника СКВ;  $D_B$  — площадь треугольника АКС;  $D_C$  — площадь треугольника АКВ;  $D$  — площадь треугольника АВС.

Тогда барицентрические координаты  $m_A, m_B$  и  $m_C$  найдем из системы уравнений

$$\begin{aligned} x_K &= m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C; \\ y_K &= m_A y_A + m_B y_B + m_C y_C; \quad 1 = m_A + m_B + m_C, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $m_A = \frac{D_B}{D}$ ;  $m_B = \frac{D_C}{D}$ ;  $m_C = \frac{D_A}{D}$ .

Переходя к следующему этапу вычислений, определим истинные значения координат точки в плоскости  $u, v$  из системы уравнений, которую мы вправе теперь записать в виде равенств

$$\begin{aligned} u_K &= m_A u_A + m_B u_B + m_C u_C; \\ v_K &= m_A v_A + m_B v_B + m_C v_C. \end{aligned} \quad (2)$$

Применение барицентрических координат дает преимущества при счете. При определении треугольника, внутри которого находится заданная точка  $K$ , используется следующее свойство барицентрических координат: если  $m_A, m_B$  и  $m_C > 0$ , то точка находится

либо внутри треугольника, либо на одной из его сторон; если же одно из условий не выполняется, то точка лежит вне его пределов. Такая проверка очень проста и дает сокращение объема вычислений при счете на ЭВМ.

Следует упомянуть о выборе шага калибровки. Расстояние между соседними точками, или шаг калибровки, определяется: нелинейными искажениями регистрирующего прибора, или, иначе, минимальным радиусом кривизны линий калибрационной сетки; разрешающей способностью прибора, например толщиной луча.

Пусть  $R$  и  $\alpha$  — соответственно радиус кривизны и разрешающая способность прибора, а  $a$  и  $b$  — хорда и стрелка окружности радиуса  $R$ ,  $\alpha \approx b$ . Принимая шаг калибровки равным хорде  $a$ , можно определить его из известных формул и таблиц [4].

На основании сказанного выше алгоритм рассматриваемой задачи представляется следующим образом:

- задаваясь шагом калибровки, определяют сетку калибрационных сигналов на плоскости  $u, v$ ;
- находят координаты соответствующих точек сетки на плоскости  $x, y^*$ ;
- определяют координаты точек сигнала  $x[k], y[k]$ ;
- для каждой точки сигнала определяют треугольник, внутри которого находится эта точка;
- по известным координатам вершин треугольника и точки сигнала находят барицентрические координаты из системы уравнений (1);
- по найденным для каждой точки барицентрическим координатам из системы (2) определяют соответствующие точки восстановленного сигнала.

На основании описанного алгоритма была составлена программа на языке АЛГОЛ-60 для вычислений на машине "Минск-22" (см. приложение). Приняты следующие обозначения:

- $uu, vv$  — координаты точек прямолинейной сетки;
- $xx, yy$  — координаты точек искаженной сетки;
- $n, m$  — число точек пересечений сетки соответственно по осям  $xx(uu), yy(vv)$ ;
- $i, j$  — индексы точек пересечения;
- $u, v$  — координаты точек неискаженного сигнала;
- $x, y$  — координаты точек искаженного сигнала;
- $e$  — число точек сигнала;
- $k$  — индекс точки сигнала.

Остальные обозначения соответствуют упомянутым в тексте.

Исследовалось влияние толщины луча ЭЛТ на полученные результаты; при этом в исходные данные вводились ошибки, равные половине толщины луча —  $\Delta b$ . Ошибки в результатах счета оказались порядка  $\Delta b$ .

---

\* Координаты сетки и точек сигнала определяют в прямоугольной системе координат.



Программа для вычислительной машины "Минск-22"

```

'BEGIN' 'REAL'  XxA, XxB, XxC, XxD, yYA, yYB, yYc, yYD,
                uUA, uUB, uUC, uUD, vVA, vVB, vVC, vVD,
                D, DA, DB, DC, DD, MA, MB, MC, MD.,
'INTEGER' L, N, M, K, I, J.,
STANDARD ("1", L, N, M).,
'BEGIN' 'ARRAY' X, Y, U, V(I:U), uU, vV, xX, yY(I:N, 1:M).,
STANDARD ("1", X, Y, uU, vV, xX, yY).,
STANDARD ("2", X, Y, uU, vV, xX, yY)., 'FOR' K:=1 'STEP' 1
    'UNTIL' L 'DO'
    'BEGIN' I:=0.,
    R:I:=I+1., J:=0.,
    T:J:=J+1.,
    'IF' J(=M-1 'THEN' 'GOTO' S 'ELSE' 'GOTO' R.,
S: 'IF' ((X(I, J) (=X(I, K) & X(I, K) (=X(I+1, J))) & (X(I,
    J+1) (=X(I, K) & X(I, K) (=X(I+1, J+1)))) & ((Y(I, J)
    (=Y(I, K) & Y(I, K) (=Y(I+1, J))) & (Y(I, J+1) (=Y(I, K) &
    Y(I, K) (=Y(I+1, J+1)))) 'THEN' 'GOTO' P 'ELSE' 'GOTO' T.,
P: XxA:=X(I, J)., XxD:=X(I, J+1)., XxB:=X(I+1, J+1).,
    XxC:=X(I+1, J).,
    yYA:=yY(I, J)., yYD:=yY(I, J+1)., yYB:=yY(I+1, J+1).,
    yYc:=yY(I+1, J).,
    uUA:=uU(I, J)., uUD:=uU(I, J+1)., uUB:=uU(I+1, J+1).,
    uUC:=uU(I+1, J).,
    vVA:=vV(I, J)., vVD:=vV(I, J+1)., vVB:=vV(I+1, J+1).,
    vVC:=vV(I+1, J).,
    STANDARD ("2", XxA, XxD, XxB, XxC, yYA, yYB, yYD, yYc, uUA,
    uUD, uUB, uUC, vVA, vVD, vVB, vVC)., D:=XxA*(yYB-yYc)+
    XxB*(yYc-yYA)+XxC*(yYA-yYB).,
    DA:=XxB*(yYc-y(I, K))+XxC*(y(I, K)-yYB)+X(I, K)*(yYB-yYc),
    DB:=XxA*(y(I, K)-yYc)+XxC*(yYA-y(I, K))+X(I, K)*(yYc-yYA).,
    DC:=XxA*(yYB-y(I, K))+XxB*(y(I, K)-yYA)+X(I, K)*(yYA-yYB).,
    MA:=DA/D., MB:=DB/D., MC:=DC/D.,
    'IF' (MA(=)0 & MB(=)0 & MC(=)0 'THEN'
    'BEGIN' U(I, K):=MA*uUA+MB*uUB+MC*uUC.,
    V(I, K):=MA*vVA+MB*vVB+MC*vVC.,
    'END'
    'ELSE' 'BEGIN' D:=XxA*(yYD-yYB)+XxD*(yYB-yYA)
        +XxB*(yYA-yYD).,
    DA:=XxB*(y(I, K)-yYD)+X(I, K)*(yYD-yYB)+XxD*(yYB-y
        -y(I, K).,
    DB:=XxA*(yYD-y(I, K))+XxD*(y(I, K)-yYA)+X(I, K)*(yYA-
        -yYD).,
    DD:=XxA*(y(I, K)-yYB)+X(I, K)*(yYB-yYA)+XxB*(yYA-
        -y(I, K).,
    MA:=DA/D., MB:=DB/D., MD:=DD/D.,
    U(I, K):=MA*uUA+MB*uUB+MD*uUD.,
    V(I, K):=MA*vVA+MB*vVB+MD*vVD.,
    'END' 'END'., STANDARD ("2", U, V).,
    'END' 'END'

```

#### Л и т е р а т у р а

1. Модонов П.С., Пархоменко А.С. Геометрические преобразования. М., изд.МГУ, 1961.
2. Яглом И.М., Ашкингуз В.Г. Идеи и методы аффинной и проективной геометрии. Ч.1. М., Учпедгиз, 1962.
3. Балк М.Б. Геометрические приложения понятия о центре тяжести. М., Физматгиз, 1959.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М., Физматгиз, 1962.

РЕКУРРЕНТНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПРОЕКТИРОВАННОГО БАЗИСА ЭЛЛИОТТА  
(ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПЕРЕКРЫВАНИЯ И НОРМИРОВОК БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ)

Р.М.АшEROVA, К.Ф.СМИРНОВ

Задача трех тел [1, 2] и схема  $SU(3)$  Эллиотта [3, 4] в модели ядерных оболочек обладают симметрией  $SU(3)$  и сферической симметрией  $SO_3(3)$ . Поэтому проблема построения базисных волновых функций этих задач состоит в конструировании базиса неприводимых представлений (НП)  $(\lambda\mu)$  группы  $SU(3)$  в неканонической редукции  $SU(3) \supset SO_3(3)$  (физический базис).

В работах [5, 6] исследовались структура проектированного базиса, соответствующего редукции  $SU(3) \supset SO_3(3)$ , и свойства дополнительного интеграла движения  $\Omega$ , вводимого для однозначной классификации базисных векторов. Были получены аналитические формулы для матричных элементов генераторов группы, интегралов перекрытия  $A(K, L, K')$  и нормировок  $a(L, K) = \sqrt{A(K, L, K')}$  спроектированных функций  $[(\lambda\mu) \text{ НП}] \equiv \Psi_{LMK}$ . Однако для проведения конкретных расчетов в таком физическом базисе полезно иметь таблицы значений величин  $A(K, L, K')$  и  $a(L, K)$  для большого числа НП  $(\lambda\mu)$  [например, для всех  $(\lambda\mu)$ , встречающихся среди низших состояний ядер  $s-d$ -оболочки]. С этой целью в настоящей работе на основе полученных ранее результатов [5, 6] развит рекуррентный метод вычисления интегралов перекрытия  $A(K, L, K')$  и нормировок  $a(L, K)$  базисных функций  $\Psi_{LMK}$  для произвольного НП  $(\lambda\mu)$  и всех возможных значений  $K, L, K'$ . Программа расчета этих величин написана на языке АЛГОЛ-60 для транслятора ТА-1М. Вычисления проводились на ЭВМ М-222. Ниже приведены рабочие формулы и дано краткое описание программы расчета величин  $A(K, L, K')$ .

Результаты вычислений ненормированных величин  $A(K, L, K')$  и нормированных

$$A_n(K, L, K') = \frac{A(K, L, K')}{a(L, K) a(L, K')}$$

представлены в табл. 1 и 2 для НП  $(\lambda\mu)$ ,  $\lambda + \mu \leq 12$ , которые встречаются в таблицах классификации низших состояний ядер  $s-d$ -оболочки. Однако программа позволяет рассчитывать любые величины  $A(K, L, K')$  для произвольных квантовых чисел  $(\lambda\mu)$ . Приведена также классификация состояний  $[(1d-2s)^n [1] (\lambda\mu)]$  конфигурации  $(1d-2s)^n$  ядер  $s-d$ -оболочки в схеме  $SU(6) \supset SU(3)$ , полученная различными методами в работах [7, 8] (табл.3).

Таблицы величин  $A(K, L, K')$  при больших значениях квантовых чисел  $\lambda$  (или  $\mu$ ) дают возможность провести дальнейшее исследование асимптотических свойств проектированного базиса.

Рабочие формулы для расчета интегралов перекрытия и нормировок базисных функций.

Векторы вида

$$\Psi_{LMK} = \frac{1}{a(L, K)} P_{MK}^L \Phi_K, \quad (1)$$

где  $K = \mu, \mu-2, \dots, 1$  или  $0$ ;

$L = K, K+1, \dots, K+\lambda, K \neq 0$ ;

$L = \lambda, \lambda-2, \dots, 1$  или  $0, K = 0$ ,

образуют физический базис НП  $(\lambda\mu)$  группы  $SU(3)$ . В формуле (1)  $\Phi_K = A_{32}^{1/2(\mu-K)} \Phi_\mu$  - функции канонического базиса, отвечающего редукции  $SU(3) \supset SU(2)$ ;  $\Phi_\mu$  - старший вектор НП  $(\lambda\mu)$ ;  $P_{MK}^L$  - проекционный оператор для группы  $SO_3(3)$ , его явный вид приведен

в работе [5]. Проектированный базис (I) является полным, но не ортогональным по K (величине K придаст смысл проекции момента L на внутреннюю ось ядра). Интегралы перекрытия  $\Lambda(K, L, K')$  базисных функций  $\varphi_{LMK}$  определяются как матричные элементы проектора  $P_{KK'}^L$ :

$$\Lambda(K, L, K') = \langle \varphi_K | P_{KK'}^L | \varphi_{K'} \rangle;$$

общие аналитические формулы для них получены в работе [5]. Предлагаемый рекуррентный метод расчета величин  $\Lambda(K, L, K')$  состоит в следующем. Согласно результатам работы [5] общее аналитическое выражение для интегралов перекрытия  $\Lambda(K, L, K')$  имеет наиболее простой вид при максимальном  $K = \mu$ :

$$\Lambda(\mu, L, K') = \left[ \frac{(L+K')! (L+\mu)! \mu!}{(L-\mu)! \left(\frac{1}{2}(\mu-K')!\right) \left(\frac{1}{2}(\mu+K')!\right)} \right]^{1/2} \frac{\lambda! (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-K')}}{L! (2L-1)!! 2^{\mu(\lambda+\mu-L)}} \quad (2)$$

$$\times {}_2F_1(-\lambda-\mu+L, L+1-K'; 2L+2; 2).$$

Вспользуемся некоторыми соотношениями, вытекающими из известных свойств гипергеометрической функции  ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$  [9] (см. также работу [5]):

$${}_2F_1(-\lambda-\mu+L, L+1; 2L+2; 2) = \begin{cases} \frac{(\lambda+\mu-L-1)!! (2L+1)!!}{(\lambda+\mu+L+1)!!}, & \lambda+\mu-L - \text{четное,} \\ 0, & \lambda+\mu-L - \text{нечетное;} \end{cases} \quad (3)$$

$${}_2F_1(-\lambda-\mu+L, L; 2L+2; 2) = \begin{cases} \frac{(\lambda+\mu+1)(\lambda+\mu-L-1)!! (2L+1)!!}{(L+1)(\lambda+\mu+L+1)!!}, & \lambda+\mu-L - \text{четное,} \\ \frac{(\lambda+\mu-L)(\lambda+\mu-L-2)!! (2L+1)!!}{(L+1)(\lambda+\mu+L)!!}, & \lambda+\mu-L - \text{нечетное;} \end{cases} \quad (4)$$

$${}_2F_1(-\lambda-\mu+L, L+1-(K'+2); 2L+2; 2) = \frac{1}{L+K'+2} \left[ (\lambda+\mu+2) {}_2F_1(-\lambda-\mu+L, L+1-(K'+1); 2L+2; 2) - (1-K') {}_2F_1(-\lambda-\mu+L, L+1-K'; 2L+2; 2) \right]. \quad (5)$$

Соотношения (3) - (4) определяют функцию  ${}_2F_1$  при  $K=0$  и  $K=1$ , а формулу (5) можно использовать в качестве рекуррентного по K соотношения для нахождения функции  ${}_2F_1(-\lambda-\mu+L, L+1-K'; 2L+2; 2)$ . Таким образом, соотношения (2) - (5) позволяют вычислить величины  $\Lambda(K, L, K')$  при максимальном  $K = \mu$  и всех возможных значениях L и K' для произвольного НП  $(\lambda, \mu)$ . Теперь для вычисления полного набора величин  $\Lambda(K, L, K')$  при произвольных значениях  $K = \mu, \mu-2, \dots, 1$  или 0 нужно найти рекуррентные по K соотношения между  $\Lambda(K, L, K')$ . Перепишем выражение  $\Lambda(K, L, K') = \langle \varphi_K | P_{KK'}^L | \varphi_{K'} \rangle$ , учитывая, что вектор  $\varphi_K$  можно представить в виде

$$\varphi_K = \frac{2}{\sqrt{(\mu-K)(\mu+K+2)}} A_{32} \varphi_{K+2} = \frac{-2}{\sqrt{(\mu-K)(\mu+K+2)}} Q_{2-2} \varphi_{K+2};$$

$$\Lambda(K, L, K') = \frac{-2}{\sqrt{(\mu-K)(\mu+K+2)}} \langle \varphi_{K+2} | Q_{22}^L P_{KK'}^L | \varphi_{K'} \rangle. \quad (6)$$

Подставляя сюда явное выражение для матричного элемента генератора  $Q_{2m}$  [формула (3.4) из работы [6]], получим

$$\Lambda(K, L, K') = \frac{-2}{\sqrt{(\mu-K)(\mu+K+2)}} \sum_{L'} \frac{2L+1}{2L'+1} (LK'2m | L'_1 K'+m) \left\{ \left[ \frac{1}{2} (LK'21 | L'_1 K'+1) \sqrt{(L'-K')(L'+K'+1)} + (LK'20 | L'_1 K') \frac{1}{\sqrt{6}} (2\lambda+\mu) + \frac{1}{2} (LK'2-1 | L'_1 K'-1) \sqrt{(L'+K')(L'-K'+1)} \right] \Lambda(K+2, L', K') - \frac{1}{2} (LK'22 | L'_1 K'+2) \sqrt{(\mu-K')(\mu+K'+2)} \Lambda(K+2, L', K'+2) - \frac{1}{2} (LK'2-2 | L'_1 K'-2) \sqrt{(\mu+K')(\mu-K'+2)} \Lambda(K+2, L', K'-2) \right\}. \quad (7)$$

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{2L+1}{2L'+1} (LK'2m | L'_1 K'+m); \\ H_1 &= \frac{1}{2} (LK'21 | L'_1 K'+1) \sqrt{(L'_1-K')(L'_1+K'+1)} + \frac{1}{\sqrt{6}} (2\lambda+\mu) (LK'20 | L'_1 K') + \\ &\quad + \frac{1}{2} (LK'2-1 | L'_1 K'-1) \sqrt{(L'_1+K')(L'_1-K'+1)}; \\ G_1 &= -\frac{1}{2} (LK'22 | L'_1 K'+2) \sqrt{(\mu-K')(\mu+K'+2)}; \quad M_1 = -\frac{1}{2} (LK'2-2 | L'_1 K'-2) \sqrt{(\mu+K')(\mu-K'+2)}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Здесь индекс  $i$ , равный 1, 2, 3, 4, 5, соответствует значениям  $L_i = L+2, L+1, L, L-1, L-2$ . Перепишем выражение (7) в этих обозначениях:

$$\Lambda(K, L, K') = \sum_1^5 U_i \{ N_i \Lambda(K+2, L_i, K') + G_i \Lambda(K+2, L_i, K'+2) + M_i \Lambda(K+2, L_i, K'-2) \}. \quad (9)$$

Соотношение (7) или (9) может быть использовано для вычисления  $\Lambda(K, L, K')$  как рекуррентное по  $K$  ( $K = \mu - 2, \mu - 4, \dots, 0$  или 1), тогда как выражение (2) определяет  $\Lambda(K, L, K')$  только при  $K = \mu$ . Соотношения (2) - (9) служат рабочими формулами для написания программы расчета величин  $\Lambda(K, L, K')$ . Такой рекуррентный метод расчета величин  $\Lambda(K, L, K')$  представляется достаточно простым и удобным. При составлении программы были учтены некоторые свойства величин  $\Lambda(K, L, K')$ . Например, вычисление  $\Lambda(K, L, K')$  проводилось только при  $K \geq 0, K' \geq 0$ , так как  $\Lambda(K, L, -K') = (-1)^{L+K} \Lambda(K, L, K')$ . Проверкой правильности результатов может служить контроль за выполнением свойства симметрии  $\Lambda(K, L, K') = \Lambda(K', L, K)$ . Результаты вычислений величин  $\Lambda(K, L, K')$  и  $A_{\mu}(K, L, K')$  даны в табл.1, полученной с использованием в программе оператора "Формат". Для сокращения объема таблицы приведены значения нормировочных интегралов и интегралов перекрытия только для линейно независимых векторов, удовлетворяющих условиям (I), и значений квантовых чисел  $(\lambda, \mu)$ ,  $\lambda + \mu \leq 12$ , соответствующих низшим состояниям ядер  $v-d$ -оболочки. Отдельно представлена таблица величин  $\Lambda(K, L, K')$  для  $h(1/2)$ ,  $\lambda \leq 30$  (см. табл.2). Она иллюстрирует доказанное в работе [6] утверждение о том, что при  $\lambda \gg \mu, \lambda \gg L$  функции Эллиотта с разными квантовыми числами  $L$  становятся практически ортогональными.

#### Л и т е р а т у р а

1. Levy-Leblond J.M., Levy-Nahas J. Math.Phys., 1965, v.6, p.1971.
2. Пустовалов В.В., Смородинский Я.А. "Ядерная физика", 1969, т.10, с.1267.
3. Elliott J.P. Proc.Roy.Soc., 1958, v.A245, p.125,562; Elliott J.P., Barber J. Proc.Roy.Soc., 1963, v.A272, p.557.
4. Ishimura M., Arima A. Nucl.Phys., 1973, v.A204, p.229.
5. Asherova R., Smirnov Yu. Nucl.Phys., 1970, v.A144, p.116.
6. Asherova R., Smirnov Yu. Repts of Math.Phys., 1973, v.4, p.83.
7. Ашерова Р.М. Диссертация. НИИЯФ МГУ, 1969.
8. Perez R., Flores J. Nucl.Date, 1968, v.4, p.265.
9. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.Т.1. М., "Мир", 1973.

Таблица I

Интегралы перекрывания базисных функций<sup>2E</sup>

K	L	K'	$A(K, L, K')$	$A_{\mu}(K, L, K')$	K	L	K'	$A(K, L, K')$	$A_{\mu}(K, L, K')$	
(PQ)= ( 0 1)	1	1	1	1,000000	(PQ)= (11 1)	1	1	0,115305	1,000000	
1	1	1	1	1,000000	1	1	1	0,126667	1,000000	
(PQ)= ( 1 1)	1	1	1	0,500000	1	2	1	0,129477	1,000000	
1	1	1	1	0,500000	1	2	1	0,127471	1,000000	
1	2	1	1	0,500000	1	4	1	0,127770	1,000000	
(PQ)= ( 2 1)	1	1	1	0,400000	1	5	1	0,127770	1,000000	
1	1	1	1	0,400000	1	6	1	0,127770	1,000000	
1	2	1	1	0,233333	1	7	1	0,067104	1,000000	
1	3	1	1	0,266667	1	8	1	0,061000	1,000000	
(PQ)= ( 3 1)	1	1	1	0,300000	1	9	1	0,037720	1,000000	
1	1	1	1	0,300000	1	10	1	0,034415	1,000000	
1	2	1	1	0,357143	1	11	1	0,021457	1,000000	
1	3	1	1	0,200000	1	12	1	0,005570	1,000000	
1	4	1	1	0,142857	(PQ)= ( 1 2)	1	1	1	0,000000	
(PQ)= ( 4 1)	1	1	1	0,257143	1	2	2	1,000000	1,000000	
1	1	1	1	0,257143	1	3	2	1,000000	1,000000	
1	2	1	1	0,257143	(PQ)= ( 1 3)	1	1	1	0,400000	
1	3	1	1	0,266667	1	1	1	0,400000	1,000000	
1	4	1	1	0,114286	1	3	3	0,750000	1,000000	
1	5	1	1	0,076190	1	4	3	0,250000	1,000000	
(PQ)= ( 5 1)	1	1	1	0,214286	(PQ)= ( 2 2)	1	1	1	0,742857	1,000000
1	1	1	1	0,277778	1	2	2	0,025714	1,000000	
1	2	1	1	0,227222	1	2	1	0,700000	1,000000	
1	3	1	1	0,181818	1	3	2	-0,074576	-0,174078	
1	4	1	1	0,063492	1	4	2	0,011111	1,000000	
1	5	1	1	0,048544	1	5	2	0,300000	1,000000	
(PQ)= ( 6 1)	1	1	1	0,190476	1	6	2	0,066667	1,000000	
1	2	1	1	0,238095	(PQ)= ( 2 3)	1	1	1	0,257143	1,000000
1	3	1	1	0,247404	1	2	3	0,333333	1,000000	
1	4	1	1	0,155644	1	3	3	0,183333	1,000000	
1	5	1	1	0,117216	1	4	3	-0,037266	-0,121090	
1	6	1	1	0,074670	1	5	3	0,161364	1,000000	
1	7	1	1	0,021337	1	6	3	-0,042400	-0,258473	
(PQ)= ( 7 1)	1	1	1	0,166667	1	7	3	0,166667	1,000000	
1	1	1	1	0,227222	1	8	3	0,213776	1,000000	
1	2	1	1	0,212121	1	9	3	0,123333	1,000000	
1	3	1	1	0,188811	1	10	3	0,036764	1,000000	
1	4	1	1	0,107564	(PQ)= ( 3 3)	1	1	1	0,028571	1,000000
1	5	1	1	0,027222	1	2	3	0,257143	1,000000	
1	6	1	1	0,018648	1	3	3	0,277777	1,000000	
1	7	1	1	0,011189	1	4	3	-0,027124	-0,077787	
(PQ)= ( 8 1)	1	1	1	0,151515	1	5	3	0,111688	1,000000	
1	1	1	1	0,200000	1	6	3	-0,057066	-0,192187	
1	2	1	1	0,217560	1	7	3	0,113300	1,000000	
1	3	1	1	0,167857	1	8	3	-0,043858	-0,321634	
1	4	1	1	0,136757	1	9	3	0,248485	1,000000	
1	5	1	1	0,064646	1	10	3	0,309091	1,000000	
1	6	1	1	0,043278	1	11	3	0,164103	1,000000	
1	7	1	1	0,009946	1	12	3	0,062736	1,000000	
1	8	1	1	0,005850	(PQ)= ( 4 3)	1	1	1	0,15884	1,000000
(PQ)= ( 9 1)	1	1	1	0,136764	1	2	3	0,190476	1,000000	
1	1	1	1	0,192368	1	3	3	0,259740	1,000000	
1	2	1	1	0,195864	1	4	3	0,264545	1,000000	
1	3	1	1	0,184615	1	5	3	-0,016940	-0,059486	
1	4	1	1	0,127077	1	6	3	0,200050	1,000000	
1	5	1	1	0,084116	1	7	3	-0,030901	-0,126360	
1	6	1	1	0,039400	1	8	3	0,065634	1,000000	
1	7	1	1	0,025911	1	9	3	-0,027411	-0,251124	
1	8	1	1	0,005265	1	10	3	0,067537	1,000000	
1	9	1	1	0,003046	1	11	3	-0,028453	-0,372104	
(PQ)= (10 1)	1	1	1	0,125874	1	12	3	0,306465	1,000000	
1	1	1	1	0,174825	1	1	4	0,298051	1,000000	
1	2	1	1	0,195804	1	2	4	0,180708	1,000000	
1	3	1	1	0,167832	1	3	4	0,006580	1,000000	
1	4	1	1	0,144796	1	4	4	0,029970	1,000000	
1	5	1	1	0,085561	1	5	4	0,007326	1,000000	
1	6	1	1	0,062353	(PQ)= ( 6 3)	1	1	1	0,173160	1,000000
1	7	1	1	0,023555	1	2	4	0,216450	1,000000	
1	8	1	1	0,015044	1	3	4	0,238926	1,000000	
1	9	1	1	0,002771	1	4	4	-0,013031	-0,044712	
1	10	1	1	0,001584	1	5	4	0,148352	1,000000	
1	11	1	1	0,001584	1	6	4			

\*  $(PQ) = (\lambda\mu)$ .

K	J	K'	A(K, J, K')	A <sub>M</sub> (K, J, K')	R	J	K'	A(K, J, K')	A <sub>M</sub> (K, J, K')
1	4	3	-0,0200001	-0,0200076	1	9	7	0,0000000	0,0000000
1	5	1	0,1391004	1,0000000	1	9	7	-0,0000000	0,0000000
1	5	3	-0,0274111	-0,168345	1	10	1	0,0000000	0,0000000
1	6	1	0,0360005	1,0000000	1	10	7	-0,0000000	0,0000000
1	6	3	-0,0100000	-0,301511	3	7	7	0,0000000	0,0000000
1	7	1	0,0300000	1,0000000	3	4	7	0,0000000	0,0000000
1	7	3	-0,0170000	-0,413960	3	5	7	0,1950000	1,0000000
3	3	3	0,0350000	1,0000000	3	6	7	0,1340000	1,0000000
3	4	3	0,0260000	1,0000000	3	7	7	0,0000000	1,0000000
3	5	7	0,1000000	1,0000000	3	8	7	-0,0000000	0,0000000
3	6	3	0,1030000	1,0000000	3	9	7	0,0100000	1,0000000
3	7	3	0,0450000	1,0000000	3	10	7	0,0000000	1,0000000
3	8	3	0,0140000	1,0000000	3	11	7	0,0000000	0,0000000
3	9	3	0,0034400	1,0000000	3	12	7	0,0000000	0,0000000
(PQ) = ( 7 3)					(PQ) = ( 0 5)				
1	1	1	0,151515	1,0000000	1	1	1	0,665714	1,0000000
1	2	1	0,013675	1,0000000	3	7	7	0,0000000	0,0000000
1	3	1	0,107164	1,0000000	5	5	5	1,0000000	1,0000000
1	3	3	-0,000101	-0,036187	(PQ) = ( 1 5)				
1	4	1	0,196154	1,0000000	1	1	1	0,320000	1,0000000
1	4	3	-0,0170000	-0,076154	1	2	1	0,400000	1,0000000
1	5	1	0,100000	1,0000000	3	3	7	0,600000	1,0000000
1	5	3	-0,019100	-0,136870	3	4	7	0,000000	1,0000000
1	6	1	0,000000	1,0000000	5	5	5	0,000000	1,0000000
1	6	3	-0,021470	-0,205537	5	6	5	0,100000	1,0000000
1	7	1	0,021000	1,0000000	(PQ) = ( 2 5)				
1	7	3	-0,017000	-0,345787	1	1	1	0,000000	0,0000000
1	8	1	0,000000	1,0000000	1	2	1	0,000000	0,0000000
1	8	3	-0,010000	-0,449555	1	3	1	0,000000	0,0000000
3	3	3	0,722000	1,0000000	1	7	7	-0,000000	-0,0000000
3	4	3	0,720000	1,0000000	3	7	7	0,000000	1,0000000
3	5	3	0,194000	1,0000000	7	4	7	0,000000	1,0000000
3	6	3	0,117000	1,0000000	7	5	7	0,000000	1,0000000
3	7	3	0,050000	1,0000000	7	6	7	-0,100000	0,0000000
3	8	3	0,024000	1,0000000	5	5	5	0,000000	1,0000000
3	9	3	0,007000	1,0000000	5	6	5	0,000000	1,0000000
3	10	3	0,001000	1,0000000	5	7	5	0,000000	1,0000000
3	10	7	0,001000	1,0000000	5	8	5	0,000000	1,0000000
(PQ) = ( 6 3)					(PQ) = ( 3 5)				
1	1	1	0,139000	1,0000000	1	1	1	0,000000	1,0000000
1	7	1	0,106000	1,0000000	1	2	1	0,000000	1,0000000
1	7	3	-0,000000	-0,000000	1	3	1	0,000000	1,0000000
1	7	7	-0,000000	-0,000000	1	7	7	-0,000000	-0,0000000
1	4	1	0,150000	1,0000000	1	4	1	0,000000	1,0000000
1	4	3	-0,017000	-0,062000	1	4	3	-0,000000	-0,0000000
1	5	1	0,140000	1,0000000	3	3	7	0,400000	1,0000000
1	5	3	-0,010000	-0,105381	3	4	7	0,000000	1,0000000
1	6	1	0,065000	1,0000000	3	5	7	0,100000	1,0000000
1	6	3	-0,015000	-0,170000	3	5	5	-0,000000	-0,0000000
1	7	1	0,030000	1,0000000	3	6	1	0,000000	1,0000000
1	7	3	-0,015000	-0,230000	3	6	3	-0,000000	-0,0000000
1	8	1	0,010000	1,0000000	3	6	5	0,000000	1,0000000
1	8	3	-0,007000	-0,303751	5	6	5	0,000000	1,0000000
1	9	1	0,013000	1,0000000	5	7	5	0,000000	1,0000000
1	9	3	-0,000223	-0,480384	5	8	5	0,000000	1,0000000
3	3	3	0,294000	1,0000000	(PQ) = ( 4 5)				
3	4	3	0,260140	1,0000000	1	1	1	0,000000	1,0000000
3	5	3	0,196280	1,0000000	1	7	1	0,000000	1,0000000
3	6	3	0,127000	1,0000000	1	7	3	0,000000	1,0000000
3	7	3	0,071013	1,0000000	1	7	7	-0,000000	-0,0000000
3	8	3	0,033108	1,0000000	1	4	1	0,000000	1,0000000
3	9	3	0,012871	1,0000000	1	4	3	-0,000000	-0,0000000
3	10	3	0,003603	1,0000000	1	5	1	0,000000	1,0000000
3	11	3	0,000801	1,0000000	1	5	3	-0,000000	-0,0000000
(PQ) = ( 9 3)					1	5	5	0,000000	1,0000000
1	1	1	0,125874	1,0000000	3	3	3	0,400000	1,0000000
1	2	1	0,181818	1,0000000	7	4	3	0,000000	1,0000000
1	3	1	0,183566	1,0000000	3	5	3	0,100000	1,0000000
1	3	3	-0,005473	-0,024507	3	5	5	-0,000000	-0,0000000
1	4	1	0,186898	1,0000000	3	6	3	0,000000	1,0000000
1	4	3	-0,011028	-0,051236	3	6	5	-0,000000	-0,0000000
1	5	1	0,119457	1,0000000	3	7	3	0,000000	1,0000000
1	5	3	-0,013544	-0,088636	3	7	5	-0,000000	-0,0000000
1	6	1	0,108303	1,0000000	5	5	5	0,564000	1,0000000
1	6	3	-0,016032	-0,132764	5	6	5	0,200000	1,0000000
1	7	1	0,041309	1,0000000	5	7	5	0,110000	1,0000000
1	7	3	-0,011691	-0,202364	5	8	5	0,000000	1,0000000
1	8	1	0,037731	1,0000000	9	9	7	0,000000	1,0000000
1	8	3	-0,010729	-0,269191					

Продолжение табл. I

K	L	K'	A(K,L,K')	A <sub>н</sub> (K,L,K')	K	L	K'	A(K,L,K')	A <sub>н</sub> (K,L,K')
(PQ)=( 5 )					(PQ)=( 5 )				
1	1	1	0,173160	1,000000	1	7	7	0,002000	0,047418
1	2	1	0,244200	1,000000	1	8	1	0,034738	1,000000
1	3	1	0,196365	1,000000	1	8	3	-0,018616	-0,047073
1	3	3	-0,021279	-0,080705	1	8	5	0,007700	0,072544
1	4	1	0,208791	1,000000	3	3	3	0,700233	1,000000
1	4	3	-0,041117	-0,168345	3	4	3	0,000000	1,000000
1	5	1	0,066145	1,000000	3	5	3	0,193514	1,000000
1	5	3	-0,036770	-0,328894	3	5	5	-0,000000	-0,370620
1	5	5	0,002798	0,015172	3	6	3	0,124087	1,000000
1	6	1	0,000000	1,000000	3	6	5	-0,000000	-0,142963
1	6	3	-0,047716	-0,459444	3	7	3	0,000000	1,000000
1	6	5	0,005927	0,037337	3	7	5	-0,024007	-0,037572
3	7	3	0,765120	1,000000	3	8	3	0,033173	1,000000
3	7	5	0,165714	1,000000	3	8	5	-0,010000	-0,077300
3	7	7	0,187761	1,000000	3	9	3	-0,010000	-0,022122
3	7	5	-0,034702	-0,113561	3	10	3	0,000000	1,000000
3	6	3	0,009440	1,000000	3	10	5	-0,004978	-0,075444
3	6	5	-0,040220	-0,236926	5	5	5	0,420613	1,000000
3	7	3	0,042400	1,000000	5	6	5	0,303070	1,000000
3	7	5	-0,031233	-0,413200	5	7	5	0,162002	1,000000
3	8	3	0,017544	1,000000	5	8	5	0,078047	1,000000
3	8	5	-0,018000	-0,414138	5	9	5	0,032000	1,000000
5	5	5	0,510000	1,000000	5	10	5	0,010000	1,000000
5	6	5	0,000000	1,000000	5	11	5	0,000000	1,000000
5	7	5	0,174660	1,000000	5	12	5	0,000000	1,000000
5	8	5	0,049200	1,000000	(PQ)=( 7 )				
5	9	5	0,013072	1,000000	1	1	1	0,000000	1,000000
5	10	5	0,007064	1,000000	1	2	1	0,000000	1,000000
(PQ)=( 5 )					5	5	5	0,000000	1,000000
1	1	1	0,159848	1,000000	5	7	5	0,000000	1,000000
1	2	1	0,199800	1,000000	5	7	7	1,000000	1,000000
1	3	1	0,233100	1,000000	(PQ)=( 1 1 )				
1	3	3	-0,017022	-0,061430	1	1	1	0,304700	1,000000
1	4	1	0,141459	1,000000	1	2	1	0,410000	1,000000
1	4	3	-0,026033	-0,136870	3	3	3	0,600000	1,000000
1	5	1	0,153501	1,000000	3	4	3	0,000000	1,000000
1	5	3	-0,038575	-0,225264	5	5	5	0,700000	1,000000
1	5	5	0,001075	0,007378	5	6	5	0,171400	1,000000
1	6	1	0,040000	1,000000	3	7	3	0,000000	1,000000
1	6	3	-0,000000	-0,394405	3	8	3	-0,100000	-0,000000
1	6	5	0,000000	0,000000	(PQ)=( 2 2 )				
1	7	1	0,000000	1,000000	1	1	1	0,000000	1,000000
1	7	3	-0,026864	-0,507551	1	2	1	0,300000	1,000000
1	7	5	0,000000	0,000000	1	3	1	-0,100000	-0,000000
3	3	3	0,709444	1,000000	1	3	3	-0,100000	-0,000000
3	4	3	0,273707	1,000000	3	3	3	0,000000	1,000000
3	5	3	0,101177	1,000000	3	4	3	0,000000	1,000000
3	5	5	-0,006087	-0,0088014	3	5	3	-0,100000	-0,000000
3	6	3	0,112079	1,000000	3	5	5	0,000000	1,000000
3	6	5	-0,037070	-0,181226	5	6	5	0,230000	1,000000
3	7	3	0,057600	1,000000	5	7	5	0,000000	1,000000
3	7	5	-0,028213	-0,302748	5	7	7	-0,110000	-0,014675
3	8	3	0,027263	1,000000	7	7	7	0,700000	1,000000
3	8	5	-0,018461	-0,474151	7	8	7	0,100000	1,000000
3	9	3	0,009576	1,000000	7	9	7	0,000000	1,000000
3	9	5	-0,009424	-0,640374	(PQ)=( 3 7 )				
5	5	5	0,466710	1,000000	1	1	1	0,000000	1,000000
5	6	5	0,266515	1,000000	1	2	1	0,200000	1,000000
5	7	5	0,150716	1,000000	1	3	1	0,150000	1,000000
5	8	5	0,065163	1,000000	1	3	3	-0,040000	-0,178155
5	9	5	0,022400	1,000000	1	4	1	0,010000	1,000000
5	10	5	0,005629	1,000000	1	4	3	-0,000000	-0,356253
5	11	5	0,000000	1,000000	3	3	3	0,430000	1,000000
(PQ)=( 7 5 )					3	4	3	0,200000	1,000000
1	1	1	0,130860	1,000000	3	5	3	0,150000	1,000000
1	2	1	0,207000	1,000000	3	5	5	-0,083000	-0,279537
1	3	1	0,184006	1,000000	3	6	3	0,077000	1,000000
1	3	3	-0,011616	-0,050577	3	6	5	-0,061017	-0,563798
1	4	1	0,198000	1,000000	5	5	5	0,580000	1,000000
1	4	3	-0,024011	-0,105381	5	6	5	0,080000	1,000000
1	5	1	0,098000	1,000000	5	7	5	0,096000	1,000000
1	5	3	-0,026035	-0,188484	5	7	7	-0,064000	-0,322464
1	5	5	0,001152	0,005597	5	8	5	0,031000	1,000000
1	6	1	0,108016	1,000000	5	8	7	-0,057000	-0,668883
1	6	3	-0,031906	-0,275390	7	7	7	0,700000	1,000000
1	6	5	0,002611	0,014908	7	8	7	0,700000	1,000000
1	7	1	0,023680	1,000000	7	9	7	0,054000	1,000000
1	7	3	-0,018163	-0,450143	7	10	7	0,007016	1,000000







Продолжение табл. I

K	L	K'	A(K, L, K')	A <sub>N</sub> (K, L, K')	K	L	K'	A(K, L, K')	A <sub>N</sub> (K, L, K')
(PQ)=(3 4)					(P2)=(10 4)				
0	1	0	0.457143	1.000000	2	8	4	-0.012500	-0.526793
0	3	0	0.420202	1.000000	4	4	4	0.416184	1.000000
0	3	2	-0.108415	-0.297922	4	5	4	0.290110	1.000000
2	2	2	0.380952	1.000000	4	6	4	0.169595	1.000000
2	3	2	0.315152	1.000000	4	7	4	0.081879	1.000000
2	4	2	0.176623	1.000000	4	8	4	0.031618	1.000000
2	4	4	-0.054977	-0.171499	4	9	4	0.008964	1.000000
2	5	2	0.097436	1.000000	4	10	4	0.001651	1.000000
2	5	4	-0.062176	-0.368421	(P2)=(7 4)				
4	4	4	0.581818	1.000000	0	1	0	0.279720	1.000000
4	5	4	0.292308	1.000000	0	3	0	0.391608	1.000000
4	6	4	0.103296	1.000000	0	3	2	-0.029189	-0.094916
4	7	4	0.021978	1.000000	0	5	0	0.236009	1.000000
(PQ)=(4 4)					0	5	2	-0.051755	-0.273428
0	0	0	0.152381	1.000000	0	5	4	0.003091	0.011943
0	2	0	0.484848	1.000000	0	7	0	0.076595	1.000000
0	2	2	-0.034632	-0.086711	0	7	2	-0.035967	-0.572666
0	4	0	0.289510	1.000000	0	7	4	0.005699	0.066445
0	4	2	-0.095189	-0.388248	2	2	2	0.233100	1.000000
0	4	4	0.006142	0.015933	2	3	2	0.241492	1.000000
2	2	2	0.329004	1.000000	2	4	2	0.204196	1.000000
2	3	2	0.290909	1.000000	2	4	4	-0.014801	-0.053107
2	4	2	0.207592	1.000000	2	5	2	0.150528	1.000000
2	4	4	-0.037532	-0.114979	2	5	4	-0.022467	-0.109134
2	5	2	0.101099	1.000000	2	6	2	0.088414	1.000000
2	5	4	-0.045880	-0.262781	2	6	4	-0.023432	-0.186651
2	6	2	0.055411	1.000000	2	7	2	0.051499	1.000000
2	6	4	-0.037937	-0.438529	2	7	4	-0.019633	-0.279141
4	4	4	0.513287	1.000000	2	8	2	0.018452	1.000000
4	5	4	0.298901	1.000000	2	8	4	-0.012353	-0.437595
4	6	4	0.135065	1.000000	2	9	2	0.009998	1.000000
4	7	4	0.043956	1.000000	2	9	4	-0.006975	-0.557086
4	8	4	0.008791	1.000000	4	4	4	0.380429	1.000000
(PQ)=(5 4)					4	5	4	0.281448	1.000000
0	1	0	0.346320	1.000000	4	6	4	0.178253	1.000000
0	3	0	0.419580	1.000000	4	7	4	0.096055	1.000000
0	3	2	-0.052123	-0.153213	4	8	4	0.043185	1.000000
0	5	0	0.191209	1.000000	4	9	4	0.015686	1.000000
0	5	2	-0.073680	-0.461876	4	10	4	0.004203	1.000000
0	5	4	0.007507	0.031517	4	11	4	0.000751	1.000000
(P2)=(5 4)					(P2)=(F 4)				
2	2	2	0.288600	1.000000	0	0	0	0.093249	1.000000
2	3	2	0.275835	1.000000	0	2	0	0.354312	1.000000
2	4	2	0.204795	1.000000	0	2	2	-0.009324	-0.033949
2	4	4	-0.026431	-0.086158	0	4	0	0.331962	1.000000
2	5	2	0.133087	1.000000	0	4	2	-0.034006	-0.139108
2	5	4	-0.035952	-0.180923	0	4	4	0.000843	0.002472
2	6	2	0.057729	1.000000	0	6	0	0.165567	1.000000
2	6	4	-0.031615	-0.333333	0	6	2	-0.042700	-0.326231
2	7	2	0.031498	1.000000	0	6	4	0.003439	0.019739
2	7	4	-0.022059	-0.488678	0	8	0	0.046999	1.000000
4	4	4	0.459540	1.000000	0	8	2	-0.023569	-0.614750
4	5	4	0.296703	1.000000	0	8	4	0.004262	0.084616
4	6	4	0.155844	1.000000	2	2	2	0.212899	1.000000
4	7	4	0.064641	1.000000	2	3	2	0.226263	1.000000
4	8	4	0.019536	1.000000	2	4	2	0.201819	1.000000
4	9	4	0.003735	1.000000	2	4	4	-0.011536	-0.043383
(PQ)=(6 4)					2	5	2	0.151634	1.000000
0	0	0	0.115440	1.000000	2	5	4	-0.018113	-0.089205
0	2	0	0.410700	1.000000	2	6	2	0.103474	1.000000
0	2	2	-0.016650	-0.051142	2	6	4	-0.020280	-0.147225
0	4	0	0.326673	1.000000	2	7	2	0.055540	1.000000
0	4	2	-0.056489	-0.215679	2	7	4	-0.017602	-0.227980
0	4	4	0.002047	0.005553	2	8	2	0.031276	1.000000
0	6	0	0.122468	1.000000	2	8	4	-0.013039	-0.317328
0	6	2	-0.052837	-0.522422	2	9	2	0.010222	1.000000
0	6	4	0.007002	0.048583	2	9	4	-0.007329	-0.477567
2	2	2	0.258075	1.000000	2	10	2	0.005575	1.000000
2	3	2	0.256410	1.000000	2	10	4	-0.003852	-0.581994
2	4	2	0.209990	1.000000	4	4	4	0.350391	1.000000
2	4	4	-0.019559	-0.066161	4	5	4	0.271895	1.000000
2	5	2	0.136996	1.000000	4	6	4	0.183382	1.000000
2	5	4	-0.027916	-0.140028	4	7	4	0.107327	1.000000
2	6	2	0.083524	1.000000	4	8	4	0.053981	1.000000
2	6	4	-0.027895	-0.234378	4	9	4	0.022816	1.000000
2	7	2	0.032752	1.000000	4	10	4	0.007858	1.000000
2	7	4	-0.020213	-0.390226	4	11	4	0.002001	1.000000
2	8	2	0.017807	1.000000	4	12	4	0.000348	1.000000



K	L	K'	A(K, L, K')	A <sub>N</sub> (K, L, K')	K	L	K'	A(K, L, K')	A <sub>N</sub> (K, L, K')
I PQ) = ( C A )									
0	0	0	0,406349	1,000000	2	6	4	-0,013097	-0,551197
2	2	2	0,692641	1,000000	2	6	6	0,010887	0,048921
4	4	4	0,839161	1,000000	4	4	4	0,444403	1,000000
6	6	6	0,933333	1,000000	4	5	4	0,280859	1,000000
8	8	8	1,000000	1,000000	4	6	4	0,151119	1,000000
II PQ) = ( 1 B )									
0	1	0	0,524113	1,000000	4	6	6	-0,071184	-0,242315
2	2	2	0,461760	1,000000	4	7	4	0,070765	1,000000
2	3	2	0,310800	1,000000	4	7	6	-0,067505	-0,489848
4	4	4	0,071329	1,000000	4	8	4	0,132607	1,000000
4	5	4	0,205126	1,000000	4	8	6	-0,043263	-0,733227
6	6	6	0,800000	1,000000	4	8	8	0,110880	0,073583
6	7	6	0,147059	1,000000	6	6	6	0,571104	1,000000
8	8	8	0,888889	1,000000	6	7	6	0,268318	1,000000
8	9	8	0,111111	1,000000	6	8	6	0,106767	1,000000
III PQ) = ( 2 B )									
0	0	0	0,184704	1,000000	6	8	8	-0,069241	-0,258785
0	2	0	0,497280	1,000000	6	9	6	0,037128	1,000000
0	2	2	-0,097276	-0,223233	6	9	8	-0,049949	-0,524005
2	2	2	0,381840	1,000000	6	10	8	0,112067	1,000000
2	3	2	0,273504	1,000000	6	10	8	-0,023211	-0,801412
2	4	2	0,195005	1,000000	8	8	8	0,670517	1,000000
2	4	4	-0,113633	-0,340644	8	9	8	0,244733	1,000000
4	4	4	0,570629	1,000000	8	10	8	0,069799	1,000000
4	5	4	0,257875	1,000000	8	11	8	0,013853	1,000000
4	6	4	0,101553	1,000000	8	12	8	0,061504	1,000000
4	6	6	-0,138557	-0,518226	IV PQ) = ( C C C )				
6	6	6	0,703922	1,000000	0	0	0	0,369408	1,000000
6	7	6	0,215686	1,000000	2	2	2	0,639761	1,000000
6	8	6	0,056140	1,000000	4	4	4	0,783217	1,000000
6	8	8	-0,122305	-0,576691	6	6	6	0,878431	1,000000
8	8	8	0,801170	1,000000	8	6	6	0,947368	1,000000
8	9	8	0,177778	1,000000	10	10	10	1,000000	1,000000
8	10	8	0,021053	1,000000	V PQ) = ( 1 1 0 )				
VI PQ) = ( 1 B )									
0	1	0	0,383616	1,000000	0	1	0	0,511489	1,000000
0	3	0	0,397824	1,000000	2	2	2	0,426249	1,000000
0	3	2	-0,121808	-0,362738	2	3	2	0,298368	1,000000
2	2	2	0,319680	1,000000	4	4	4	0,626573	1,000000
2	3	2	0,283450	1,000000	4	5	4	0,202715	1,000000
2	4	2	0,172627	1,000000	6	6	6	0,752941	1,000000
2	4	4	-0,071768	-0,244460	6	7	6	0,148807	1,000000
2	5	2	0,129972	1,000000	8	8	8	0,842105	1,000000
2	5	4	-0,089936	-0,473393	8	9	8	0,114284	1,000000
4	4	4	0,498701	1,000000	10	10	10	0,909091	1,000000
4	5	4	0,277699	1,000000	10	11	10	0,090909	1,000000
4	6	4	0,128750	1,000000	VII PQ) = ( 2 1 0 )				
4	6	6	-0,097015	-0,340624	0	0	0	0,170495	1,000000
4	7	4	0,057020	1,000000	0	2	0	0,488844	1,000000
4	7	6	-0,079838	-0,667660	0	2	2	-0,095310	-0,233550
6	6	6	0,630065	1,000000	2	2	2	0,355200	1,000000
6	7	6	0,250774	1,000000	2	3	2	0,258586	1,000000
6	8	6	0,083041	1,000000	2	4	2	0,197074	1,000000
6	8	8	-0,090596	-0,368005	2	4	4	-0,115837	-0,356934
6	9	6	0,025584	1,000000	4	4	4	0,534430	1,000000
6	9	8	-0,054678	-0,730398	4	5	4	0,250980	1,000000
8	8	8	0,729825	1,000000	4	6	4	0,111755	1,000000
8	9	8	0,219048	1,000000	4	6	6	-0,150849	-0,553856
8	10	8	0,045933	1,000000	6	6	6	0,663777	1,000000
8	11	8	0,005195	1,000000	6	7	6	0,214654	1,000000
VIII PQ) = ( 4 E )									
0	0	0	0,127872	1,000000	6	8	6	0,072180	1,000000
0	2	0	0,426240	1,000000	6	8	8	-0,155308	-0,663139
0	2	2	-0,038910	-0,112509	8	6	8	0,759900	1,000000
0	4	0	0,299935	1,000000	8	9	8	0,180087	1,000000
0	4	2	-0,117678	-0,473847	8	10	8	0,042397	1,000000
0	4	4	0,011194	0,030662	8	10	10	-0,126043	-0,670303
2	2	2	0,280608	1,000000	10	10	10	0,833992	1,000000
2	3	2	0,258586	1,000000	10	11	10	0,151515	1,000000
2	4	2	0,205639	1,000000	10	12	10	0,014493	1,000000
2	4	4	-0,051188	-0,169330	IX PQ) = ( 0 1 2 )				
2	5	2	0,110551	1,000000	0	0	0	0,340992	1,000000
2	5	4	-0,065869	-0,373812	2	2	2	0,596737	1,000000
2	6	2	0,086720	1,000000	4	4	4	0,737145	1,000000
					6	6	6	0,832198	1,000000
					8	6	8	0,902256	1,000000
					10	10	10	0,956522	1,000000
					12	12	12	1,000000	1,000000

Таблица 2

Интегралы перекрывания базисных функций  
при  $\lambda \geq \mu, \lambda \geq L$

$\lambda$	$\mu$	$k$	$L$	$k'$	$a(L, k)$	$a(L, k')$	$A(k, L, k')$	$A_{\mu}(k, L, k')$
2	2	2	2	0	0,723767	0,753226	-0,029459	-0,144841
4	2	2	2	0	0,602218	0,723747	-0,027497	-0,062869
5	2	2	2	0	0,530452	0,673412	-0,017497	-0,035511
7	2	2	2	0	0,475744	0,613877	-0,026722	-0,022895
10	2	2	2	0	0,430856	0,573279	-0,004037	-0,016011
12	2	2	2	0	0,400171	0,539536	-0,002412	-0,011834
16	2	2	2	0	0,353246	0,486437	-0,001277	-0,007226
18	2	2	2	0	0,325427	0,463122	-0,000744	-0,005874
20	2	2	2	0	0,300004	0,445227	-0,000717	-0,004870
22	2	2	2	0	0,280437	0,429442	-0,000558	-0,004103
24	2	2	2	0	0,260300	0,414612	-0,000442	-0,003504
26	2	2	2	0	0,240734	0,401126	-0,000357	-0,003028
28	2	2	2	0	0,220172	0,389816	-0,000292	-0,002642
30	2	2	2	0	0,200368	0,379595	-0,000242	-0,002326

Таблица 3

Классификация состояний  $(id-2s)^n f(\lambda, \mu) \neq$  конфигурации  $(id-2s)^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$

$n$	$f$	$(\lambda, \mu)$
1	[1]	(20)
2	[2]	(40) (02)
	[11]	(21)
3	[111]	(30) (03)
	[21]	(41) (22) (11)
	[3]	(60) (22) (00)
4	[1111]	(12)
	[211]	(50) (12) (31) (23) (01)
	[31]	(61) (42) (31) (23) (20) (12)
	[22]	(42) (20) (04) (31)
	[4]	(80) (42) (20) (04)
5	[11111]	(03)
	[2111]	(32) (21) (13) (10)
	[221]	(40) (32) (24) (21) (02) (13) (51)
	[311]	(70) (51) (32) <sup>2</sup> (43) (05) (21) <sup>2</sup> (13) (10)
	[32]	(62) (43) (51) (40) <sup>2</sup> (32) (24) (21) (13) (02)
	[41]	(81) (62) (51) (43) (40) (32) (24) (21) (13) (02)
6	[111111]	(00)
	[21111]	(22) (11)
	[2211]	(41) (33) (30) (22) (14) (11) (03)
	[222]	(60) (33) (22) <sup>2</sup> (06) (00)
	[3111]	(52) (41) (33) (30) <sup>2</sup> (22) (14) (11) (03)
	[321]	(71) (60) (52) <sup>2</sup> (41) <sup>3</sup> (22) <sup>3</sup> (44) (33) <sup>2</sup> (30) (25) (14) <sup>2</sup> (11) <sup>2</sup> (03)
	[33]	(63) (60) (52) (41) (33) (30) (25) (22) (03)
	[411]	(90) (71) (63) (52) <sup>2</sup> (41) <sup>2</sup> (33) <sup>2</sup> (30) <sup>2</sup> (25) (22) (14) (03) <sup>2</sup> (11)
	[42]	(82) (63) (71) (60) <sup>2</sup> (52) (44) <sup>2</sup> (41) <sup>2</sup> (33) <sup>2</sup> (22) <sup>3</sup> (11) (00) (06) (14)
	7	[211111]
[22111]		(31) (23) (12) (01)
[2221]		(42) (31) (23) (20) (15) (12) (04)
[31111]		(42) (31) (20) (12) (04)
[322]		(80) (61) (53) (42) <sup>3</sup> (34) (31) <sup>2</sup> (26) (23) <sup>2</sup> (20) <sup>2</sup> (12) (04) <sup>2</sup> (15)

\* Набор допустимых состояний конфигурации  $(id-2s)^n$  с  $n > 12$  получается из таблицы состояний с  $n' = 24 - n$ , причем  $[f] = [f_1 f_2 \dots f_6]$  заменяется на  $[f'] = [4 - f_6, 4 - f_5, \dots, 4 - f_1]$  и  $(\lambda, \mu)$  на  $(\mu, \lambda)$ .

n	l	/r/	l	(l/r)
			[32I]	(6I) (53) (50) <sup>2</sup> (42) <sup>2</sup> (34) <sup>2</sup> (3I) <sup>3</sup> (23) <sup>3</sup> (20) (15) (12) <sup>3</sup> (04) (0I)
			[33I]	(72) (6I) <sup>2</sup> (50) <sup>2</sup> (53) (42) <sup>2</sup> (34) <sup>2</sup> (45) (3I) <sup>2</sup> (23) <sup>3</sup> (15) (12) <sup>2</sup> (07) (0I)
			[41II]	(72) (6I) (53) (50) <sup>2</sup> (42) (34) (3I) <sup>2</sup> (23) <sup>2</sup> (15) (12) <sup>2</sup> (0I)
			[42I]	(9I) (80) (72) <sup>2</sup> (64) (53) <sup>3</sup> (6I) <sup>3</sup> (45) (42) <sup>5</sup> (34) <sup>3</sup> (3I) <sup>4</sup> (26) (23) <sup>4</sup> (20) <sup>2</sup> (15) <sup>2</sup> (12) <sup>3</sup> (04) <sup>2</sup> (0I) (50) <sup>2</sup>
			[43]	(83) (80) (72) (64) (6I) <sup>2</sup> (53) <sup>2</sup> (50) (45) (42) <sup>3</sup> (34) (3I) <sup>2</sup> (26) (23) <sup>2</sup> (20) (12) (15) (04)
8			[22IIII]	(2I)
			[222II]	(32) (2I) (13) (10) (05)
			[2222]	(40) (24) (13) (02)
			[3IIIIII]	(40) (02)
			[32III]	(5I) (40) (43) (32) <sup>2</sup> (2I) <sup>2</sup> (13) <sup>2</sup> (10) (02) (24)
			[322I]	(62) (5I) <sup>2</sup> (43) <sup>2</sup> (40) <sup>2</sup> (32) <sup>3</sup> (35) (24) <sup>3</sup> (2I) <sup>3</sup> (16) (13) <sup>3</sup> (05) (02) <sup>2</sup>
			[33II]	(70) (62) (54) (5I) <sup>2</sup> (43) <sup>2</sup> (40) (32) <sup>4</sup> (35) (24) <sup>2</sup> (2I) <sup>2</sup> (16) (13) <sup>2</sup> (10) (05) (02)
			[332]	(8I) (70) (62) (54) (5I) <sup>2</sup> (43) <sup>3</sup> (40) (35) (32) <sup>3</sup> (27) (24) <sup>2</sup> (2I) <sup>2</sup> (16) (13) <sup>2</sup> (05) <sup>2</sup> (10)
			[4IIII]	(62) (5I) (40) (32) (24) (2I) (13) (02)
			[42II]	(8I) (73) (70) <sup>2</sup> (5I) <sup>4</sup> (62) <sup>2</sup> (43) <sup>4</sup> (40) <sup>2</sup> (35) <sup>2</sup> (32) <sup>6</sup> (24) <sup>3</sup> (2I) <sup>4</sup> (16) (13) <sup>4</sup> (10) <sup>2</sup> (05) <sup>2</sup> (02) (54) <sup>2</sup>
			[422]	(10,0)(8I) (73) (62) <sup>4</sup> (54) (5I) <sup>3</sup> (46) (43) <sup>3</sup> (40) <sup>4</sup> (35) <sup>2</sup> (32) <sup>3</sup> (24) <sup>5</sup> (2I) <sup>2</sup> (16) (13) <sup>3</sup> (08) (02) <sup>3</sup>
			[43I]	(92) (8I) <sup>2</sup> (73) <sup>2</sup> (70) <sup>3</sup> (62) <sup>4</sup> (54) <sup>3</sup> (5I) <sup>5</sup> (65) (46) (43) <sup>6</sup> (35) <sup>3</sup> (40) <sup>2</sup> (32) <sup>6</sup> (24) <sup>4</sup> (2I) <sup>4</sup> (16) <sup>2</sup> (27) (13) <sup>4</sup> (10) (05) <sup>2</sup> (02)
			[44]	(84) (8I) (62) <sup>2</sup> (54) (5I) <sup>2</sup> (46) (43) (40) <sup>2</sup> (35)



$n$	$l$	$l_1$	$l$	$(\mu)$
9	[222III]	(30)	(03)	
	[2222I]	(14)	(22)	(II)
	[32IIII]	(4I)	(22)	(II)
	[322II]	(52)	(4I) <sup>2</sup> (33) <sup>2</sup> (30) <sup>2</sup> (25)	(22) <sup>2</sup> (I4) <sup>4</sup> (II) <sup>2</sup> (03) <sup>2</sup>
	[3222]	(60)	(44) (33) <sup>2</sup> (4I) (25)	(22) <sup>3</sup> (I4) (II) (06) (03) (00)
	[33III]	(60)	(44) (4I) (52) (33) <sup>2</sup> (30)	(22) <sup>3</sup> (I4) (06) (II) (00)
	[332I]	(7I)	(63) (60) (52) <sup>3</sup> (44) <sup>2</sup> (4I) <sup>4</sup> (33) <sup>4</sup> (30) <sup>2</sup> (I7)	(36) (06) (25) <sup>3</sup> (22) <sup>4</sup> (I4) <sup>4</sup> (II) <sup>2</sup> (03) <sup>2</sup>
	[333]	(90)	(63) (52) <sup>2</sup> (4I) (33) <sup>2</sup> (30) <sup>2</sup> (09) (36) (25) <sup>2</sup>	(I4) (03) <sup>2</sup>
	[4IIIII]	(60)	(22)	(00)
	[42III]	(7I)	(63) (60) (52) <sup>2</sup> (44) (4I) <sup>3</sup> (33) <sup>3</sup> (30) <sup>2</sup> (25)	(22) <sup>3</sup> (I4) <sup>2</sup> (II) <sup>2</sup> (03) <sup>2</sup>
	[422I]	(82)	(7I) <sup>2</sup> (63) <sup>2</sup> (60) <sup>3</sup> (55) (52) <sup>4</sup> (4I) <sup>5</sup> (30) <sup>2</sup>	(33) <sup>6</sup> (I7) (36) (06) <sup>2</sup> (44) <sup>4</sup> (25) <sup>3</sup> (I4) <sup>4</sup> (03) <sup>2</sup> (22) <sup>7</sup> (II) <sup>3</sup> (00)
	[43II]	(90)	(82) (74) (7I) <sup>3</sup> (63) <sup>3</sup> (60) <sup>2</sup> (52) <sup>7</sup> (4I) <sup>6</sup>	(03) <sup>3</sup> (I7) (36) <sup>2</sup> (06) (25) <sup>4</sup> (I4) <sup>5</sup> (30) <sup>4</sup> (55) <sup>2</sup> (44) <sup>4</sup> (33) <sup>7</sup> (22) <sup>5</sup> (II) <sup>3</sup>
	[432]	(10,I)(90)	(82) <sup>2</sup> (74) (7I) <sup>4</sup> (63) <sup>4</sup> (60) <sup>3</sup> (52) <sup>6</sup> (4I) <sup>6</sup>	(30) <sup>2</sup> (55) <sup>2</sup> (28) (47) (I7) <sup>2</sup> (36) <sup>2</sup> (06) <sup>2</sup> (25) <sup>5</sup> (I4) <sup>5</sup> (03) <sup>2</sup> (44) <sup>6</sup> (33) <sup>7</sup> (22) <sup>6</sup> (II) <sup>3</sup>
	[44I]	(93)	(90) (82) <sup>2</sup> (74) (7I) <sup>3</sup> (63) <sup>3</sup> (60) <sup>3</sup> (52) <sup>4</sup>	(4I) <sup>3</sup> (30) (66) (28) (55) <sup>2</sup> (I7) (36) <sup>2</sup> (06) <sup>2</sup> (25) <sup>2</sup> (I4) <sup>2</sup> (03) (44) <sup>4</sup> (33) <sup>5</sup> (22) <sup>4</sup> (II) (00)
	10	[2222II]	(I2)	
		[22222]	(20)	(04)

п	l	/r/	l	(лμ)
		[322III]	(50) (3I) (23) (I2) (0I)	
		[332II]	(6I) (53) (50) (42) <sup>3</sup> (34) <sup>2</sup> (23) <sup>3</sup> (26) (20) <sup>2</sup> (3I) <sup>3</sup> (I5) <sup>2</sup> (I2) <sup>3</sup> (04) <sup>2</sup>	
		[33III]	(42) (20) (04) (3I)	
		[3322]	(6I) (53) (50) (45) (42) <sup>2</sup> (34) <sup>2</sup> (3I) <sup>2</sup> (26) (23) <sup>4</sup> (20) (I5) <sup>2</sup> (I2) <sup>2</sup> (07) (04) (0I)	
		[333I]	(72) (6I) (53) (50) <sup>2</sup> (42) <sup>2</sup> (45) (3I) <sup>2</sup> (34) <sup>3</sup> (26) (23) <sup>3</sup> (I8) (I5) <sup>2</sup> (I2) <sup>2</sup> (07) (04) (0I)	
		[42IIII]	(6I) (42) (3I) (23) (20) (I2)	
		[422II]	(72) (6I) <sup>2</sup> (53) <sup>2</sup> (50) <sup>3</sup> (45) (42) <sup>3</sup> (34) <sup>3</sup> 3I) <sup>4</sup> (23) <sup>5</sup> (20) (I5) <sup>2</sup> (I2) <sup>4</sup> (07) (04) (0I) <sup>2</sup>	
		[3222I]	(42) (34) (3I) <sup>2</sup> (23) <sup>2</sup> (20) (I5) (I2) <sup>2</sup> (04) (0I)	
		[43III]	(80) (72) (64) (6I) <sup>2</sup> (53) <sup>3</sup> (50) <sup>2</sup> (45) (42) <sup>5</sup> (34) <sup>3</sup> (3I) <sup>4</sup> (26) (23) <sup>4</sup> (20) <sup>2</sup> (I5) <sup>2</sup> (I2) <sup>3</sup> (04) <sup>2</sup> (0I)	
		[4222]	(80) (64) (6I) (53) <sup>2</sup> (45) (42) <sup>5</sup> (34) <sup>2</sup> (3I) <sup>3</sup> (26) <sup>2</sup> (23) <sup>3</sup> (20) <sup>3</sup> (I5) <sup>2</sup> (I2) <sup>2</sup> (04) <sup>3</sup>	
		[433]	(II,0)(9I) (83) (72) <sup>3</sup> (64) (6I) <sup>3</sup> (56) (53) <sup>4</sup> (50) <sup>3</sup> (45) <sup>3</sup> (42) <sup>3</sup> (34) <sup>5</sup> (37) (3I) <sup>3</sup> (29) (23) <sup>5</sup> (26) <sup>2</sup> (I8) (I5) <sup>3</sup> (I2) <sup>3</sup> (07) <sup>2</sup> (0I)	
		[432I]	(9I) (83) (80) <sup>2</sup> (72) <sup>4</sup> (56) (64) <sup>3</sup> (6I) <sup>7</sup> (53) <sup>8</sup> (50) <sup>5</sup> (45) <sup>5</sup> (37) <sup>2</sup> (34) <sup>I0</sup> (42) <sup>II</sup> (3I) <sup>9</sup> (26) <sup>5</sup> (23) <sup>II</sup> (20) <sup>3</sup> (I5) <sup>7</sup> (I8) (I2) <sup>7</sup> (04) <sup>5</sup> (0I) <sup>2</sup> (07) <sup>2</sup>	
		[442]	(I0,2)(9I) <sup>2</sup> (83) (80) <sup>3</sup> (75) (72) <sup>3</sup> (64) <sup>4</sup> (6I) <sup>4</sup> (50) (53) <sup>6</sup> (56) (53) <sup>6</sup> (48) (45) <sup>3</sup> (42) <sup>8</sup> (37) <sup>2</sup> (34) <sup>5</sup> (3I) <sup>4</sup> (26) <sup>5</sup> (23) <sup>4</sup> (20) <sup>3</sup> (I8) (I5) <sup>4</sup> (0, I0)(04) <sup>4</sup> (I2) <sup>2</sup>	
II		[22222I]	(02)	
		[32222]	(24) (I3) (2I) (40) (02)	
		[3222II]	(32) (I3) (2I) (I0)	
		[332III]	(40) (24) (02) (2I) (I3) (32) (5I)	
		[333II]	(62) (5I) (43) (35) (32) <sup>2</sup> (24) <sup>3</sup> (2I) (40) <sup>2</sup> (I6)	

$\lambda$	$\mu$	$(\lambda\mu)$
		$(13)^2 (08) (02)^2$
	[3332]	$(70) (54) (51) (43)^2 (35) (32)^3(27) (24)^2(21)^2$ $(16)^2 (13)^2 (10) (05)^2$
	[422111]	$(70) (51) (32)^2 (43) (05) (21)^2 (13) (10)$
	[431111]	$(62) (43) (51) (40)^2 (32) (24) (21) (13) (02)$
	[42221]	$(54) (62) (51)^2 (43)^2 (32)^4 (40)^2 (35) (24)^3(13)^3$ $(21)^3 (16) (05) (02)^2 (10)$
	[4322]	$(81) (73) (70) (62)^4 (65) (54)^3 (51)^5(43)^7(46)^2$ $(40)^4 (35)^5 (27)^2 (24)^8 (21)^5 (16)^3 (13)^6(08) (10)$ $(05)^3 (02)^3 (32)^7$
	[43211]	$(81) (73) (70)^2 (62)^4 (54)^3 (51)^6 (46) (43)^7(40)^4$ $(35)^4 (32)^9 (27) (24)^7 (21)^6 (10)^2 (13)^7(16)^3(02)^3$ $(05)^3$
	[4331]	$(92) (81)^2 (70)^3 (73)^2 (65) (62)^4 (51)^6(54)^5(43)^8$ $(46)^2 (40)^2 (35)^6 (32)^9 (38) (27)^3 (24)^7(21)^5(19)$ $(16)^5 (10)^2 (08) (05)^4 (02)$
	[44111]	$(81) (73) (70) (65) (62)^2 (54)^2 (51)^3 (43)^4(40)$ $(35)^2 (32)^4 (27) (24)^2 (21)^3 (16) (13)^2 (10) (05)$
	[443]	$(11,1)(10,0)(92) (84) (81)^2 (73)^3 (70) (62)^5(65)$ $(54)^4 (51)^4 (43)^5 (46)^3 (2,10)(57) (35)^5 (19) (24)^6$ $(40)^3 (08)^2 (38) (32)^4 (27)^2 (16)^3(13)^3 (05) (21)^2$ $(02)^2$
	[4421]	$(10,0)(92) (81)^3 (84) (73)^4 (62)^8 (51)^8(70)^3(65)^2$ $(57) (54)^6 (46)^4 (43)^{10}(40)^5(38) (32)^9 (21)^5(35)^8$ $(24)^{10}(27)^3 (13)^7 (19) (10) (16)^5(02)^3 (05)^3(08)^2$
12	[222222]	(00)
	[322221]	(22) (11)
	[332211]	(41) (33) (30) (22) (14) (11) (03)
	[33222]	(41) (33) (25) (22) (14) (30) (11) (03) <sup>2</sup>
	[333111]	(60) (33) (22) <sup>2</sup> (06) (00)

$\mu$	$\lambda$	$\mu/\lambda$	$\lambda$	$(\lambda, \mu)$
[3332I]	(52)	(44)	(4I) <sup>2</sup>	(33) <sup>2</sup> (30) (22) <sup>3</sup> (I7) (06)(II) <sup>2</sup> (25) <sup>2</sup> (I4) <sup>3</sup> (03)
[3333]	(36)	(25)	(52)	(33) (22) (30) (I4) (03) (06)
[42222]	(60)	(44)	(4I)	(22) <sup>3</sup> (II) (00) (06) (33) (I4)
[433II]	(82)	(7I) <sup>2</sup>	(63) <sup>2</sup>	(60) <sup>3</sup> (52) <sup>4</sup> (4I) <sup>5</sup> (30) <sup>2</sup> (55) (44) <sup>5</sup> (28) (I7) <sup>2</sup> (36) <sup>2</sup> (06) <sup>3</sup> (25) <sup>4</sup> (I4) <sup>5</sup> (03) <sup>2</sup> (33) <sup>7</sup> (22) <sup>7</sup> (II) <sup>3</sup> (00)
[432III]	(7I)	(60)	(52) <sup>2</sup>	(4I) <sup>3</sup> (22) <sup>2</sup> (44) (33) <sup>2</sup> (30) (25) (I4) <sup>2</sup> (II) <sup>2</sup> (03)
[4322I]	(63) <sup>2</sup>	(52) <sup>5</sup>	(4I) <sup>6</sup>	(7I) (60) <sup>2</sup> (30) <sup>4</sup> (55) (44) <sup>4</sup> (00) (36) <sup>2</sup> (25) <sup>5</sup> (I4) <sup>6</sup> (I7) (06) <sup>2</sup> (03) <sup>4</sup> (33) <sup>8</sup> (22) <sup>8</sup> (II) <sup>4</sup>
[4332]	(90)	(74)	(7I) <sup>2</sup>	(63) <sup>3</sup> (52) <sup>6</sup> (4I) <sup>6</sup> (60) (30) <sup>4</sup> (09) (47) (I7) <sup>3</sup> (36) <sup>4</sup> (25) <sup>7</sup> (I4) <sup>7</sup> (06) <sup>2</sup> (03) <sup>4</sup> (55) <sup>2</sup> (44) <sup>5</sup> (28) (22) <sup>5</sup> (II) <sup>3</sup> (33) <sup>8</sup>
[44IIII]	(63)	(60)	(52)	(4I) (33) (30) (25) (22) (03)
[442II]	(90)	(74)	(7I) <sup>3</sup>	(63) <sup>4</sup> (52) <sup>7</sup> (4I) <sup>7</sup> (60) <sup>2</sup> (30) <sup>4</sup> (09) (47) (I7) <sup>2</sup> (36) <sup>3</sup> (25) <sup>6</sup> (I4) <sup>6</sup> (06) (03) <sup>4</sup> (55) <sup>2</sup> (44) <sup>5</sup> (82) (33) <sup>8</sup> (22) <sup>5</sup> (II) <sup>3</sup>
[4422]	(60) <sup>4</sup>	(4I) <sup>5</sup>	(82) <sup>2</sup>	(63) <sup>3</sup> (74) (52) <sup>5</sup> (I7) <sup>3</sup> (30) (06) <sup>4</sup> (I4) <sup>5</sup> (28) <sup>2</sup> (36) <sup>3</sup> (47) (25) <sup>5</sup> (7I) <sup>3</sup> (03) (66) (55) <sup>3</sup> (44) <sup>8</sup> (33) <sup>8</sup> (33) <sup>8</sup> (II) <sup>3</sup> (22) <sup>2</sup> (00)
[443I]	(93)	(I0, I)	(90)	(82) <sup>3</sup> (74) <sup>2</sup> (7I) <sup>5</sup> (63) <sup>6</sup> (60) <sup>4</sup> (39) (I, I0)(09) (28) <sup>3</sup> (47) <sup>2</sup> (I7) <sup>5</sup> (36) <sup>6</sup> (06) <sup>4</sup> (52) <sup>9</sup> (4I) <sup>7</sup> (30) <sup>3</sup> (66) (55) <sup>5</sup> (44) <sup>9</sup> (33)II(22) <sup>8</sup> (25) <sup>9</sup> (I4) <sup>7</sup> (03) <sup>3</sup> (II) <sup>3</sup>
[444]	(93)	(82) <sup>2</sup>	(7I)	(60) <sup>3</sup> (63) <sup>2</sup> (52) (55) <sup>2</sup> (66) (4I) (39) (28) <sup>2</sup> (I7) (06) <sup>3</sup> (36) <sup>2</sup> (25) (44) <sup>4</sup> (33) <sup>3</sup> (I4) (I2, 0)(0, I2)(22) <sup>3</sup> (00) <sup>2</sup>

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

Аникин Г.В., Котухов И.И., Прохорова Л.И. Описание упругого рассеяния быстрых нейтронов ядрами от $^{209}\text{Bi}$ до $^{239}\text{Pu}$ в рамках оптической модели со сферически-симметричным потенциалом .....	3
Бочарова И.Е., Прохорова Л.И., Смиринкин Г.Н. Расчет методом Монте-Карло детектора нейтронов .....	7
Вальский Г.В., Мречковский О.М., Петров Г.А., Плева Ю.С. О вероятности образования спонтанно-делящихся изомеров при захвате тепловых нейтронов ядрами $^{235}\text{U}$ и $^{239}\text{Pu}$ .....	18
Николаев М.Н., Рязанов Б.Г. о коррекции сечений по данным интегральных экспериментов .....	21
Ваньков А.А., Воропаев А.И. К вопросу о коррекции сечений по данным интегральных экспериментов .....	41
Грешилов А.А., Меховина В.Ф. Численная компенсация нелинейных искажений при регистрации сигналов .....	44
Ашорова Р.М., Смирнов Ю.Ф. Рекуррентный метод построения проективного базиса Эллиотта (вычисление интегралов перекрытия и нормировок базисных функций) .....	49

Вопросы атомной науки и техники

Серия: Ядерные константы

Выпуск 17

Редакторы: Г.В.Зубова  
Е.И.Кузнецова  
О.А.Шалина  
Л.И.Шилина

Корректоры: Г.Н.Балашова  
О.Н.Тарасова

---

Подписано в печать 16/ХП 1974 г.      Формат 60 x 90 1/8      Т-18183  
Бумага офсетная № 2      Уч.-изд.л. 7,1      Тираж 350 экз.      Зак.тип.№ 1174  
Цена 71 коп.

---

Отпечатано на ротатристе ЦНИИатоминформа  
119146, Москва, Г-146, вб/яц 584

## РЕФЕРАТЫ

УДК 539.171.016

ОПИСАНИЕ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ БЫСТРЫХ НЕЙТРОНОВ ЯДРАМИ ОТ  $^{209}\text{Bi}$  ДО  $^{239}\text{Pu}$  В РАМКАХ ОПТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СО СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ. Авикин П.М., Котухов Л.И., Прохорова Л.И. - "Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерные константы", 1974, вып. 17, с. 3 (Эксперимент).

делается попытка найти единые или слабо зависящие от энергии нейтрона, атомного веса и заряда ядра параметры оптического потенциала, позволяющие удовлетворительно описать экспериментальные данные по полным сечениям взаимодействия и угловым распределениям упругорассеянных нейтронов для следующих изотопов:  $^{209}\text{Bi}$ ,  $^{232}\text{Th}$ ,  $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$ .

Подгонка параметров велась по экспериментальным данным для 23 значений энергии нейтронов. В расчете учитывались некоторые дальнедействующие доавки к ядерному потенциалу (рис. 4).

УДК 539.125.523.4.

РАСЧЕТ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО ДЕТЕКТОРА НЕЙТРОНОВ. Лочарова И.Е., Прохорова Л.И., Смиренин Г.Н. - "Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерные константы", 1974, вып. 17, с. 7 (ЦНИИАтоминформ).

Приводятся алгоритм расчета методом монте-Карло эффективности детектора, состоящего из цилиндрической оболочки с произвольным вертикальным расположением счетчиков, а также результаты расчета таких характеристик детектора, как угловая и энергетическая зависимости эффективности детектора, зависимость эффективности от перемещения источника вдоль вертикальной оси, распределение времени жизни. Кроме того, в работе приводится сравнение экспериментальных и расчетных результатов по энергетической зависимости эффективности детектора с гексагональным расположением счетчиков (рис. 5, табл. 1, список литературы II назв.).

УДК 539.172.162.2

О ВЕРОЯТНОСТИ ОБРАЗОВАНИЯ СПОНТАННО-ДЕЛЯЩИХСЯ ИЗОМЕРОВ ПРИ ЗАХВАТЕ ТЕПЛОВЫХ НЕЙТРОНОВ ЯДРАМИ  $^{235}\text{U}$  И  $^{239}\text{Pu}$ . Вальский Г.В., Мрачковский О.М., Петров Г.А., Плева Ю.С. - "Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерные константы", 1974, вып. 17, с. 18 (ЦНИИАтоминформ).

Измерялась величина отношения сечения образования спонтанно-делящегося изомера  $\sigma_1$  к сечению мгновенного деления  $\sigma_f$  при захвате тепловых нейтронов ядрами  $^{235}\text{U}$  и  $^{239}\text{Pu}$ . Полученное значение  $\sigma_1/\sigma_f$  составляет для мишени  $^{239}\text{Pu}$   $(0,29 \pm 0,25) \cdot 10^{-4}$ , если предположить, что при заселении изомерного состояния испускаются два гамма-кванта с энергиями, превышающими 0,7 Мэв. При этих же условиях верхний предел  $\sigma_1/\sigma_f$  на уровне двойной стандартной ошибки составляет для мишени  $^{235}\text{U}$   $< 0,5 \cdot 10^{-4}$  (рис.1, табл. 2, список литературы 8 назв.).

УДК 599.172.4

О КОРРЕКЦИИ ТЕПЛОТЫ ПО ДАННЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ. Николаев м.Н., Рязанов Б.Г. - "Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерные константы", 1974, вып.17, с. 21 (ЦНИИАтоминформ).

Рассматривается алгоритм коррекции сечения, учитывающий информацию об условиях проведения опытов (ошибки концентраций и размеров в обчислительной модели). Получены аналитические формулы для поправок к сечениям, которые могут быть реализованы на ЭВМ. найдены условия, при которых этот алгоритм совпадает с общепринятым. На простом примере продемонстрирована эффективность предлагаемого алгоритма (табл. 3, список литературы 12 назв.).

УДК 599.172.4

К ВОПРОСУ О КОРРЕКЦИИ СЕЧЕНИЯ ПО ДАННЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ. Ваньков Л.А., Зорюнас А.И. - "Вопросы атомной науки и техники. Серия: Энергетика", 1974, вып.17, с. 41 (ДНИАтоминформ).

Рассмотрены вопросы математического и физического характера, связанные с теорией корректировки констант по данным интегральных экспериментов. Обсуждаются предложения по улучшению формализма, выдвинутые в предыдущей статье И.П. Николаева и Б.Г. Рязанова (список литературы 6 назв.).

УДК 518.5

ЧИСЛЕННАЯ КОМПЕНСАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИСКАЖЕНИЙ ПРИ РЕГИСТРАЦИИ СИГНАЛОВ. Пронин В.И., Махонина Е.И. - "Вопросы атомной науки и техники. Серия: Энергетика", 1974, вып.17, с. 44 (ДНИАтоминформ).

Описаны вычислительные приемы компенсации двумерных нелинейных искажений графических записей сигналов. Компенсация осуществляется с использованием обратного нелинейного преобразования, которое определяется совокупностью соответственных трансформационных точек, расположенных в плоскости сигнала и плоскости его изображения. При построении алгоритма использовано свойство аддитивной инвариантности саригентрических координат (список литературы 4 назв.).



УДК 539.1

РЕКУРРЕНТНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПРОЕКТИРОВАННОГО БАЗИСА ЭЛИОТТА (ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПЕРЕКРЫВАНИЯ И НОРМИРОВОК БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ). Аперова Р.М., Самарин М.С. — "Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерные константы", 1974, вып. 17, с. 49 (ДВВИАтоминформ).

Рассчитаны нормировочные интегралы и интегралы перекрытия "близки"  $SU(3) \supset SO(3)$  базиса Элиотта по рекуррентным формулам для всех возможных  $(\lambda, \mu)$  значений чисел  $(\lambda/\mu)$   $K, L$ , соответствующих чистым состояниям ядер  $v-d$  — барионных и мезонных. Необходимы для проведения расчетов свойств ядер  $v-d$  — барионных и мезонных. Таблицы и при использовании метода К-гармоник (табл. 1, список литературы).