



PLASMA PHYSICS AND CONTROLLED NUCLEAR FUSION RESEARCH

VOL. I

CONFERENCE
PROCEEDINGS,
CULHAM,
6-10 SEPTEMBER
1965



INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY, VIENNA, 1966

**PLASMA PHYSICS AND CONTROLLED
NUCLEAR FUSION RESEARCH**

VOL. I

The following States are Members of the International Atomic Energy Agency:

AFGHANISTAN	FEDERAL REPUBLIC OF	NICARAGUA
ALBANIA	GERMANY	NIGERIA
ALGERIA	GABON	NORWAY
ARGENTINA	GHANA	PAKISTAN
AUSTRALIA	GREECE	PARAGUAY
AUSTRIA	GUATEMALA	PERU
BELGIUM	HAITI	PHILIPPINES
BOLIVIA	HOLY SEE	POLAND
BRAZIL	HONDURAS	PORTUGAL
BULGARIA	HUNGARY	ROMANIA
BURMA	ICELAND	SAUDI ARABIA
BYELORUSSIAN SOVIET SOCIALIST REPUBLIC	INDIA	SENEGAL
CAMBODIA	INDONESIA	SOUTH AFRICA
CAMEROON	IRAN	SPAIN
CANADA	IRAQ	SUDAN
CEYLON	ISRAEL	SWEDEN
CHILE	ITALY	SWITZERLAND
CHINA	IVORY COAST	SYRIA
COLOMBIA	JAMAICA	THAILAND
CONGO, DEMOCRATIC REPUBLIC OF	JAPAN	TUNISIA
COSTA RICA	KENYA	TURKEY
CUBA	REPUBLIC OF KOREA	UKRAINIAN SOVIET SOCIALIST REPUBLIC
CYPRUS	KUWAIT	UNION OF SOVIET SOCIALIST REPUBLICS
CZECHOSLOVAK SOCIALIST REPUBLIC	LEBANON	UNITED ARAB REPUBLIC
DENMARK	LIBERIA	UNITED KINGDOM OF GREAT BRITAIN AND NORTHERN IRELAND
DOMINICAN REPUBLIC	LIBYA	UNITED STATES OF AMERICA
ECUADOR	LUXEMBOURG	URUGUAY
EL SALVADOR	MADAGASCAR	VENEZUELA
ETHIOPIA	MALI	VIET-NAM
FINLAND	MEXICO	YUGOSLAVIA
FRANCE	MONACO	
	MOROCCO	
	NETHERLANDS	
	NEW ZEALAND	

The Agency's Statute was approved on 23 October 1956 by the Conference on the Statute of the IAEA held at United Nations Headquarters, New York; it entered into force on 29 July 1957. The Headquarters of the Agency are situated in Vienna. Its principal objective is "to accelerate and enlarge the contribution of atomic energy to peace, health and prosperity throughout the world".

Printed by the IAEA in Austria

April 1966

PROCEEDINGS SERIES

PLASMA PHYSICS
AND CONTROLLED
NUCLEAR FUSION RESEARCH

PROCEEDINGS OF A CONFERENCE ON
PLASMA PHYSICS AND CONTROLLED NUCLEAR FUSION RESEARCH
HELD BY THE
INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY
AT CULHAM, 6-10 SEPTEMBER 1965

VOL. I

In two volumes

INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY
VIENNA, 1966

Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear
Fusion Research, Culham, 6 - 10 September 1965.
Proceedings ... held by the International Atomic
Energy Agency ... Vienna, the Agency, 1966.
2 vols. (IAEA, Proceedings series)

533.9
621.039.6

FOREWORD

Research on controlled nuclear fusion was first disclosed at the Second United Nations Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy, held at Geneva in 1958. From the information given, it was evident that a better understanding of the behaviour of hot dense plasmas was needed before the goal of economic energy release from nuclear fusion could be reached.

The fact that research since then has been most complex and costly has enhanced the desirability of international co-operation and exchange of information and experience. Having organized its First Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research at Salzburg in 1961, the International Atomic Energy Agency again provided the means for such co-operation in organizing its Second Conference on this subject on 6-10 September, 1965, at Culham, Abingdon, Berks, England. The meeting was arranged with the generous help of the United Kingdom Atomic Energy Authority at their Culham Laboratory, where the facilities and assistance of the staff were greatly appreciated.

At the meeting, which was attended by 268 participants from 26 member states and three international organizations, significant results from many experiments, including those from the new and larger machines, became available. It has now become feasible to intercorrelate data obtained from a number of similar machines; this has led to a more complete understanding of plasma behaviour. No breakthrough was reported nor had been expected towards the economical release of the energy from fusion, but there was increased understanding of the problems of production, control and containment of high-density and high-temperature plasmas.

EDITORIAL NOTE

The abstracts and discussions incorporated in the proceedings published by the International Atomic Energy Agency are edited by the Agency's editorial staff to the extent considered necessary for the reader's assistance. For the sake of speed of publication, the present Proceedings have been printed by composition typing and photo-offset lithography; within the limitations imposed by this method every effort has been made to maintain a high editorial standard. The papers remain, however, the responsibility of the named authors or participants; with several exceptions they were photographed directly from the authors' best copy.

The affiliations of authors are those given at the time of nomination.

The use in these Proceedings of particular designations of countries or territories does not imply any judgement by the Agency as to the legal status of such countries or territories, of their authorities and institutions or of the delimitation of their boundaries.

The mention of specific companies or of their products or brand-names does not imply any endorsement or recommendation on the part of the International Atomic Energy Agency.

CONTENTS OF VOL. I

SUMMARY SESSION	1
Controlled nuclear fusion research, September 1965: Review of experimental results	3
<i>Lyman Spitzer, Jr.</i>	
Исследования в области управляемого ядерного синтеза, сентябрь 1965 г. Обзор результатов экспериментов	13
<i>Лиман Спитцер</i>	
Исследования в области управляемого ядерного синтеза, сентябрь 1965 г. Обзор результатов теоретических изысканий	25
<i>Б. Б. Кадомцев</i>	
Controlled nuclear fusion research, September 1965: Review of theoretical results	29
<i>V. V. Kadomtsev</i>	
MAGNETIC WELLS (Session I)	33
Накопление плазмы с горячими ионами на установке ПР-5 (CN-21/143)	35
<i>Ю. В. Готт, М. С. Иоффе и Е. Е. Юшманов</i>	
Containment of plasma trapped in a magnetic well (CN-21/30)	53
<i>G. Francis, J. W. Hill and D. W. Mason</i>	
Chauffage et confinement de plasma dans le puits magnetique de deca II (CN-21/67)	69
<i>A. Biguet, P. Blanc, R. Gravier, P. Lacouste, H. Luc, C. Renaud, J. Tachon et D. Veron</i>	
Устойчивость плазмы в пробкотроне со стабилизирующими стержнями (CN-21/125)	83
<i>Б. А. Трубников</i>	
Stabilization by shear and negative V'' (CN-21/106)	103
<i>H. P. Furth, J. Killeen, M. N. Rosenbluth and B. Coppi</i>	
Stability of negative V'' systems (CN-21/113)	127
<i>R. M. Kulsrud</i>	
Helical fields possessing mean magnetic wells (CN-21/239)	145
<i>B. McNamara, K. J. Whiteman and J. B. Taylor</i>	
Замкнутые конфигурации с минимумом B (CN-21/133)	169
<i>Л. С. Соловьев и В. Д. Шафранов</i>	
THETA PINCHES (Session II)	191
Plasma containment and stability in a megajoule theta-pinch experiment (CN-21/34)	193
<i>H. A. B. Bodin, T. S. Green, A. A. Newton, G. B. F. Niblett and J. A. Reynolds</i>	
Plasma flow in a theta pinch (CN-21/43)	223
<i>J. A. Wesson</i>	

Stability, heating and end loss of a 3.5-MJ theta pinch (Scylla IV) (CN-21/92)	237
<i>W. E. Quinn, E. M. Little, F. L. Ribe and G. A. Sawyer</i>	
Isar I - A fast megajoule theta-pinch experiment with extremely high compression fields (CN-21/49)	249
<i>C. Andelfinger, G. Decker, E. Fünfer, A. Heiss, M. Keilhacker, J. Sommer and M. Ulrich</i>	
Plasma confinement, heating and losses in Pharos with an extended current pulse (CN-21/98)	261
<i>A. C. Kolb, W. H. Lupton, R. C. Elton, E. A. McLean, M. Swartz, M. P. Young, H. R. Griem and E. Hintz</i>	
Formation and development of hydromagnetic disturbances during the implosion phase of a preionized theta pinch (Cariddi) (CN-21/75)	275
<i>U. Ascoli-Bartoli, S. Martellucci and M. Martone</i>	
Stable and unstable behaviour of preheated plasma in linear and cusped theta pinches (CN-21/231)	287
<i>R. J. Belitz, P. Bogen, K. H. Dippel, H. L. Jordan, E. Kugler, A. Miyahara, P. Noll, J. Schlüter and H. Witulski</i>	
Energy distribution of particles leaving a theta pinch (CN-21/87) ..	301
<i>R. L. Bingham, L. M. Goldman and R. W. Kilb</i>	
Doppler shift measurements to investigate plasma rotation in the theta pinch (CN-21/54)	315
<i>M. Keilhacker, H. Herold, J. Cooper and D. E. Roberts</i>	
Toroidal theta pinch with superimposed multipole field (CN-21/51)	331
<i>G. von Gierke, F. W. Hofmann, W. Lotz, F. Rau, E. Remy, H. Wobig and G. H. Wolf</i>	
Rotating plasma experiments (CN-21/3)	341
<i>J. Bergström, S. Holmberg and B. Lehnert</i>	
STABILITY AND DIFFUSION (Session IV)	363
Неустойчивость и связанные с ней макроскопические эффекты в тороидальных разрядах (CN-21/127)	365
<i>Б. Б. Кадомцев и О. П. Погуше</i>	
Anomalous plasma diffusion in magnetic wells (CN-21/99)	383
<i>T. K. Fowler and G. E. Guest</i>	
Аномальный уход ионов в конус потерь (CN-21/214)	393
<i>A. A. Галеев</i>	
Equilibres toroïdaux dans l'approximation du tube fin; effet de courbure (CN-21/73)	417
<i>C. Mercier</i>	
Thermalization and anomalous diffusion of turbulent plasmas (CN-21/83)	435
<i>R. E. Aamodt and W. E. Drummond</i>	
Collisional and anomalous diffusion (CN-21/108)	453
<i>O. C. Eldridge and E. G. Harris</i>	
Stabilité d'un plasma de diffusion (CN-21/56)	469
<i>M. Bernard, C. Briffod, R. Frank et J. Weisse</i>	

Landau damping of electron plasma waves (CN-21/116)	485
<i>J. H. Malmberg, C. B. Wharton and W. E. Drummond</i>	
Universal instability in a thermal plasma device (Q-Machine) (CN-21/107)	499
<i>H. Lashinsky</i>	
Коллективное взаимодействие модулированных и немодулированных электронных пучков с плазмой (CN-21/181)	515
<i>A. K. Березин, Я. Б. Файнберг, Л. И. Болотин, Г. П. Березина, И. А. Безъязычный, Ю. М. Ляпкало и В. В. Лившиц</i>	
Взаимодействие высокочастотной электромагнитной бегущей волны с плазмой на установке "Дельта-2" (CN-21/219)	537
<i>С. Н. Ереус, В. Н. Курдюмов, М. Л. Левин, С. М. Осовец, Н. Я. Попова, И. А. Попов, К. В. Ходатаев и В. П. Шимчук</i>	
Взаимодействие СВЧ-излучения с турбулентной плазмой (CN-21/210)	549
<i>А. И. Кисляков, М. М. Ларинов и В. В. Рождественский</i>	
 PLASMA INSTABILITIES AND INTERACTIONS (Session 6)	569
Unified approach to resistive and micro-instabilities (CN-21/40) ..	571
<i>T. E. Stringer</i>	
Maximal ordering stability problem (CN-21/118)	595
<i>E. Frieman, K. Weimer and P. Rutherford</i>	
Collisional interchange instabilities in shear and $\int dl/B$ stabilized systems (CN-21/105)	617
<i>B. Coppi and M. N. Rosenbluth</i>	
Stability of non-uniform plasma in a magnetic field gradient (CN-21/39)	643
<i>J. D. Jukes</i>	
Колебания и устойчивость плазмы, находящейся во внешнем высокочастотном электрическом поле (CN-21/247 а)	659
<i>Ю. М. Алиев, Л. М. Горбунов, В. П. Силин и Х. Уотсон</i>	
Нелинейное взаимодействие волн в плазме (CN-21/247 б)	673
<i>А. Гайлитис, Л. М. Горбунов, Л. М. Корвижных, В. В. Пустовалов, В. П. Силин и В. Н. Цытович</i>	
Нелинейное взаимодействие электромагнитных волн в магнитоактивной плазме (CN-21/247 с)	695
<i>А. П. Кропоткин и В. В. Пустовалов</i>	
Etude d'instabilités à partir de l'équation de Vlasov dans un plasma inhomogène en géométrie cylindrique (CN-21/70)	721
<i>P. H. Rebut</i>	
Drift instabilities and electron cyclotron oscillations for arbitrary plasma pressure (CN-21/82)	735
<i>N. A. Krall and L. D. Pearlstein</i>	
Kinetic theory of particles and waves (CN-21/104)	747
<i>N. Rostoker and K. Matsuda</i>	
Equilibrium and stability of the M- and -S torus and related con- figurations (CN-21/55)	757
<i>D. Pfirsch and H. Wobig</i>	

Instability of a rotating plasma from the two-fluid equations including finite radius of gyration effects (CN-21/230) 767
G. Berge

List of Chairmen of Sessions 777

SUMMARY SESSION

CONTROLLED NUCLEAR FUSION RESEARCH,
SEPTEMBER 1965:
REVIEW OF EXPERIMENTAL RESULTS

LYMAN SPITZER, JR.
PRINCETON UNIVERSITY, PRINCETON, NEW JERSEY,
UNITED STATES OF AMERICA

It was with some diffidence that I accepted the invitation to give a brief summarizing talk on the experimental topics discussed at this Conference. There have been about 70 experimental papers presented here, and to summarize all of them would, I am sure, tax both my ability and your patience. During the last few days I have asked many of my fellow scientists, "What do you think are the most important experimental results presented at this Conference?" I thought I would perhaps look for a consensus of opinion that I could use for guidance in my talk; I found that I received a different answer from almost every person! Several of my colleagues even suggested that the most significant results were those which had been told them informally, and had not been presented to the Conference at all. It need not surprise us if such informal discussions are the most important aspect of an international conference such as this. My review, however, is based on the formal papers, and in the absence of any clear consensus among my colleagues I shall emphasize those particular results which appear to me of special interest. If my selection of topics reflects my own individual interests and associations, I hope you will forgive me.

To my way of thinking the most significant milestone of the present meeting is the substantial body of evidence that has been presented on the hydro-magnetic stabilization of open-ended systems. The success of minimum-magnetic-field ("minimum-B") configurations in stabilizing a plasma marks one more area where theory and experiment in the field of plasma physics have been brought together with gratifying results. Let me go back a little into history and discuss the gradual growth of our information on hydro-magnetic instabilities generally. Many of you will remember that hydro-magnetic theory was applied to the self-pinched discharge in the early years of the controlled fusion programme. The predictions of this theory were very shortly fulfilled by the observations; the effects were so unmistakable that it was not difficult to compare the theory with the observations. On the streak pictures of the linear or toroidal discharges that were obtained in those early years one saw clearly the diffuse plasma column, which first contracted to a narrow filament and then started to distort and kink until finally it hit the wall. Under some conditions the plasma was observed to break up into a series of blobs like a string of sausages. Since the behaviour was exactly what the theory had predicted, it took no very great experimental wisdom to conclude that observations had confirmed theory.

An address given at the concluding session.

The second confirmation of the hydromagnetic instability theory came a few years later when the theory was applied to the kink instability in strong magnetic fields. The analysis was somewhat more difficult to check because when the limits of instability are surpassed the predictions of the theory are not so easily compared with the observations. Both at the Kurchatov Institute (USSR) and at Princeton (USA) it was clear that the plasma in a toroidal device reacted rather violently when the current exceeded the Kruskal-Shafranov limit; in particular, the plasma resistivity increased substantially and large fluctuations appeared in the voltage around the toroid. It was not at all evident why the plasma behaved as it did when the stability limit was surpassed. It need not surprise us if a linearized theory, based on infinitesimal displacements, gives relatively meagre information on how a system actually behaves when large displacements develop because of some instability. However, the agreement between the theoretical and the experimental limiting current for stability was so close that most of us, I think, quite reasonably interpreted the result as another observational confirmation of hydromagnetic theory.

Another hydromagnetic instability is the flute or interchange instability, which tends to appear whenever the confining magnetic field decreases outwards from the plasma. This effect was pointed out by theorists some ten years ago; at the time it was not clear whether any of the difficulties observed in various plasmas could be ascribed to this cause. Quite apart from the many technical difficulties experienced, stability in magnetic-mirror devices was apparently achieved at that time by another influence, the line-tying achieved when cold plasma is present along the lines of force between the hot plasma and the wall. Two papers presented at this Conference show this same effect in a more controlled manner. In a paper from the Kurchatov Institute, dealing primarily with turbulent heating in a mirror device, it was shown that the presence of background gas stabilized the plasma in a simple mirror, with energetic electrons confined for 160ms, whereas reduction of the background pressure decreased this confinement time to about 0.4 ms. Similarly, in a mirror-confined plasma at General Atomic (USA), the hydromagnetic flute instability was shown to be much reduced either by the use of conducting end plates or by the injection of substantial amounts of relatively cold plasma. As a result of these effects the interchange instability in early mirror devices was sometimes suppressed. During the last two years a substantial improvement of the background pressure, required to reduce charge exchange losses, has brought the interchange instability out of hiding.

The recent successes in identifying and eliminating interchange instabilities from open-ended plasmas were sparked by experimental work at the Kurchatov Institute some four years ago, when the density in a cylindrical plasma was increased by orders of magnitude with the application of multipolar fields transverse to the axis of the cylinder. These fields increase rapidly with radial distance from the axis of symmetry; when added to a conventional mirror field they produce an absolute minimum of the magnetic field within the plasma. According to the theory, such a configuration should be completely stable for all hydromagnetic disturbances and against a number of other theoretical instabilities as well.

Since the announcement of that dramatic result at Salzburg, a number of groups have carried out investigations in this field; and at this Conference there were six papers which dealt at least in large part with this important topic, with several others providing additional related information. All six papers dealt with the confinement in a magnetic mirror of a relatively hot plasma with a radius substantially larger than the radius of gyration. In all cases either the density of the trapped particles or their mean time of confinement increased significantly when the multipolar fields were turned on, the average increase amounting to a factor of about five.

These experimental devices are quite different one from the other, with the plasma produced in different ways. One device at the Kurchatov Institute is heated with an RF magnetron, devices at Culham (UK) and Fontenay-aux-Roses (France) use plasma injected from a gun, and three devices - Alice at Livermore (USA), Ogra at the Kurchatov Institute, and Phoenix at Culham - rely on injection of energetic neutral atoms. The qualitative agreement among these six greatly different devices gives substantial assurance that the general result is correct.

More detailed diagnostic studies tend to confirm this general picture, though some discrepancies remain. Particularly in the Alice and Phoenix devices, detailed probe measures in the simple mirror configuration show the low-frequency oscillations characteristic of the rotating flutes which are attributed to the interchange instability. When a field minimum is produced within the plasma, these oscillations disappear almost entirely. On the other hand, in the Ogra device these oscillations do not disappear when the hexapole coils are energized, although they do become more irregular. The reasons underlying this behaviour are not understood.

An unexpected benefit from minimum-B fields is that they seem to diminish sharply the plasma activity associated with emission of radiation at about the ion cyclotron frequency. This result, which is shown by Ogra as well as by Alice and Phoenix, had not been predicted, I believe, by the theorists. The possibility cannot be entirely excluded that much of the plasma loss from a simple mirror is produced by this activity rather than by the interchange instability, and that the unexpected stabilization of this high-frequency activity accounts for the improved confinement with minimum-B systems. I mention this possibility simply to provide a note of scientific caution. Certainly the major result is that in a minimum-B configuration the low-frequency instabilities tend to disappear, even the high-frequency instabilities are reduced, and the plasma confinement appears substantially improved. As is often the case in an active scientific subject, more work is needed before a really conclusive picture is available.

When the hydromagnetic instability is eliminated, as we may assume it has been in these devices, the plasma confinement will necessarily be determined by some other physical factor. In three of the six devices referred to, charge exchange or even classical diffusion into the loss cone are believed to become limiting. In the other three there are apparent indications that some type of microinstability, associated with the non-Maxwellian velocity distribution, is responsible for plasma losses. Bursts of radiation at the ion cyclotron frequency are sometimes observed, together with an escape of some plasma. A somewhat similar instability in a hot-electron

plasma in a mirror device has been studied at Livermore. Theoretical study of a two-stream instability associated with the presence of the loss cone predicts that several versions of this loss-cone instability should be very serious problems in mirror devices, which are particularly vulnerable to any factor that increases the loss out the ends. However, the theory is undoubtedly approximate, and such instabilities may not yet have been observed. Perhaps within the next few years these nonhydromagnetic sources of plasma loss can also be understood and brought under control. If we can diagnose and control one major source of instability in each three- or four-year interval between these international fusion conferences, we shall be doing very well.

For filling a magnetic mirror with plasma, injection of molecular ions is used in three devices, one at Fontenay and two at Oak Ridge (USA). Breakup of molecular ions tends to form a plasma whose radius is comparable with the radius of gyration of the energetic ions. For such a configuration the hydromagnetic stability theory is scarcely applicable, and these devices show, in fact, no evidence of the low-frequency fluctuations characteristic of the interchange stability. Since the velocity distribution is violently non-Maxwellian, one would expect microinstabilities to be particularly marked in such devices.

The DCX-1 device at Oak Ridge lives up to these theoretical expectations very abundantly, and there seem to be many microinstabilities in its particular plasma. It is clear that the proton orbits are altered and the loss rate is increased by a factor of ten over the predicted value from charge exchange. The paper on DCX-1 presented here discussed which of the various microinstabilities might be important, and further work, I am sure, will help elucidate this interesting scientific question.

By contrast, the Fontenay work with molecular ion injection gives entirely different results. There are no apparent instabilities, particle loss is attributed to charge exchange, and what radiation there is in the neighbourhood of the ion-cyclotron frequency is attributed more to the injected beam than to the plasma. In other words, as far as one can tell this plasma appears to be entirely quiescent. The explanation of this very substantial difference between the two devices is a problem for the future. Two possibilities might be mentioned. First, in the Fontenay device the injected plasma has a somewhat larger spread both in phase space and in physical space of the plasma. Second, the background pressure is also greater in this device, and possibly we may be seeing here one more indication of the phenomenon I referred to a little earlier - that is, the stabilization of instabilities by a cold plasma - with the difference that in this case microinstabilities are involved rather than hydromagnetic instabilities. Evidently more work is needed to test these and other possibilities.

In DCX-2 at Oak Ridge the situation is not yet fully analysed. Plasma activity is undoubtedly present, increasing the mean energy to many times the injected energy, but its effect on the ion loss rate is not clear. More precise measures are needed to yield an understanding of the complex processes occurring in this device.

Mention should be made of the Astron (Livermore), a large machine that uses a layer of relativistic electrons trapped in a mirror to confine the

plasma. During the last year this equipment has been put into operation and the number of trapped relativistic electrons in the layer has been brought up to about one per cent of its design value. It is noteworthy that at this level the operation seems to be smooth, with no indication of any violent instability. It is always a favourable sign when one achieves a plasma with no obvious instabilities - and so the news from Astron seems highly encouraging.

In addition to the work with these major mirror machines, extensive progress has been reported at this conference on a variety of open-ended devices. Several papers have dealt with injection into a cusp; at Culham and Osaka (Japan) plasma guns have been used, while at Jutphaas (Netherlands) energetic ions have been injected. A cusp configuration is a minimum-B device and should confine a plasma with the same hydromagnetic stability as in a magnetic mirror with quadrupoles. Moreover, if a large cusp can be operated at $\beta = 1$ - that is, if the magnetic field can be entirely excluded from the plasma - the end losses, computed from a simplified theory, should be substantially less than from a large mirror device. Since the end losses from a mirror even with classical diffusion are inconveniently large, an open-ended system with substantially reduced losses would certainly be of great interest. A cusp configuration is undoubtedly a more complicated experimental tool than a mirror, but research is clearly desirable to indicate whether or not the low loss rate predicted by an idealized theoretical model can be achieved. Getting the plasma into the cusp at all is a nontrivial problem, and these experiments seem to indicate that in fact a cusp can be filled with energetic plasma. Analysis of the loss processes is only just beginning.

The early papers on controlled fusion placed very great emphasis on linear pinched discharges. This interest still continues, with 14 papers on the subject at this Conference. While it is unlikely that a linear pinch could be used for producing useful thermonuclear power, research with these devices is certainly an important phase of plasma physics research, and may help to elucidate plasma behaviour in general.

The evolution of research with the theta pinch (plasma compressed by a rapidly rising solenoidal magnetic field) is an important indication of how a large part of the controlled fusion programme is developing. Initial work in this field naturally placed primary emphasis on the temperatures reached and on the production of neutrons. Now the theta pinch is used as a very handy research tool for a wide variety of investigations, including such topics as Rayleigh-Taylor instability (Jülich, Federal Republic of Germany) and the sharpness of shock fronts (Frascati, Italy). On the central problem of plasma confinement one of the most important steps has been improving the magnetic field to eliminate the inhomogeneities and transverse fields which were responsible for slow drifts of the plasma. The theory of the theta pinch assumes that the magnetic field lines are parallel to the z axis at all times, except, of course, at the ends. By being careful to achieve this dream of the theorists, one finds practically that much better results are obtained. In the early research, the leads bringing current into the single-turn coil to produce the rapidly rising magnetic field gave rise to magnetic field inhomogeneities that produced a rapid drift of the plasma to the wall; other

inhomogeneities are believed responsible for the rotation of the plasma, which, according to one theory, is responsible for an instability which terminates plasma confinement rather abruptly.

Two particular results on plasma confinement in theta pinches may be mentioned. At Los Alamos (USA), by going to longer systems, together with a more careful design of the magnetic field, indications of the flute instability appear to have been eliminated. At the Naval Research Laboratory in Washington (USA), with careful magnetic design, long systems, and the use of reverse biased field to give closed lines of force and reduce end losses, confinement times up to $10 \mu s$ have been achieved for plasmas which appear to be at a temperature of about a kilovolt for both electrons and ions. If the plasma confinement times can be increased yet again, one can perhaps hope to investigate other types of instabilities or, if one is really hopeful, to demonstrate that other instabilities do not appear.

We pass on next to consideration of toroidal plasmas. These devices are considerably more complicated experimentally than open-ended configurations, and for this reason have not been investigated so intensively. However, as charge exchange losses and hydromagnetic flute losses are decreased in magnetic mirrors, the end losses become limiting, and the intrinsic advantage of toroidal systems in this respect is increasing the interest in these devices.

The chief problem of toroidal devices is the anomalous loss of particles across the magnetic field, sometimes called "pumpout". The evidence presented at this Conference on the subject of these losses does not add up to an entirely consistent picture. On the other hand, most of the groups working with toroidal plasmas have found that anomalous particle loss is a rather general characteristic of these plasmas. Measurements of the plasma density as a function of time are sometimes not a very reliable indication of plasma loss. When particles escape from a plasma and go to the wall on the millisecond time scale that is customary in most toroidal devices, there is ample time for the particles to return to the discharge and become reionized. To evaluate the intrinsic confinement time one must correct for this recycling by particles that leave the discharge, become neutralized at the walls, and then return to the discharge.

Different groups have used different methods in correcting for this recycling. The Tokamak (Kurchatov Institute) group has corrected for this recycling by measures of the neutral gas, both with a fast ion gauge and with measures of the neutral flux resulting when this cold gas enters the hot plasma and charge exchanges with the hot ions. In the C stellarator (Princeton), this recycling has been measured at high temperatures in helium gas with spectroscopic observations of the light intensity from the cold gas streaming back into the discharge; measures have also been made at temperatures of about 1 eV, at which no new ionization can be produced. These studies all indicate that the diffusion rate agrees in general order of magnitude with the simple diffusion formula given many years ago by Bohm. In the largest Tokamak device the losses reported are less than this theoretical value by about an order of magnitude; in the Model C stellarator the loss rate about equals the Bohm value, while in the smaller stellarators

the loss rate was about three times the Bohm formula. I would like to emphasize not the differences between the two groups, as regards the precise ratio of the recycling loss to the Bohm formula, but rather the general agreement that anomalous particle loss is present and that it is roughly within an order of magnitude of that predicted by the Bohm formula.

Moreover, this particle loss seems to be independent of the type of heating mechanism. Work with the Levitron at Livermore has shown quite conclusively that with ohmic heating and with electron-cyclotron heating the same types of fluctuations are observed; hence, ohmic heating cannot be the primary cause of these fluctuations. The instabilities seem to be an intrinsic property of a heated plasma in a toroidal chamber.

Similarly, at Princeton, a wide variety of heating methods has been used. The plasma in the C stellarator has been heated with ion-cyclotron heating, with ohmic heating, with electron-cyclotron heating. In addition, measurements have been made when there was no heat applied at all; that is, in the afterglow of electron-cyclotron or ohmic heating discharges at very low densities, when the plasma temperature remains at about one electron volt for many milliseconds. Apart from effects attributable to differences in temperature it is very difficult to see any differences in plasma confinement between these four types of plasma. They give essentially the same result over several orders of magnitude in density, over almost two orders of magnitude in temperature and about one order of magnitude in the magnetic field. Thus, early hopes that a toroidal plasma would become quiescent in the absence of any electric current along the magnetic field, and that pumpout would disappear together with ohmic heating, seem to have been dispelled.

A discrepant and more hopeful set of results has been obtained at Munich-Garching (Federal Republic of Germany), where the measured density of a toroidal caesium plasma, together with the known input rate of caesium ions, seems to require an equilibrium loss rate about equal to the collisional diffusion value, and less than a tenth of the anomalous value predicted from the Bohm formula. Obviously it is of great interest to explore in detail the conditions under which a toroidal plasma is confined with no anomalous particle losses.

The theoretical explanation of pumpout is still a mystery. One possibility is that hydromagnetic instabilities are involved; since the losses are apparently not much affected by shear, an instability of resistive type must be assumed. However, some entirely different process may well be responsible. If the theorists uncover new instabilities during the next three years at the same rate as during the past three years, we shall have an even wider variety of possible mechanisms to choose from at the next conference.

Partly because of the successful stabilization by minimum-B fields of interchange instabilities in mirror systems, much interest has developed in a related technique for toroidal systems. A true minimum in magnetic field, different from zero, apparently is not possible in toroidal geometry, but one can device a configuration which is stable on the average, which we may call a minimum- \bar{B} system. If hydromagnetic resistive instabilities are responsible for pumpout, a minimum- \bar{B} system should provide at least partial stabilization. The extensive theoretical work in this field will not be summarized here; but mention should be made of the preliminary work

on an octopole system (General Atomic) which should provide a minimum- \bar{B} configuration. Plasma is injected into this system from a gun and the confinement of energetic ions analysed. Most of the experiments carried out to date are affected by a large influx of neutral gas, but tentative measures at low density suggest that the confinement time of the energetic ions is down at the limiting value set by the support rods which cross the plasma. There seems to be no evidence for any specific plasma instability in this work. Quiescent, stable confinement of plasma at appreciable densities in a device of this type would undoubtedly be a major milestone of the controlled fusion programme.

Many papers were presented at this Conference on a wide variety of methods for pumping energy into a plasma. I shall mention here only a small fraction of the important results obtained in this work. The Kharkov (USSR) group has reported that ion-cyclotron resonance heating increases the positive ion temperature to about 2000 eV within 10 μ s, with no further increase. Similar positive ion temperatures in short mirror sections of the C stellarator have been reported by the Princeton scientists, who suggest a theoretical explanation for the levelling off of the ion temperature. Direct heating of the plasma electrons was also observed by the Princeton group; this effect, which had not been anticipated, can apparently be attributed to the inverse of Landau damping.

Another method of pumping energy into an ionized gas is that of turbulent heating, which makes use of the interactions between the plasma and a beam of charged particles. An extensive group of papers has been presented on this scientifically fascinating subject from the Kurchatov Institute, Massachusetts Institute of Technology (USA), Oak Ridge, and Sukhumi (USSR). In this technique, passage of an intense electric current or an initially mono-energetic electron beam through a gas can heat electrons rather rapidly to relatively high energies. Positive ions are also heated, though to a lesser extent. This heating method uses a number of plasma instabilities to randomize the available energy in the electron drift current or beam. Certainly the philosophy "If you can't lick'em, join 'em" is frequently a useful one. The experimental results reported here indicate that in some cases the average energy of the heated plasma is very substantially less than the maximum energy reached by a few very energetic particles. However, there is no question but that this method provides a rapid and effective method for heating plasma in open-ended systems. From a physics standpoint, the detailed understanding of the complex processes occurring in turbulent heating offers a substantial challenge.

Another related method of plasma heating, which also relies on plasma instabilities to randomize directed kinetic energies, is the use of strong shocks. It has been believed for several years that behind a collisionless shock instabilities would provide the randomization of velocities that collisions provide in normal shocks. A paper from the Novosibirsk (USSR) group discussed this effect, and shows experimentally that temperatures of 10 keV can be achieved, both for ions and electrons. This technique is not an easy one to apply, in view of the very high voltage required, but it offers certain advantages in very rapid heating of a plasma.

The use of electron cyclotron waves for plasma heating - a technique pioneered in large part at Oak Ridge - is a new and useful tool that is receiving greater attention. I have already discussed the important part played by this technique in research with toroidal plasmas. At this Conference papers from the Kurchatov Institute and from Saclay (France) have discussed specifically the application to plasmas of ultra-high frequencies in the neighbourhood of the electron cyclotron frequency. Possibly the end losses from open-ended systems might be suppressed by this technique.

Another separate field of research is the heating and confinement of plasma by intense RF magnetic fields, with a frequency much smaller than the electron cyclotron frequency. Most of this work has been done in the USSR, with four papers on this subject. Apparently strong RF fields can indeed be helpful in plasma stabilization. Streak photographs obtained at the Kurchatov Institute show that the instabilities in a linear plasma can be effectively suppressed by 15 kA of RF current in hexapole rods. Research at Sukhumi indicates that a similar technique, using a rotating multipolar field, is effective in toroidal systems, and seems to provide equilibrium as well as stability.

Finally, some mention should be made of the many papers dealing with basic problems of plasma physics not necessarily related to any specific controlled fusion device. In this category are included the research at Stockholm (Sweden) on rotating plasmas, which shows such gratifying agreement with theory, the elegant experimental demonstration of Landau damping at General Atomic, and the work at Culham and at Leningrad (USSR) on propagation of electromagnetic waves through turbulent plasmas. The research on plasma production by laser evaporation of small droplets, at Frascati and at United Aircraft (USA), is of particular interest in that it may mark the beginning of an active research field.

After this brief and rather superficial survey of the experimental work reported in this Conference, let us stop, look back at our work, and ask ourselves, "Are we approaching the goal towards which many of us started with such high hopes a number of years ago - the release of controlled fusion power for the benefit of mankind?" I think the answer to this question is simple and obvious - we do not know. We cannot say what lies in territory that is unexplored and uncharted. Our course towards controlled fusion has encountered many obstacles in the past. Most of the serious ones have been overcome, sometimes after years of effort by a great number of scientists. We can be sure that there will be many other obstacles ahead but we have good reason to hope that these will be surmounted by the co-operative efforts of scientists in many nations.



ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ УПРАВЛЯЕМОГО ЯДЕРНОГО СИНТЕЗА, СЕНТЯБРЬ 1965 г. ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

ЛИМАН СПИТЦЕР
ПРИНСТОНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИНСТОН, НЬЮ ДЖЕРСИ,
США

С некоторым колебанием я принял приглашение кратко подвести итог результатам обсуждения экспериментальных тем затронутых на данной конференции. На эти темы было представлено около 70 докладов, и я уверен, что обобщение всех этих докладов подвергло бы испытанию как мои способности, так и ваше терпение. За последние дни я задавал многим моим коллегам-ученым вопрос: "Каковы, по вашему мнению, наиболее важные результаты экспериментов, о которых говорилось на этой конференции?" Я полагал увидеть возможное единодушие во взглядах, которое можно было бы использовать в качестве руководства в моем обобщении, однако я обнаружил, что почти все, кого я спрашивал, дали на мой вопрос различные ответы. Некоторые из моих коллег даже дали понять, что важнейшие результаты ответов были сообщены им неофициально, и что о них вообще не говорили на конференции. Мы не должны удивляться тому, что подобные неофициальные дискуссии являются наиболее важным аспектом такой международной конференции, как эта. Тем не менее, мой обзор основывается на официальных докладах и ввиду отсутствия четкого единства во взглядах среди моих коллег, я отмечу те конкретные результаты, которые, по моему мнению, представляют особый интерес. Надеюсь, что вы простите меня, если мой выбор тем явится отражением только моих собственных интересов и ассоциаций.

По моему мнению, важнейшей вехой настоящего совещания является представление существенных доказательств по вопросу гидромагнитной стабилизации систем открытых концов. Успех конфигураций минимального магнитного поля ("минимум \dot{B} ") в стабилизации плазмы отмечает еще одну область, где теория и эксперимент в области физики плазмы соединены с удовлетворительными результатами. Разрешите мне сделать небольшой экскурс в историю и проследить, как постепенно накапливалась информация по вопросу гидромагнитной неустойчивости вообще. Многие из вас помнят, что гидромагнитная теория была применена к самосжатым разрядам в первые годы осуществления программы управляемого синтеза. Предсказания на основе этой теории очень скоро сбылись в процессе наблюдений; результаты были настолько ясными, что не потребовало труда сравнить результаты теоретических расчетов с этими наблюдениями. На высокоскоростных фотографиях линейных и тороидальных разрядов, полученных в те годы, была ясно видна колонка рассеянной плазмы, которая вначале сжимается

Речь на заключительной сессии, перев. с англ.

в узкую нить накала, а затем начинает разрушаться и перегибаться до тех пор, пока в конечном итоге не ударит в стенку. При некоторых условиях наблюдалось деление плазмы на серию шариков, подобно связке сосисок. Так как это поведение в точности соответствовало положениям теории, не требовалось очень большой мудрости при проведении экспериментов с тем, чтобы заключить, что наблюдения подтверждают теорию.

Второе подтверждение теории гидромагнитной неустойчивости было получено несколькими годами позже, когда эта теория была применена к неустойчивости типа перегиба в сильных магнитных полях. Этот вывод в какой-то степени было труднее проверить, так как в случае превышения пределов неустойчивости предсказания теории не так-то легко сравнить с наблюдениями. Как в Институте им. Курчатова (СССР), так и в Принстонском университете (США) было известно, что плазма в тороидальном устройстве довольно бурно реагирует в том случае, если ток превышает предел Крускала-Шафранова; в частности, существенно увеличивается резистивность плазмы, и появляются значительные флуктуации в напряжении вокруг тороида. Не было совсем ясно, почему плазма ведет себя таким образом в случае превышения предела стабильности. Нас не должно удивлять, если линеаризованная теория, основывающаяся на бесконечно малых сдвигах, дает относительно скучную информацию о том, каким образом система фактически ведет себя, если имеет место развитие больших сдвигов в результате некоторой неустойчивости. Тем не менее, согласие теории и практики в вопросе ограничения тока для стабильности было настолько хорошим, что многие из нас, по моему мнению, совершенно обосновано расценивают этот результат, как еще одно подтверждение гидромагнитной теории, полученное в результате наблюдений.

Другим видом гидромагнитной неустойчивости является желобковая или обменная неустойчивость, которая имеет тенденцию появляться как только удерживающее магнитное поле уменьшается в сторону от плазмы. На этот момент теоретики указывали около 10 лет назад; в то время не было ясно, можно ли любую из трудностей, наблюдавшихся в различных плазмах, объяснить этим случаем. Совершенно независимо от многих известных по опыту трудностей стабильность в установке с магнитной пробкой была в то время достигнута очевидно благодаря другому влиянию, линия соединения достигается тогда, когда холодная плазма находится вдоль силовых линий между горячей плазмой и стенкой. Два доклада, представленных на этой конференции, демонстрируют тот же результат при наличии большего контроля. В докладе из Института им. Курчатова, в котором речь идет главным образом о турбулентном нагреве в установке с магнитной пробкой, было показано, что присутствие газового фона электронов высокой энергии стабилизирует плазму в простой магнитной пробке, удерживающую в течение 160 мсек в то время как уменьшение фонового давления снижает время удерживания до 0,4 мсек. Аналогичным образом в плазме, удерживаемой пробкой (Дженерал Атомик, США), было показано, что гидромагнитная желобковая неустойчивость должна значительно уменьшиться или при использовании проводящих конечных пластин, или за счет впрыскивания значительных количеств относительно холодной плазмы. Результатом этого явилось то, что в первых установках с магнитными пробками иногда подавлялась обменная неустойчивость. В течение по-

следних двух лет существенное улучшение фонового давления, требуемого для уменьшения потерь от перезарядки, вывело обменную неустойчивость из прорыва.

Недавние успехи в опознании и устранении обменных неустойчивостей из плазм с открытыми концами появились в процессе экспериментальных работ в Институте им. Курчатова около четырех лет назад, когда плотность цилиндрической плазмы увеличивалась на порядки величин с применением многополярных полей, поперечных оси цилиндра. Эти поля быстро увеличиваются вместе с радиальным расстоянием от оси симметрии; в случае добавления их к полю обычной магнитной пробки они создают абсолютный минимум магнитного поля в самой плазме. В соответствии с теорией такая конфигурация должна быть совершенно устойчивой ко всем гидромагнитным помехам и также к целому ряду других теоретических неустойчивостей.

С момента сообщения в Зальцбурге об этом необычайном результате целый ряд групп провел исследования в этой области, и на данной конференции представлено 6 докладов, в большей части, обсуждающих затронутую тему, а также ряд других тем, дающих дополнительную информацию по этому вопросу. Во всех шести докладах речь идет об удерживании в магнитной пробке относительно горячей плазмы с радиусом значительно большим радиуса вращения. Во всех случаях значительно увеличиваются либо плотность захваченных частиц, либо их среднее время удерживания, если включены многополярные поля; среднее увеличение достигает коэффициента около пяти.

Эти экспериментальные устройства значительно отличаются одно от другого, и плазма получается на них различными способами. Установка в Институте им. Курчатова нагревается с помощью радиочастотного магнитрона, установки в Каламе (СК) и Фонтенэ (Франция) используют плазму инжектируемую из пушки, а три установки - "Алиса" в Ливерморе (США), "Огра" в Институте им. Курчатова и "Феникс" в Каламе (СК) работают на принципе инжектирования энергетических нейтральных атомов. Качественное согласие между этими шестью, значительно отличающимися друг от друга, устройствами дает большую уверенность в том, что общий вывод является правильным.

Более детальные исследования имеют тенденцию к подтверждению общей картины, несмотря на наличие некоторых расхождений. В частности, на установках "Алиса" и "Феникс" детальные зондовые замеры в магнитной пробке простой конфигурации показывают низкочастотную характеристику вибрации вращающихся желобков, что приписывается обменной неустойчивости. Когда поле-минимум создается внутри плазмы, то эти вибрации исчезают почти полностью. С другой стороны, на установке "Огра" эти вибрации не исчезают, когда гексаполюсные катушки возбуждены, хотя они становятся более неравномерными. Причины, лежащие в основе такого поведения, не установлены.

Непредвиденным преимуществом полей минимума-В является то, что, как кажется, они резко уменьшают плазменную активность, связанную с излучением радиации почти на частоте ионного циклотрона. Этот результат, показанный установкой "Огра", а также установками "Алиса" и "Феникс" не был предсказан, как я полагаю, теоретиками. Нельзя пол-

ностью исключить возможность того, что большинство плазменных потерь от простой магнитной пробки образуется скорее в результате этой активности, а не в результате обменной неустойчивости и что эта неожиданная стабилизация этой высокой частотной активности объясняет улучшение удерживания при применении систем минимума-В. Я упоминаю эту возможность просто для того, чтобы сделать научное предостережение. Конечно, главным результатом является то, что в конфигурации минимума-В низкочастотные неустойчивости имеют тенденцию к исчезновению и даже высокочастотные неустойчивости уменьшены, а удерживание плазмы, кажется, существенно улучшенным. В процессе активной разработки научной темы часто случается, что получение окончательных выводов требует более длительной предварительной работы!

Если гидромагнитная неустойчивость, которая, как мы можем предполагать, имела место в этих приборах, устранена, удерживание плазмы обязательно будет определяться другими физическими факторами. Полагают, что в трех из шести упомянутых устройств перезарядка или даже классическая диффузия в конусе потерь станет ограниченной. В других трех имеют место очевидные признаки, что один из видов микронеустойчивости, связанной с распределением немаксвелловской скорости, является причиной плазменных потерь. Иногда наблюдаются вспышки радиации на ионно-циклотронной частоте и при этом наблюдается утечка некоторых количеств плазмы. В некотором роде сходная неустойчивость в плазме горячих электронов в установке с магнитной пробкой была изучена в Ливерморе. Теоретическое изучение двухпоточной неустойчивости, связанной с наличием конуса потерь предсказывает, что несколько вариантов этой неустойчивости конуса потерь должны быть очень серьезными проблемами в установках с магнитной пробкой, которые, в частности, чувствительны к любому фактору, увеличивающему потери с концов. Тем не менее теоретические выкладки без сомнения являются лишь приблизительными, и такие неустойчивости еще не могли наблюдаться. Может быть в течение нескольких последующих лет эти негидромагнитные источники плазменных потерь могут быть также поняты и взяты под контроль. Если мы сможем исследовать и контролировать главный источник неустойчивости в каждый из трех-четырех-летних перерывов между международными конференциями по синтезу, то мы будем на правильном пути.

На трех установках одна – в Фонтенэ и две – в Ок-Ридже (США) – для наполнения магнитной пробки плазмой – применяется инжектирование молекулярных ионов. Деление молекулярных ионов имеет тенденцию к формированию плазмы, радиус которой сравним с радиусом вращения энергетических ионов. Теория гидромагнитной устойчивости едва ли применима для такой конфигурации, и эти установки не дают фактически доказательств низкочастотной флуктуационной характеристики обменной неустойчивости. Так как распределение скорости является ярко выраженным немаксвелловским, предполагают, что микронеустойчивости должны особо обозначаться в этих устройствах.

Установка постоянного тока (ДСХ – 1) в Ок-Ридже действует согласно этим теоретическим предположениям и, кажется, что в этой конкретной плазме имеется много микронеустойчивостей. Ясно, что протоновые орбиты изменены, и интенсивность потерь увеличивается на коэффициент 10

сверх предсказанной величины от перезарядки. Доклад об установке постоянного тока, представленный здесь, посвящен вопросу о том, какая из различных микронеустойчивостей может быть важной; я уверен, что дальнейшая работа поможет выяснить этот интересный научный вопрос.

Напротив, работы в Фонтенэ с инжектированием молекулярных ионов дают совершенно другие результаты. В данном случае нет очевидных неустойчивостей, в качестве причины потерь частиц указывается перезарядка, и радиация по соседству с ионно-циклотронной частотой объясняется больше за счет инжектируемого пучка, чем за счет плазмы. Другими словами, насколько можно сказать, эта плазма кажется находящейся в полном покое. Объяснение этому очень существенному различию между двумя устройствами является проблемой будущего. Следует упомянуть о двух возможностях. Первая, на установке Фонтенэ инжектируемая плазма распространяется в большей степени как в фазовом, так и в физическом пространстве плазмы. Вторая, фоновое давление также больше на этой установке и, возможно, нам удастся получить здесь еще одно доказательство явления, о котором я упоминал немного раньше, — т.е. стабилизация неустойчивости при холодной плазме — с той разницей, что в этом случае микронеустойчивости занимают большее место, чем гидромагнитные неустойчивости. Очевидно имеется необходимость проделать большую работу с тем, чтобы проверить эти и другие возможности.

На установке постоянного тока (ДСХ-2) в Ок-Ридже положение еще не изучено полностью. Здесь, несомненно, имеет место плазменная активность, которая увеличивает среднюю энергию во много раз по сравнению с инжектированной энергией, но ее воздействие на интенсивность ионных потерь не ясно. Для достижения понимания сложных процессов, происходящих в этом устройстве, необходимы более точные измерения.

Следует упомянуть о большой машине "Астрон" (в Ливерморе), которая использует слой релятивистских электронов, захваченных в магнитную пробку для удерживания плазмы. Установка приведена в действие в прошлом году, и целый ряд захваченных релятивистских электронов в слое был доведен почти до одного процента их проектной величины. Следует отметить, что на этой стадии эксплуатация кажется протекающей хорошо, без признаков какой-либо значительной неустойчивости. Всегда является благоприятным признаком тот случай, когда получается плазма без очевидных неустойчивостей — и таким образом сведения с установки "Астрон" кажутся весьма обнадеживающими.

В дополнение к работе с этими основными пробковыми машинами с магнитными пробками на этой конференции было сообщено о большом успехе по ряду устройств с открытыми концами. Несколько докладов были посвящены инжектированию в конус; в Каламе и Осака (Япония) были использованы плазменные пушки, в то время как в Джутфаасе (Нидерланды) — инжектировались энергетические ионы. Конусная конфигурация является устройством минимум-В и должна удерживать плазму с той же гидромагнитной стабильностью, что и магнитная пробка с квадрополями. Более того, если на большом конусе можно работать при $\beta = 1$, т.е. если магнитное поле может быть полностью исключено из плазмы, конечные потери, вычисленные по упрощенной теории, должны быть значительно меньше, чем на большой установке с магнитной пробкой. В связи с тем, что ко-

нечные потери на установке с магнитной пробкой даже с классической диффузией слишком велики, система открытых концов со значительно сокращенными потерями, конечно, будет представлять большой интерес. Конусная конфигурация несомненно является более сложным экспериментальным инструментом, чем установка с магнитной пробкой, но совершенно очевидна целесообразность установления того, можно ли достичь на этой идеальной теоретической модели той низкой интенсивности потерь, которая была предсказана. Введение плазмы в конус само по себе является серьезной проблемой, и, кажется, что эти эксперименты говорят о реальной возможности заполнения конуса энергетической плазмой. Исследования процессов потерь только что начинаются.

В первых докладах по вопросам управляемого синтеза весьма большое значение придавалось линейно сжатым разрядам. Интерес к этой проблеме не ослаб, о чём говорят 14 докладов по этому вопросу на данной конференции. В то время, как возможность использования линейного плазменного шнура для производства полезной термоядерной силы является мало вероятной, исследование с этими приборами без сомнения является важной фазой исследований в области физики плазмы и может помочь пролить свет на поведение плазмы вообще.

Эволюция в исследованиях с тета-пинчем (плазма, сжатая с помощью быстро возрастающего соленоидного магнитного поля) является важным признаком того, насколько велика та часть программы управляемого синтеза, которая находится в процессе развития. При проведении первонаучальных работ в этой области основное внимание, естественно, уделялось достижаемым температурам и производству нейтронов. Теперь тета-пинч используется как очень удобный инструмент для целого ряда исследований, включая такие темы, как неустойчивость Рээлей-Тейлора (Юлих, ФРГ) и острота фронтов ударной волны (Фраскати, Италия). Что касается центральной проблемы удерживания плазмы, то одним из наиболее важных шагов было улучшение магнитного поля с целью устранения неоднородностей и поперечных полей, которые являются причиной медленного перемещения плазмы. Теория тета-пинча предполагает, что линии магнитного поля параллельны оси Z все время, за исключением, конечно, концов. Стремясь к достижению этой мечты теоретиков, приходишь к выводу о том, что практически получены значительно лучшие результаты. В ранних исследованиях проводники, проводящие ток в однозаходную катушку возбуждения для получения быстро нарастающего магнитного поля, дали толчок неоднородности магнитного поля, которая создает быстрое перемещение плазмы к стенке; полагают, что другие неоднородности являются причиной вращения плазмы, которое, согласно теории, является причиной неустойчивости, резко ограничивающей удерживание плазмы.

Можно упомянуть о двух конкретных результатах по вопросу удерживания плазмы в тета-пинче. В Лос-Аламосе (США), где используются более длинные системы и более тщательно проектируется магнитное поле, кажется, достигнуто устранение признаков желобковой неустойчивости. В Naval Research Laboratory в Вашингтоне (США), используя тщательное проектируемое магнитное поле, длинные системы и поперечно смещенное поле для обеспечения замкнутых силовых линий и сокращения конечных потерь, было достигнуто время удерживания до 10 мксек для плазм, которые

имеют температуру около одного киловольта как для электронов, так и для ионов. Если время удерживания плазмы может быть вновь увеличено, то по-видимому можно будет надеяться на возможность исследования других типов неустойчивости или, при наличии настоящего оптимизма, показать отсутствие других неустойчивостей.

Теперь мы переходим к рассмотрению установок тороидальных плазм. Эти устройства более сложны для экспериментов, чем конфигурации открытых концов и по этой причине не были исследованы столь интенсивно. Тем не менее, в связи с тем, что потери при перезарядке и гидромагнитные желобковые потери уменьшены в магнитных пробках, конечные потери становятся ограниченными и в связи с присущим тороидальным системам преимуществом в этом отношении увеличивается интерес к этим устройствам.

Главной проблемой тороидальных устройств является аномальная потеря частиц в магнитном поле, которая иногда называется "выкачкой". Доказательство, представленное на данной конференции по вопросу этих потерь, не создает полностью последовательной картины. С одной стороны, большинство групп, работающих с тороидальными плазмами, установило, что аномальная потеря частиц является до некоторой степени общей характеристикой этих плазм. Замеры плазменной плотности как функции времени не всегда являются очень надежным признаком плазменной потери. Если частицы вылетают из плазмы и перемещаются к стенке в миллисекундных масштабах, что является обычным в большинстве тороидальных устройств, то имеется достаточно времени для того, чтобы частицы вернулись в зону разряда и стали вновь ионизированными. С тем, чтобы оценить присущее им время удерживания, нужно корректировать повторный цикл с помощью частиц, которые покидают зону разряда, становятся нейтрализованными на стенке и затем возвращаются в зону разряда.

Различные группы использовали различные методы корректирования повторного цикла. Установка "Токамак" (в Институте им. Курчатова) корректировала этот повторный цикл посредством замеров нейтрального газа как с помощью контрольно-измерительного прибора на быстрых ионах, а так и путем замеров нейтрального потока, получаемого в том случае, когда этот холодный газ поступает в горячую плазму и имеет место обмен зарядом с горячими ионами. На стеллараторе "С" (в Принстоне) этот повторный цикл был замерен при высоких температурах в гелии с спектроскопическими наблюдениями световой интенсивности из холодного газа, текущего обратно в зону разряда; замеры были сделаны также при температуре около 1 эв, при которой не может быть создана новая ионизация. Эти исследования говорят о том, что скорость диффузии согласуется в общем порядке величины с простой формулой диффузии, данной много лет назад Бором. На самой большой установке "Токамак" сообщенные сведения о потерях меньше этой теоретической величины примерно на один порядок величины; в модели стелларатора "С" скорость потерь примерно равна величине, данной Бором, в то время как на меньших стеллараторах скорость потерь превышала формулу Бора почти в три раза. Мне хотелось бы подчеркнуть не различия между этими группами, касающиеся отношения точного коэффициента потерь при повторном цикле к формуле Бора, а общее согласие в том, что потери аномальных частиц имеют место и что они,

грубо говоря, находятся в пределах порядка величины, предсказываемой формулой Бора.

Более того, эта потеря частиц, кажется, не зависит от типа нагревающего механизма. Работа на установке "Левитрон" в Ливерморе показала совершенно определенно, что при омическом нагреве и электронно-циклотронном нагреве наблюдаются те же виды флуктуаций. Следовательно, омический нагрев не может быть главной причиной этих флуктуаций. Неустойчивости являются, по-видимому, внутренним свойством нагретой плазмы в тороидальной камере.

Подобным образом, в Принстоне были использованы весьма различные методы нагрева. В стеллараторе "С" плазма нагревалась при помощи ионно-циклотронного нагрева, омического нагрева, электронно-циклотронного нагрева. Кроме того, были сделаны замеры тогда, когда вообще не было нагрева; т.е. в период послесвечения электронно-циклотронных или омических нагревающих разрядов при очень низких плотностях, когда температура плазмы остается на уровне около 1 эв в течение многих миллисекунд. Независимо от эффектов, которые можно отнести к различиям в температуре, очень трудно усмотреть какие-либо различия в удерживании плазмы между этими четырьмя видами плазмы. По существу они дают один и тот же результат в пределах нескольких порядков величины в плотности, почти в пределах двух порядков величины при температуре и около одного порядка величины в магнитном поле. Таким образом, преждевременные надежды на то, что тороидальная плазма станет неподвижной при отсутствии электрического тока вдоль магнитного поля и на то, что выкачка исчезнет вместе с омическим нагревом, кажутся не имеющими основания.

Другие и более обнадеживающие результаты были получены в Munich-Garching (Западная Германия), где замеренная плотность плазмы тороидального цезия вместе с известной скоростью подачи ионов цезия, кажется, требует равновесия скорости потерь, которая почти равна величине ударной диффузии и меньше одной десятой аномальной величины, предсказанной формулой Бора. Несомненно, большой интерес представит детальное исследование условий, при которых тороидальная плазма удерживается без потерь аномальных частиц.

Теоретическое объяснение выкачки пока еще является загадкой. Возможно, что здесь замешаны гидромагнитные неустойчивости; так как потери очевидно не поддаются большому влиянию со стороны шара; следует предположить неустойчивость резистивного вида. Тем не менее, их причиной на равных основаниях может служить совершенно другой процесс. Если теоретики будут обнаруживать новые неустойчивости в течение следующих трех лет такими же темпами, как и в течение прошедших трех лет, тогда мы будем иметь большее число возможных механизмов для отбора на следующей конференции!

Частично ввиду успешной стабилизации полями минимума-В обменных неустойчивостей в системах с магнитными пробками большой интерес был проявлен к методу для тороидальных систем. Точный минимум в магнитном поле, отличающийся от нуля, очевидно невозможен в тороидальной геометрии, но можно разработать конфигурацию, стабильную на среднем уровне, которую мы можем назвать системой минимума- \bar{B} . Если гидромагнитные резистивные неустойчивости являются причиной выкачки, система ми-

нимума-В должна обеспечивать по меньшей мере частичную стабилизацию. Здесь не будет обобщена обширная теоретическая работа в этой области, но следует упомянуть о предварительной работе по октопольной системе (Дженерал Атомик, США), которая должна обеспечить конфигурацию минимума-В. Плазму инжектируют в эту систему из пушки, и анализируют удерживание энергетических ионов. Большинство экспериментов, проведенных до настоящего времени, находилось под воздействием большого притока нейтрального газа, но мероприятия экспериментального характера при низкой плотности предполагают, что время удерживания энергетических ионов уменьшается на ограниченную величину, установленную при помощи опорных стержней, пересекающих плазму. Кажется, нет никаких доказательств специфически плазменной неустойчивости в этом эксперименте. Постоянное, стабильное удерживание плазмы на поддающихся оценке плотностях на установке этого типа несомненно явится главной вехой программы управляемого синтеза.

На этой конференции было представлено много докладов по целому ряду методов ввода энергии в плазму. Я упомяну здесь лишь небольшую часть важных результатов, полученных в этой области. Харьковская группа (СССР) сообщила, что резонансный нагрев ионного циклотрона увеличивает положительную ионную температуру примерно до 2000 эв в течение 10 мксек без дальнейшего увеличения. Об аналогичных ионных температурах в коротких секциях с магнитной пробкой стелларатора "С" сообщили ученые Принстона, которые предложили теоретическое объяснение выравнивания ионной температуры. Прямой нагрев электронов плазмы наблюдался также Принстонской группой; этот неожиданный результат, можно, очевидно, объяснить противоположностью затухания Ландау.

Другим методом ввода энергии в ионизированный газ является метод турбулентного нагрева, который использует взаимодействия между плазмой и пучком заряженных частиц. Значительное количество докладов по этому, в научном отношении замечивому, вопросу было представлено Институтом им. Курчатова, Массачусетским институтом технологии (США), Окриджским институтом и Сухумским институтом (СССР). При этом методе прохождения интенсивного электрического тока или первоначально моноэнергетического электронного пучка через газ можно сравнительно быстро нагреть электроны до относительно высоких энергий. Положительные ионы также нагреваются, хотя и в меньшей степени. Этот метод нагрева использует целый ряд плазменных неустойчивостей для разупорядочения энергии, имеющейся в электронном потоке движущегося тока или пучка. Конечно, высказывание: "Если вы не можете победить их, присоединяйтесь к ним", очень часто является полезным. Результаты экспериментов, о которых сообщалось здесь, говорят о том, что в некоторых случаях средняя энергия нагретой плазмы значительно меньше максимума энергии, достигаемой небольшим количеством частиц с очень большой энергией. Однако нет сомнения в том, что этот метод обеспечивает быстрое и эффективное нагревание плазмы в системах открытых концов. С точки зрения физики, на пути полного понимания сложных процессов, происходящих при турбулентном нагреве, стоят серьезные препятствия.

Другим родственным методом нагрева плазмы, который основывается на плазменных неустойчивостях в целях разупорядочения управляемых ки-

нетических энергий, является использование сильных ударов. В течение нескольких лет существовало мнение о том, что за бесстолкновительным ударом неустойчивости создают разупорядочение скоростей, которые столкновения создают при нормальных ударах. В докладе Новосибирской группы (СССР) обсуждается этот эффект, и экспериментально показано, что температуры в 10 кэв могут быть достигнуты как для ионов, так и для электронов. Этот метод является нелегким для применения в связи с тем, что требуется очень высокое напряжение, но он дает определенные преимущества, заключающиеся в быстром нагреве плазмы.

Использование электронно-циклотронных волн для нагрева плазмы – метод, впервые примененный в больших масштабах в Ок-Ридже – является новым и полезным способом, привлекающим большое внимание. Я уже говорил о важной роли этого метода в работах с тороидальными плазмами. В представленных на конференцию докладах Института им. Курчатова и Центра в Сакле (Франция) были специально обсуждены вопросы применения к плазмам сверхвысоких частот наряду с электронно-циклотронной частотой. Возможно, что конечные потери от систем открытых концов могут быть подавлены при этом методе.

Другой отдельной областью исследования является нагрев и удерживание плазм при помощи интенсивных радиочастотных магнитных полей с частотой, значительно меньшей электронно-циклотронной частоты.

Большая часть этой работы была проделана в СССР, относительно которой было представлено 4 доклада. Очевидно, что сильные радиочастотные поля на самом деле могут быть полезны в стабилизации плазмы. Высокоскоростные фотографии, полученные в Институте им. Курчатова, показывают, что неустойчивости в линейной плазме могут быть эффективно подавлены при помощи тока 15 ка радиочастоты в гексапольных стержнях. Исследования в Сухуми говорят о том, что аналогичный метод, использующий вращающееся многополюсное поле, является эффективным в тороидальных системах и, кажется, обеспечивает равновесие и стабильность.

В заключение, следует упомянуть о многих докладах, посвященных основным проблемам физики плазм, не имеющим прямого отношения к специальным устройствам управляемого синтеза. К этой категории относятся исследования в Стокгольме (Швеция) по вопросу вращающихся плазм, которые показывают удовлетворительное совпадение мнений теории и практики, хорошо проведенные эксперименты по вопросу затуханий Ландау в Дженирал Атомик и работы в Каламе и в Ленинграде (СССР) по распространению электромагнитных волн в турбулентных плазмах. Исследования по вопросу производства плазмы выпариванием маленьких капелек с помощью лазера в Фраскати и в United Aircraft (США) представляют определенный интерес, так как они знаменуют начало области активных исследований.

После этого короткого и относительно поверхностного обзора экспериментальных работ, о которых было сообщено на этой Конференции, давайте остановимся, оглянемся назад и спросим самих себя: "Приблизились ли мы к цели, движение к которой многие из нас начали с такими большими надеждами много лет назад, а именно, к вы свобождению энергии управляемого синтеза на благо человечества?" Я думаю, что ответ на этот вопрос будет простым и ясным – мы не знаем. Мы не можем сказать, что представляют собой области, которые не исследованы и не нанесены на карту. На нашем

пути к управляемому синтезу в прошлом встретились многие трудности. Многие из серьезных трудностей были преодолены в результате усилий со стороны большого числа ученых на протяжении ряда лет. Мы можем быть уверены, что впереди будет много других трудностей, и у нас есть все основания надеяться, что они будут преодолены совместными усилиями ученых во многих странах.



ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ УПРАВЛЯЕМОГО ЯДЕРНОГО СИНТЕЗА, СЕНТЯБРЬ 1965 г. ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИЗЫСКАНИЙ

Б.Б. КАДОМЦЕВ
ИНСТИТУТ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ
им. И.В. КУРЧАТОВА, МОСКВА,
СССР

Вторая конференция по физике плазмы и исследованиям в области управляемого синтеза закончилась, и все мы, как мне кажется, считаем, что она прошла весьма успешно. Мы с интересом прослушали более 100 докладов, обсудили наиболее интересные результаты опытов и получили довольно полное представление о современном состоянии как экспериментальных, так и теоретических исследований.

В непринужденной и приятной обстановке коллеги из различных стран, работающие в одной и той же области физики, имели возможность обсудить свои результаты, поделиться своими надеждами и разочарованиями, найти общие идеи и точки зрения. Той непринужденной и деловой обстановке, которая царила здесь все эти дни, во многом способствовала прекрасная организация конференций, и все мы испытываем чувство искренней благодарности к гостеприимным хозяевам конференции, и прежде всего к д-ру Дж. Адамсу, директору лаборатории "Калам".

Основные итоги этой конференции, относящиеся к экспериментальным исследованиям, были подведены проф. Спитцером, и после его живого и впечатляющего доклада мне остается сказать лишь несколько слов о теоретической части конференции. К счастью для меня, теоретических докладов значительно меньше, чем экспериментальных — почти в три раза. Мне кажется, что этот факт нельзя объяснить на основе предположения, что теоретики более ленивы, чем экспериментаторы. Даже представленные здесь доклады содержат огромное количество информации, и потребуется не один месяц, чтобы полностью ее усвоить. Ввиду этого, я, разумеется, не в состоянии дать здесь детальную картину теоретических исследований и буду вынужден пользоваться крупными мазками импрессиониста. Боюсь, что мне придется прибегать и к туманному абстракционизму.

Чтобы получить более полное представление о теоретических исследованиях и идеях, обсуждавшихся на данной конференции, целесообразно мысленно вернуться к предыдущей конференции в Зальцбурге.

Вы, вероятно, помните, что одной из изюминок прошлой конференции был доклад д-ра Иоффе, который экспериментально показал, что желобковая неустойчивость не является "выдумкой легкомысленных теоретиков"; а действительно существует в плазме. Эксперименты Иоффе возбудили интерес к так называемым "ловушкам с минимумом В", т.е. таким конфигурациям, в которых магнитное поле В в среднем возрастает к периферии. Особенно интенсивные теоретические исследования в этой области начались после появления статьи Розенблута и Фюрта, в которой была показана воз-

можность создания тороидальной системы с минимумом среднего магнитного поля на магнитной оси. К настоящей конференции активность теоретиков в этой области достигла, вероятно, своего максимума, и здесь было зачитано несколько докладов из разных стран. В этих работах дается чрезвычайно подробный анализ вопроса о том, каким образом можно достичь минимума В в тороидальных системах. Эти исследования проведены в довольно общем виде с учетом кривизны и кручения магнитной оси, а также формы поперечного сечения магнитных поверхностей. Показано, что можно достичь минимума В с относительной глубиной "ямы" порядка 10-20%.

Вместе с тем, на данную конференцию представлены доклады об исследовании устойчивости плазмы в такого рода тороидальных системах. Впрочем, вопрос об устойчивости плазмы, поддерживаемой магнитным полем, является более обширным и требует более подробного рассмотрения.

Мне хотелось бы напомнить, что перед конференцией в Зальцбурге исследование неустойчивости неоднородной плазмы проводилось, главным образом, в приближении идеальной магнитной гидродинамики. В рамках магнитной гидродинамики развивались и общие представления о динамике плазмы в магнитном поле. Другими словами, вместо свойств реальной плазмы теоретики изучали свойства некоторого идеального объекта. Было ясно, что впереди лежит еще почти нетронутая область колебаний с длиной волны порядка среднего лармировского радиуса. Толчком к интенсивному исследованию этой области послужил представленный на прошлую конференцию доклад Розенблюта, Кроля и Ростокера. За три года после конференции была фактически заново построена полная теория неустойчивости неоднородной плазмы, в значительной мере, трудами советской школы физиков - Сагдеева, Михайловского и др.

Было обнаружено, что в неоднородной плазме существует целый класс так называемых дрейфовых неустойчивостей. Эти неустойчивости развиваются на возмущениях, сильно вытянутых вдоль магнитного поля. На данной конференции было представлено несколько докладов, в которых проведено исследование неустойчивостей плазмы как дрейфового тока, так и связанных с конечной проводимостью плазмы. Как видно из этих докладов, теория неустойчивости неоднородной плазмы развита настолько, что не представляет особых трудностей одновременно учитывать такие эффекты, как конечный лармировский радиус, неоднородность магнитного поля и столкновение частиц, каждый из которых года три тому назад казался непреодолимо сложным. Если учесть еще группу неустойчивостей в зеркальных ловушках, то можно с удовлетворением отметить, что к настоящему времени мы имеем довольно точную теорию неустойчивости плазмы.

Показались контуры берегов того огромного озера неустойчивости, которое раньше вообще казалось безбрежным океаном. И хотя еще будут открываться все более тонкие и "мягкие" неустойчивости, маловероятно, что мы столкнемся с целой неожиданной новой областью грубых неустойчивостей, которые существенным образом изменят наши представления. Мне кажется, что те выводы, которые можно сделать на основе уже известных неустойчивостей, будут довольно "устойчивыми".

Какие же выводы следуют из современной теории устойчивости? Прежде всего, можно сделать вывод, что зеркальные ловушки с открытыми пробками обладают существенным дефектом, связанным с существованием ко-

нуса потерь. И поэтому без дальнейших модификаций и усложнений (мне неизвестно, насколько должны быть они велики) - эти ловушки вряд ли могут быть использованы для термоядерных установок. Сообщенные на данной конференции экспериментальные данные, полученные на зеркальных ловушках показывают, что вывод теоретиков о неизбежности неустойчивости плазмы в таких ловушках, по-видимому, является правильным.

Что касается тороидальных систем, то из теории следует, что очень трудно достигнуть полной стабилизации плазмы в условиях, необходимых для получения управляемых термоядерных реакций. Отказавшись от заманчивой, вряд ли достижимой перспективы получения абсолютно устойчивой плазмы, приходится решать задачу, как свести к минимуму неприятности, связанные с неустойчивостью. Другими словами, необходимо рассмотреть микроскопические эффекты неустойчивостей, определить, какие из неустойчивостей наиболее опасны для удержания плазмы, и найти те условия, при которых усиленная утечка частиц минимальна. Предварительный анализ этого вопроса показал, что многие неустойчивости неоднородной плазмы можно считать не опасными, т.е. они либо могут быть стабилизированы при напряженных, но разумных условиях, либо их эффект не является слишком большим. (Заметим, что неустойчивость, которая приводит к коэффициенту диффузии, на два порядка превышающему классический, следует считать не опасной, т.к. соответствующая утечка энергии будет всего лишь порядка классической, определяемой поперечной теплопроводностью).

Для разряженной высокотемпературной плазмы наибольшую опасность представляет, по-видимому, дрейфовая неустойчивость, связанная с градиентом температуры. Эта неустойчивость не только не поддается стабилизации "широм", столкновениями или "минимумом В", но и может привести к неприятному эффекту преимущественного охлаждения ионов. Вследствие пониженной ионной температуры по сравнению с электронной теряется эффективность стабилизации "широм", поскольку уменьшается затухание Ландау на ионах. Не исключено, что при понижении температуры ионов может "вспыхнуть" дрейфовая турбулентность. Для борьбы с этой неустойчивостью потребуются, вероятно, весьма напряженные технические условия в будущих термоядерных установках. Что касается современных экспериментальных установок, то, к сожалению, в них могут играть роль очень большое число неустойчивостей и почти на равных правах. Поэтому провести сопоставление теории с экспериментом в настоящее время очень трудно.

Если уж речь зашла об экспериментальных исследованиях, то нельзя не отметить с удовлетворением того факта, что в последнее время явно наметилось сближение теории с экспериментом. Причем не только теоретики стараются приблизиться к объяснению экспериментальных данных, но и экспериментаторы отвечают запросам теоретиков. Так, например, теоретикам было очень приятно прослушать на этой Конференции доклад об экспериментальной проверке эффекта затухания Ландау, предсказанного около 20 лет тому назад, и лежащего в основе многих теоретических построений. Исследование с калиевой плазмой подтвердили существование дрейфовых волн - более молодого эффекта, рассмотренного теоретиками в последние годы. К сожалению, эксперименты с высокотемпературной

пазмой представляют гораздо большие трудности для теоретической интерпретации. Это связано с тем, что высокотемпературная плазма является слишком неустойчивой, колебания в ней развиты до конечных амплитуд, часто принимая форму своеобразной турбулентности. Для теоретического описания таких колебаний нельзя пользоваться линейной теорией. За прошедшие три года теория нелинейных колебаний начала весьма бурно развиваться, главным образом после конференции в Зальцбурге. В это время была развита теория слабой турбулентности, представляющая собой набор слабо взаимодействующих волн, были предложены приближенные методы описания сильной турбулентности. Мне кажется, что теория в настоящее время развита настолько, что она уже готова приняться за объяснение экспериментальных данных и в ближайшие годы мы, вероятно, будем свидетелями слияния теории и эксперимента в одну единую науку — физику пазмы. Более глубокое понимание физики пазмы не замедлит принести успех и в прикладных проблемах.

CONTROLLED NUCLEAR FUSION RESEARCH,
SEPTEMBER 1965:
REVIEW OF THEORETICAL RESULTS

V. V. KADOMTSEV
I. V. KURCHATOV INSTITUTE OF ATOMIC ENERGY
MOSCOW, USSR

The Second Conference on Plasma Physics and Nuclear Fusion Research has ended and it seems to me that, in everybody's opinion, it went off very successfully. We listened with interest to over a hundred papers, discussed the most interesting results and obtained a fairly complete picture of the present state both of experimental and theoretical investigations.

Colleagues from different countries working in the same field of physics had an opportunity to discuss their results in an informal and pleasant atmosphere, to share their hopes and disappointments and to compare their ideas and points of view. The excellent organisation of the Conference contributed much to the informal businesslike atmosphere which pervaded Culham during these past few days and we all are sincerely grateful to our hospitable hosts, above all to Dr. John Adams, the Director of Culham Laboratory.

The main experimental results from the Conference were summarized by Professor Spitzer, and after his lively and impressive account it only remains for me to say a few words about the theoretical part of the Conference. Luckily for me the number of theoretical papers was much smaller than of experimental ones, in fact only about a third. It seems to me that this experimental fact cannot be explained on the basis of the assumption that theoreticians are lazier than experimentalists. The vast amount of information contained even in those papers read at the Conference will take months to digest. I am, therefore, of course, unable to give here a detailed picture of the theoretical investigations, and shall indeed be compelled to use the coarse strokes of an impressionist, and fear I may even have to resort to foggy abstractionism.

To obtain a reasonably complete picture of the theoretical investigations and ideas discussed at this Conference it may be helpful to cast our minds back to the First Conference at Salzburg.

You probably remember that one of the highlights at the Salzburg Conference was Dr. Ioffe's paper which showed experimentally that the flute instability is not just a "flight of fancy of frivolous theoreticians" but that it does in fact exist in the plasma. Ioffe's experiments stimulated interest in the so-called "minimum-B traps", that is configurations in which the magnetic field B increases on the average towards the periphery. Theoretical investigations in this field were intensified following the publication of the paper by Rosenbluth and Furth, which demonstrated the possibility of setting up a toroidal system with a minimum mean magnetic field on the magnetic axis. Just before the present Conference the activity of theoreticians in

An address, translated from the Russian, given at the concluding session.

this field probably reached its maximum, and several papers from a number of countries were presented at the Conference. The question as to how a minimum-B can be achieved in toroidal systems is analysed in extreme detail. These investigations were carried out in fairly general form, taking into account the curvature and twist of the magnetic axis, as well as the shape of the cross-section of the magnetic surfaces. It was shown that a minimum-B with relatively deep "well", of the order of 10 to 20%, can be attained.

Papers were also presented investigating the stability of the plasma in toroidal systems of this kind. However, the problem of the stability of a plasma contained by a magnetic field is much wider, and still requires more detailed study.

I should like to remind you that before the Salzburg Conference the instability of an inhomogeneous plasma was investigated mainly using the approximation of ideal magnetohydrodynamics. The general concept of the dynamics of a plasma in a magnetic field was also developed within the framework of magnetohydrodynamics. In other words, instead of the properties of a real plasma theoreticians investigated the properties of some ideal system. It was clear that an almost untouched range of oscillations with wavelength of the order of a mean Larmor radius lay ahead. The stimulus to its intensive investigation was provided by the paper of Rosenbluth, Krall and Rostoker given at the Salzburg Conference. During the three years following that Conference a completely new theory of the instability of an inhomogeneous plasma was in fact constructed, largely in papers by Soviet physicists such as Sagdeev, Mikhailovsky and others. It was found that in an inhomogeneous plasma there exists a whole class of so-called drift instabilities. These instabilities develop on perturbations strongly extended along the magnetic field. During the present Conference several papers were presented which investigate plasma instabilities both of the drift type and those related to finite plasma conductivity. As is apparent from these papers the theory of the instability of an inhomogeneous plasma has been developed to such an extent that the simultaneous consideration of effects such as the finite Larmor radius, the inhomogeneity of the magnetic field, and particle collisions, each of which seemed insurmountably complex three years ago, now presents no special difficulties. When taking into account also the instabilities in mirror traps, it is satisfying to observe that we now have a fairly accurate theory of plasma instability.

We begin to see the outlines of the shores of this vast sea of instability which previously appeared as an altogether shoreless ocean. Although increasingly fine-scale and "weak" instabilities will still be discovered it is improbable that we shall encounter an unexpected, entirely new region of gross instabilities which will change our ideas significantly. It seems to me that those conclusions which can be drawn on the basis of the known instabilities will remain fairly "stable".

Which then are the conclusions which follow from the present theory of stability? Above all one can draw the conclusion that mirror traps with open mirrors suffer from an important defect relating to the existence of the "loss cone". Therefore these traps, without further modifications and complications whose magnitude and extent I do not know, can scarcely be

used for thermonuclear devices. The experimental data on mirror traps presented during our Conference show that the conclusions reached by theoreticians about the inevitable instability of the plasma in such traps would seem to be correct.

As far as toroidal systems are concerned, it follows from theory that complete stabilisation of the plasma under the conditions necessary for the attainment of controlled thermonuclear reactions will be very difficult to achieve. Disregarding the tempting, yet hardly attainable, prospect of achieving an absolutely stable plasma, it is necessary to solve the problem as to how to minimise the inconveniences resulting from the instability. In other words, it is necessary to consider the macroscopic effects due to the instability, to determine which of the instabilities are the most dangerous to the containment of the plasma, and to determine those conditions under which the enhanced escape of particles is a minimum. A preliminary analysis of this problem has shown that many instabilities of an inhomogeneous plasma need not be considered dangerous, that is either they can be stabilised under highly exacting yet not impossible conditions, or the effect is not unduly serious. (We note that an instability which leads to a coefficient of diffusion larger by two orders than the classical need not be considered dangerous, since altogether the corresponding energy loss will be only of the order of the classical loss due to transverse thermal conductivity.)

For a tenuous high temperature plasma it would seem that the greatest danger is presented by the drift instability related to the temperature gradient. Not only can this instability not be stabilised by "shear", collisions or minimum-B, but it may also lead to an undesirable effect, namely, the preferential cooling of the ions. Since the ion temperature is then lower than the electron temperature, shear stabilisation is no longer effective, since ion Landau damping is reduced. As the temperature of the ions decreases, the possibility that drift turbulence may "break out" cannot be excluded. To defeat this instability future thermonuclear devices will probably have to satisfy very exacting technological requirements. Unfortunately, in present experimental devices, a large number of instabilities of almost equal amplitudes may play an important part. A comparison between theory and experiment is therefore at present extremely difficult.

While on the subject of experimental investigations, it is satisfying to note that an approach between theory and experiment has lately been observed. It is not only that theoreticians endeavour to explain experimental results, but experimentalists reciprocate by endeavouring to answer questions put to them by theoreticians. Thus, it was very pleasing to theoreticians to hear at this Conference a paper on the experimental verification of Landau damping, an effect predicted about twenty years ago and forming the basis of numerous present theories. Investigations with potassium plasma confirmed the existence of drift waves, a more recent effect considered by theoreticians during the past few years. Unfortunately, the theoretical interpretation of experiments with high temperature plasma presents much greater difficulties. The reason is that a high temperature plasma is too unstable, and the oscillations develop to finite amplitudes, often taking the form of a characteristic turbulence. For the theoretical description of such oscillations linear theory cannot be used. The last three years saw a stormy

development of the theory of non-linear oscillations, mainly after the Salzburg Conference. During this time a theory of weak turbulence was developed which represents a system of weakly interacting waves, and approximate methods of describing strong turbulence have also been developed. It seems to me that theory is at present sufficiently advanced to be ready to undertake the explanation of the experimental results, and we shall probably witness in the near future a fusion between theory and experiment into a single science - plasma physics. A deeper understanding of plasma physics will not fail to bring success also to applied problems.

MAGNETIC WELLS

(Session I)

НАКОПЛЕНИЕ ПЛАЗМЫ С ГОРЯЧИМИ ИОНАМИ НА УСТАНОВКЕ ПР-5

Ю. В. ГОТТ, М. С. ИОФФЕ и Е. Е. ЮШМАНОВ
ИНСТИТУТ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ им. И. В. КУРЧАТОВА, МОСКВА
СССР

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

ACCUMULATION OF A HOT ION PLASMA IN PR-5. In earlier experiments on PR-5 it was shown that in a trap with magnetic mirrors the flute instability is completely suppressed when a radially increasing hybrid magnetic field (minimum-H trap) is set up. In those experiments a hydrogen plasma with hot ions ($T_i \approx 5$ keV) and density n up to 10^{10} cm^{-3} was produced by the magnetron injection method; the confinement time τ was equal to several tens of milliseconds, and was determined only by charge-exchange losses. The effect of the suppression of the flute instability was also observed by several others, although it is not possible on the basis of present results to draw conclusions about the stability of the plasma for densities considerably in excess of 10^{10} cm^{-3} .

Biguet et al. for $n = 10^{13}$ to 10^{14} cm^{-3} report $\tau = 60 \mu\text{sec}$; in the authors' view, this small τ is attributable to the charge-exchange of fast ions on the neutral gas desorbing from the walls during the injection. We explored the possibility of achieving prolonged containment of the plasma at densities $n \gtrsim 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ and $T_i \approx 5$ keV. The experimental study of the behaviour of such a plasma presents considerable interest in view of the theory of Mikhailovsky and Timofeev predicting at these n and T_i values the drift-cyclotron instability. This instability, which is due to a radial inhomogeneity of the plasma density, must occur on the condition that

$$(\rho_i/a)^2 > 4[(H^2/4\pi nm_i c^2) + (m_e/m_i)]$$

where ρ_i is the ion Larmor radius and a is a characteristic length of the inhomogeneity. For typical conditions in PR-5 ($H = 4000$ Oe, $\rho_i/a \approx 0.25$), this criterion is fulfilled starting from $n \approx 5 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. To obtain a plasma with such parameters a modified magnetron injection method is used in which the ions are accelerated from the cold plasma column by a variable radial electric field with frequency in the region of 3 to 6 Mc/s. The plasma containment is recorded based on its free decay by three methods: by interferometer with $\lambda = 8$ mm, from the flux of fast charge-exchange atoms, and from the absorption of a beam of thermal potassium atoms.

ACCUMULATION D'UN PLASMA A IONS CHAUDS DANS L'INSTALLATION PR-5. Des expériences antérieures exécutées dans l'installation PR-5 ont montré que l'instabilité «à cannelures» d'un plasma dans un piège à miroirs magnétiques pouvait être complètement éliminée à l'aide d'un champ magnétique hybride croissant en direction radiale (piège à H minimum). Au cours de ces expériences, on avait obtenu le plasma d'hydrogène à ions chauds ($T_i \approx 5$ keV), de densité $n = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, par injection à l'aide d'un magnétron; la durée de confinement τ s'élevait à quelques dizaines de millisecondes et était déterminée exclusivement sur la base des pertes dues aux échanges de charges. L'effet produit par l'élimination de l'instabilité «à cannelures» a, en outre, fait l'objet de plusieurs autres travaux, mais les résultats disponibles ne permettent de formuler aucune conclusion au sujet de l'instabilité d'un plasma de densité sensiblement supérieure à 10^{10} cm^{-3} .

Les auteurs de l'une de ces études ont constaté que, pour $n = 10^{13}$ à 10^{14} cm^{-3} , $\tau = 60 \mu\text{s}$; ils ont supposé qu'une valeur de τ aussi faible était due au changement de charges des ions rapides dans le gaz neutre qui se dégage des parois au cours de l'injection. Dans le mémoire, on examine la possibilité de créer et de confiner pendant une durée prolongée des plasmas ayant une densité $n > 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ et une valeur de $T_i \approx 5$ keV. L'étude expérimentale du comportement de ces plasmas présente un intérêt du fait que selon la théorie de Mikhailovsky-Timofeev, il faut s'attendre à l'apparition d'une instabilité cyclotronique de dérive pour les valeurs de n et T_i mentionnées. Cette instabilité, due à une densité radialement non homogène, doit se manifester pour:

$$(\rho_i/a)^2 > 4[(H^2/4\pi nm_i c^2) + (m_e/m_i)]$$

où ρ_i est le rayon de Larmor des ions et a la dimension caractéristique de non-homogénéité. Dans les conditions spécifiques de l'installation PR-5 ($H = 4000$ Oe, $\rho_i/a \approx 0.25$), ce critère est rempli à partir de

$n \approx 5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. En vue d'obtenir un plasma ayant ces caractéristiques, on a utilisé une variante de la méthode d'injection par magnétron, dans laquelle les ions provenant d'une colonne de plasma froid sont accélérés au moyen d'un champ électrique radial variable d'une fréquence de 3 à 6 MHz. Le confinement du plasma a été déterminé de trois façons, à savoir: à l'aide d'un radiointerféromètre ($\lambda = 8 \text{ mm}$), selon le flux d'atomes rapides ayant subi un échange de charges et selon l'absorption d'un faisceau d'atomes thermiques de potassium.

ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО НАКОПЛЕНИЮ ПЛАЗМЫ С ГОРЯЧИМИ ИОНАМИ НА УСТАНОВКЕ ПР-5. В экспериментах на установке ПР-5, выполненных ранее, было показано, что же-лобковая неустойчивость плазмы в ловушке с магнитными зеркалами полностью подавляется, когда создается гибридное магнитное поле, нарастающее в радиальном направлении (ловушка с минимумом H). В этих экспериментах водородная плазма с горячими ионами ($T_i \approx 5 \text{ кэв}$) и плотностью n до 10^{10} см^{-3} создавалась методом магнетронной инъекции; время удержания τ составляло десятки миллисекунд и оно определялось только перезарядочными потерями. Эффект подавления же-лобковой неустойчивости наблюдался также в ряде других работ, однако на основании имеющихся результатов нельзя сделать какое-либо заключение об устойчивости плазмы при плотностях, значительно более высоких чем 10^{10} см^{-3} . У Биге и др. при $n = 10^{13} \div 10^{14} \text{ см}^{-3}$ τ составляло 60 мксек и авторы предполагают, что столь малое τ связано с перезарядкой быстрых ионов на нейтральном газе, выделяющемся со стенок во время инъекции. В настоящей работе исследуется возможность получения и длительного удержания плазмы при плотностях $n \geq 10^{11} \text{ см}^{-3}$ и $T_i \approx 5 \text{ кэв}$. Экспериментальное изучение поведения такой плазмы представляет интерес в связи с тем, что согласно теории Михайлowskого-Тимофеева при указанных n и T_i следует ожидать появления дрейфово-циклотронной неустойчивости. Эта неустойчивость, обусловленная радиальной неоднородностью плотности, должна наступать при условии:

$$(\rho_i/a)^2 > 4 [(H^2/4\pi nm_i c^2) + (m_e/m_i)],$$

где ρ_i – лармровский радиус ионов, a – характерный размер неоднородности. Для типичных условий установки ПР-5 ($H = 4000 \text{ э}, \rho_i/a \approx 0,25$) этот критерий выполняется, начиная с $n = 5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$. Для получения плазмы с такими параметрами применяется модифицированный метод магнетронной инъекции, в котором ускорение ионов из столба холодной плазмы осуществляется переменным радиальным электрическим полем с частотой в диапазоне 3–6 мгц. Удержание плазмы регистрируется по времени ее свободного распада тремя методами: радиоинтерферометром ($\lambda = 8 \text{ mm}$), по потоку быстрых атомов перезарядки и по поглощению пучка тепловых атомов калия.

ACUMULACION DE UN PLASMA CON IONES CALIENTES EN LA INSTALACION PR-5. En los experimentos realizados anteriormente en la instalación PR-5 se demostró que la inestabilidad acanalada de un plasma en una trampa con espejos magnéticos se neutraliza por completo cuando se crea un campo magnético híbrido que crece en la dirección radial (trampa con un H mínimo). En estos experimentos, el plasma de hidrógeno con iones calientes ($T_i \approx 5 \text{ keV}$) y de densidad n hasta 10^{10} cm^{-3} , se obtuvo por inyección con un magnetrón; el tiempo de retención τ fue de varias decenas de milisegundos y se determinó únicamente por pérdidas debidas al intercambio de carga. La neutralización de la inestabilidad acanalada se ha observado también en toda una serie de trabajos; sin embargo, basándose en los actuales resultados no puede sacarse conclusión alguna sobre la estabilidad de un plasma de densidad muy superior a 10^{10} cm^{-3} .

En uno de esos trabajos, para $n = 10^{13} \div 10^{14} \text{ cm}^{-3}$, τ fue de $60 \mu\text{s}$; los autores suponen que un valor tan pequeño de τ está relacionado con la transferencia de cargas de los iones rápidos en el gas neutro que se separa de las paredes durante la inyección. En la presente memoria se investiga la posibilidad de obtener y confinar durante largo tiempo un plasma de densidad $n > 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ y $T_i \approx 5 \text{ keV}$. El estudio experimental del comportamiento de un plasma de esta naturaleza presenta interés porque según la teoría de Mijailovsky-Timofeev para los indicados valores de n y T_i aparecerá una inestabilidad ciclotrónica de deriva. Esta inestabilidad, condicionada por la no homogeneidad radial de la densidad, tendrá lugar cuando:

$$(\rho_i/a)^2 > 4 [(H^2/4\pi nm_i c^2) + (m_e/m_i)]$$

donde ρ_i es el radio de Larmor de los iones y a , la dimensión característica de la no homogeneidad. Para las condiciones típicas de la instalación PR-5 ($H = 4000 \text{ Oe}, \rho_i/a \approx 0,25$) se cumple este criterio a partir de $n \approx 5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. Para obtener un plasma que tenga estos parámetros se utiliza una variante de la inyección por magnetrón en la que los iones del cordón de plasma frío son acelerados por medio de un campo eléctrico variable de tipo radial, de frecuencia comprendida entre 3 y 6 MHz. La retención del plasma se registra

durante el tiempo de su desintegración libre por tres métodos: utilizando un radiointerferómetro ($\lambda=8$ mm), por la corriente de átomos rápidos dotados de transferencia de carga y por la absorción del haz de átomos calientes de potasio.

I. ВВЕДЕНИЕ

Исследования по удержанию плазмы в адиабатических ловушках с магнитным полем, нарастающим к периферии (ловушки с минимумом B), ведутся в настоящее время на ряде экспериментальных установок [1-6]. Удерживающее поле во всех этих установках имеет одинаковую конфигурацию. Оно представляет собой сочетание поля обычной зеркальной ловушки с полем остроконечной геометрии, создаваемым дополнительной, "стабилизирующей", обмоткой [7,8]. Суммарное поле такой системы возрастает как в продольном, так и в радиальном направлении. Благодаря этому в такой ловушке не должна иметь места магнитогидродинамическая желобковая неустойчивость и связанная с ней конвективная утечка плазмы поперек магнитных силовых линий.

Уже в первых опытах с таким комбинированным полем [9] было обнаружено заметное увеличение времени жизни плазмы и отсутствие сильных флуктуаций плотности, характерных для желобковой неустойчивости. Более детальные сведения были получены в дальнейшем на установке ПР-5 [1]. Было установлено, что при увеличении напряженности поля стабилизирующей обмотки H_1 плазма переходит из неустойчивого состояния в устойчивое, и этот переход совершается как раз тогда, когда суммарное поле на периферии – вблизи боковой стенки вакуумной камеры – начинает превышать поле в центральной области ловушки. Этот факт непосредственно указывает на желобковую природу неустойчивости, наблюдающейся в отсутствие H_1 . Переход в устойчивое состояние сопровождается резким увеличением времени жизни плазмы, сужением радиального распределения плотности и исчезновением пульсаций во внешних слоях плазмы. Длительность удержания в этих условиях определяется только перезарядочными потерями быстрых ионов. В указанных экспериментах плазма создавалась посредством импульсной магнетронной инжекции: средняя энергия протонов составляла 5 кэв, температура электронов около 20 эв, плотность плазмы – в интервале $10^9 \div 10^{10} \text{ см}^{-3}$; время распада плазмы достигало нескольких десятков миллисекунд.

Эффективное подавление желобковой неустойчивости в комбинированном магнитном поле было подтверждено в работах [2-5].

В работе [2] эксперименты проводились с плазмой с "горячими" электронами ($T_e = 10 + 25$ кэв) и плотностью от 10^8 до 10^{10} см $^{-3}$, получающейся при адиабатическом магнитном сжатии (установка "Tasse Trop III"). Отмечается, что при включении стабилизирующей обмотки сильно уменьшается радиальный поток плазмы на стенки (не менее чем в 10^3 раз) и исчезает вращение, сопровождающее неустойчивое состояние плазмы в обычной ловушке.

Значительное увеличение времени жизни плазмы с "горячими" ионами ($T_i \approx 1$ кэв) и плотностью $\sim 10^{10}$ см $^{-3}$ было установлено в работах [3, 4]. В [4] плотность могла варьироваться от 10^{10} до 10^{14} см $^{-3}$; при этом было найдено, что с повышением плотности в указанных пределах время жизни плазмы уменьшалось от 230 мксек до 20 + 60 мксек. Авторы предполагают, что это могло быть связано с увеличением перезарядочных потерь из-за более сильного газовыделения со стенок.

На установке "Alice" [5], при стационарной инъекции нейтральных атомов водорода с энергией 20 кэв, плотность плазмы, накапливаемой в комбинированном поле ($n = 2 \cdot 10^8$ см $^{-3}$), приблизительно в десять раз превышает плотность, накапливаемую при тех же условиях в простом зеркальном поле. Здесь также не наблюдалась какие-либо признаки желобковой неустойчивости. Отмечается, однако, что при повышении плотности появляются ионно-циклотронные колебания, которые в виде коротких "вспышек" повторяются регулярно через определенные интервалы времени. Эти вспышки сопровождаются выбросом электронов через зеркала и повышением потенциала плазмы, а также некоторым уменьшением плотности ионов. Авторы [5] считают, что они встретились при этом с проявлением эффекта типа резонансной неустойчивости Харриса.

В 1964 г. на установке ПР-5 была проведена серия экспериментов, в которых инъекция производилась из неустойчивого плазменного пучка. Такой пучок может генерировать в обычной ловушке плазму со средней поперечной энергией около 1 кэв и с плотностью $\sim 10^{11}$ см $^{-3}$ [10]. Предварительные результаты этих экспериментов изложены в препринте [II]. Следует указать, что оценку плотности и поперечных размеров длительно удерживаемой плазмы ($n \approx 2 \cdot 10^{11}$ см $^{-3}$, $d \approx 3$ см), сделанную в [II] по результатам совместных измерений потока нейтральных частиц перезарядки и величины ослабления пучка тепловых атомов калия, нельзя считать достаточно обоснованной. Не зная реального распределения плотности плазмы в ловушке, по данным этих двух методик нельзя правильно определить величину средней плотности. Дополнительные наблюдения,

проведенные с помощью радиоинтерферометра, показали, что во время инъекции плотность плазмы близка к 10^{11} см^{-3} (при диаметре плазмы 15 см); после прекращения инъекции основная часть этой плазмы быстро распадается ($\tau \sim 10^{-4}$ сек), а оставшаяся долгоживущая часть плазмы ($\tau \sim 10^{-2}$ сек) имеет плотность по крайней мере в десять раз меньшую. Причина быстрого начального распада осталась невыясненной.

Рассмотренные результаты различных экспериментов можно резюмировать следующим образом: в широком интервале энергий ионов и электронных температур (E_i , $T_e \sim 10^1 \dots 10^4$ эв) и при сильно различающихся условиях инъекции плазма сравнительно невысокой плотности ($n \leq 10^{10} \text{ см}^{-3}$), помещенная в нарастающее к периферии магнитное поле, не обнаруживает желобковой неустойчивости.

Согласно теории [12,13] следует ожидать, что подобные конфигурации магнитного поля должны быть эффективны в отношении подавления этой неустойчивости и при значительно больших плотностях плазмы. Остается широкий класс кинетических неустойчивостей, зависящих от распределения частиц плазмы в пространстве скоростей и в обычном координатном пространстве. Для возбуждения некоторых из таких неустойчивостей определяющим фактором может служить не структура магнитного поля, а особенности применяемого метода инъекции. Примером такого рода являются, по-видимому, те отчетливые признаки неустойчивости, которые наблюдаются в [5] при δ -образной инъекции быстрых атомов.

А.Б.Михайловский [14] провел подробный анализ различных неустойчивостей, с которыми можно встретиться в экспериментах по удержанию не очень разреженной плазмы с горячими ионами. Из этого анализа следует, что для плазмы с максвелловским распределением ионов по скоростям наибольшую опасность представляет дрейфово-циклотронная неустойчивость, которая обусловлена пространственной неоднородностью плазмы. Для типичных условий установки ПР-5 ($H = 4$ кэ, $T_i = 2 \dots 5$ кэв), например, эта неустойчивость может проявляться, начиная с плотностей $\sim 5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$.

Если функция распределения ионов по поперечным энергиям сильно отличается от максвелловской в том смысле, что имеются участки с $\frac{\partial f}{\partial E} > 0$, то неустойчивость может начинаться при несколько меньших плотностях. Кроме того в этом случае и в однородной плазме возможна неустойчивость, которая по своему характеру близка к пучковой неустойчивости.

Задачей настоящей работы являлось экспериментальное изучение возможности накопления и длительного удержания плазмы с энергич-

ными ионами на установке ПР-5 при плотностях, существенно превышающих 10^{10} см^{-3} .

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Установка ПР-5 представляет собой адиабатическую ловушку с комбинированным магнитным полем. Ее устройство подробно описано в работе [I].

Схема установки представлена на рис. I. Продольное магнитное поле H_z , постоянное во времени, создается восемью катушками (1). Максимальная величина H_z в центре ловушки 5 кэ; продольное пробочное отношение 1,7. Расстояние между пробками 120 см.

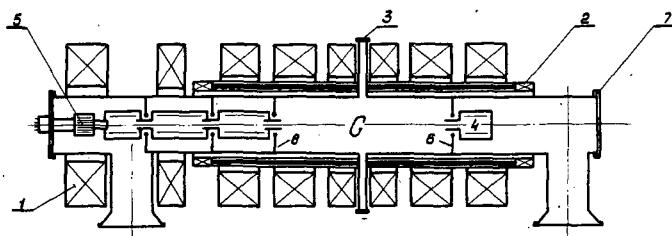


Рис.1. Схема установки: 1 – катушки продольного поля; 2 – стабилизирующая обмотка; 3 – измерительные патрубки; 4 – приемный электрод; 5 – плазменный источник; 6 – диафрагмы; 7 – вакуумная камера.

Стабилизирующее поле H_1 – импульсное; оно создается шестистержневой обмоткой (2), которая размещается между вакуумной камерой (7) и катушками продольного поля. Электрическая схема позволяет получать однополярные импульсы тока в обмотке длительностью до 75 миллисекунд. Максимальная величина H_1 вблизи стенки вакуумной камеры 4,5 кэ; радиальное ("стеночное") пробочное отношение 1,34, при максимальном значении H_1 .

Вакуумная камера (7) длиной 4 м и диаметром 40 см, изготовленная из нержавеющей стали, разделена диафрагмами (6) на 5 отсеков и откачивается двумя паромасляными и шестью сорбционными титановыми насосами. В центральной части камеры (область G на рис. I) может устанавливаться тонкостенный нержавеющий цилиндр, охлаждаемый жидким азотом – "азотит" – для повышения скорости сорбции распыленным титаном.

Применение дифференциальной откачки позволяет поддерживать в области G давление в рабочем режиме $1 + 2 \cdot 10^{-8}$ мм рт.ст. при наличии азотита и около $1 \cdot 10^{-7}$ мм рт.ст. при отсутствии его.

Для заполнения ловушки плазмой применяется модифицированный метод магнетронной инжекции, описанной в [1]. Вдоль оси установки пропускается пучок холодной плазмы, образующейся в плазменном источнике (5) при ионизации водорода в импульсном разряде с накаленным катодом. Этот пучок нейтрализуется на электроде (4), который находится под потенциалом анода источника. Между источником и стенками камеры создается радиальное электрическое поле, ускоряющее ионы.

В отличие от прежних экспериментов [1], где для создания такого поля применялся прямоугольный импульс напряжения амплитудой 30 кв и длительностью 20 мксек, в настоящей работе использовался пакет высокочастотных колебаний с частотой 2,5 мгГц, амплитудой в несколько киловольт и длительностью от 10 мксек до нескольких миллисекунд.

Предварительно этот метод инжекции проверялся в обычной ловушке [15], и было установлено, что он значительно более эффективен в отношении нагрева ионов и возможности получения плазмы большей плотности по сравнению со старым методом.

Основные экспериментальные данные в настоящей работе были получены на основании измерений потока перезаряженных частиц, электронной плотности плазмы и энергетического спектра быстрых ионов.

Измерение потока перезаряженных частиц производилось детектором с использованием вторичной электронной эмиссии, описанным ранее [1]. Детектор устанавливался в цилиндрическом патрубке (3) на расстоянии 15 см от стенки вакуумной камеры; коллимация потока осуществлялась самим патрубком в угле $\pm 15^\circ$.

При анализе сигнала с детектора следует иметь в виду, что энергетическое распределение в потоке частиц перезарядки отличается от энергетического распределения ионов плазмы фактором $\sim \sqrt{E} \sigma_n(E)$ ($\sigma_n(E)$ - сечение перезарядки ионов с энергией E). Для случая перезарядки протонов в молекулярном водороде этот фактор возрастает в интервале энергий от 0,2 до 20 кэв в 30 раз. Поэтому, даже при сильном убывании ионного распределения в сторону больших энергий (в указанном интервале), вклад, вносимый в сигнал с детектора более "горячей" частью спектра может значительно превышать вклад от более медленных ионов. Этот эффект дополнительно усиливается возрастанием коэффициента вторичной электронной эмиссии с увеличением энергии ионов.

Электронная плотность плазмы измерялась по поглощению пучка тепловых атомов калия [16]. В условиях настоящего эксперимента

основным процессом, приводящим к ослаблению пучка, является ионизация атомов электронами плазмы.

Поэтому

$$\overline{nd} = \frac{v_e}{\langle v_e b_i \rangle} \ln \frac{1}{1-\gamma}$$

где n - плотность электронов плазмы, v_e - их скорость, d - длина пути, проходимого пучком в плазме, v_e - скорость атомов калия, b_i - сечение ионизации калия электронным ударом, γ - коэффициент поглощения пучка.

В нашем случае ослаблению пучка в 10% соответствует плотность электронов $2 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$, а 90% - $5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$. (Энергия электронов ~ 25 эв, величина b_i взята из работы [17], d полагалась равным 15 см).

Временное разрешение этого метода определяется временем пролета атомов калия от области, занятой плазмой, до детектора и составляет 1,0 миллисекунду,

На установке было применено "просвечивание" двумя пучками - один из них пересекал ось установки, другой проходил в 2 см от нее I).

В отдельных измерениях плотность электронов определялась СВЧ интерферометром ($\lambda = 8 \text{ мм}$).

Для измерения энергетического спектра ионов поток быстрых нейтральных частиц перезарядки из плазмы пропускался через тонкую ($100-200 \text{ } \overset{\circ}{\text{А}}$) серебряную фольгу. Образующиеся после прохождения через фольгу ионы анализировались по энергиям электростатическим анализатором.

Таким способом можно было измерять энергию атомов водорода, начиная с 250 эв [18].

Поток частиц, попадающих в анализатор, коллимируется цилиндрическим патрубком вакуумной камеры в угле $\pm 3,5^\circ$. Это означает, что измеряется энергетический спектр ионов, продольная энергия которых мала по сравнению с поперечной.

Все измерительные устройства устанавливались в центральной плоскости ловушки (в патрубки (3) на рис. I).

Типичные режимы работы установки следующие: $H_{\perp} = 3300$ эрстед, $H_z = 2200$ эрстед, разрядный ток в плазменном источнике - 50 а при разрядном напряжении 1 кв; длительность импульса разряда

I) Прибор для зондирования плазмы калиевым пучком разработан под руководством В.А.Симонова.

450 мкsec; ВЧ пакет имеет амплитуду $I + 2$ кв и длительность 300 мкsec; частота 2,5 МГц; ВЧ пакет прикладывается спустя 150 мкsec после начала разряда в источнике.

Эксперименты проводились без азотита; остаточное давление нейтрального газа в камере $3 + 4 \cdot 10^{-8}$ мм рт.ст.; рабочее давление $I + 2 \cdot 10^{-7}$ мм рт.ст.

Рабочий газ - водород.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В основу применяемого метода заполнения ловушки горячей плазмой было положено представление о том, что прикладывая высокочастотное ускоряющее напряжение к шнтуру холодной плазмы, удастся осуществить режим интенсивной квазистационарной внутренней инъекции ускоренных ионов. При достаточной длительности ВЧ-пакета (порядка нескольких миллисекунд) можно рассчитывать на накопление плазмы значительной плотности ($> 10^{11} \text{ см}^{-3}$), если только отсутствуют другие процессы потерь, кроме перезарядки.

Однако эксперименты показали, что фактическое накопление происходит только в течение первых 200-300 мкsec. Дальнейшее удлинение импульса инъекции не приводит к повышению плотности плазмы, захваченной в ловушку. Для иллюстрации на рис.2 приведены осциллограммы сигнала поглощения калиевого пучка при длительности ВЧ-пакета 300 мкsec и 2 мсек. Степень поглощения в хвосте

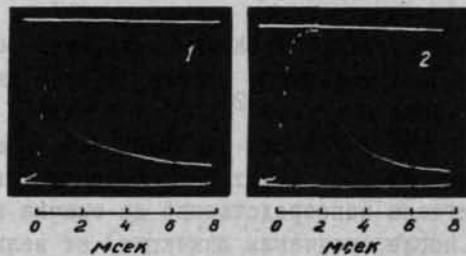


Рис.2. Сигнал поглощения калиевого пучка: 1 - длительность инъекции 300 мкsec; 2 - длительность инъекции 2 мсек. Разрешающее время 1 мсек. Верхняя линия соответствует 100% поглощению, нижняя - нулевому.

распада составляет в обоих случаях $30 + 35\%$, что соответствует $n \approx 1 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ²⁾. Эта величина остается практически неизменной при увеличении длительности инъекции свыше 300 мкsec.

2) При расчете плотности диаметр плазмы всюду условно принимался равным 15 см.

Прежде чем искать объяснение этому факту, рассмотрим данные, получаемые при изучении потока частиц перезарядки.

Типичная осциллограмма сигнала быстрых частиц перезарядки приведена на рис. 3. Начало развертки совпадает с началом импульса инжекции, конец импульса указан стрелкой. Возрастание сигнала во время инжекции лишь частично связано с накоплением, частично же вызвано происходящим при наложении ВЧ аналогичным возрастанием тока разряда в плазменном источнике, т.е. увеличением интенсивности инжекции. Небольшой по амплитуде длинный хвост, наблюдаемый после импульса, отражает распад плазмы, оставшейся в ловушке. Постоянная спада хвоста близка ко времени перезарядки.

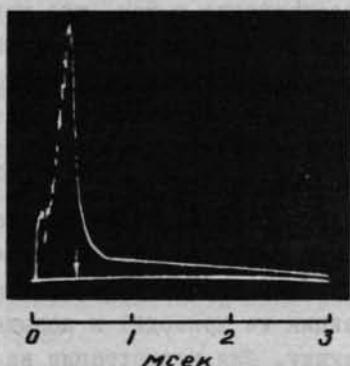


Рис.3. Типичный вид сигнала частиц перезарядки. Стрелкой показан момент окончания инжекции.

Наиболее примечательной деталью приводимой осциллограммы является скачкообразное уменьшение потока перезаряженных частиц сразу после выключения инжекции³⁾. Относительная величина скачка меняется от 3-5 до нескольких десятков раз в зависимости от интенсивности инжекции. Это может быть проиллюстрировано зависимостью величин сигнала непосредственно до скачка и после него (через 200 мкsec после окончания инжекции) от величины разрядного тока (рис. 4). Видно, что чем выше интенсивность инжекции, тем больше перепад сигнала.

Амплитуда длинного хвоста за скачком мало меняется в различных режимах и соответствует величинам плотности $3 \pm 5 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$.

3) Сигнал калиевого пучка также испытывает резкий спад после окончания инжекции, однако в отличие от сигнала частиц перезарядки в данном случае он мог бы быть отчасти объяснен выключением центрального шнура холодной плазмы, проходящего через ловушку во время инжекции.

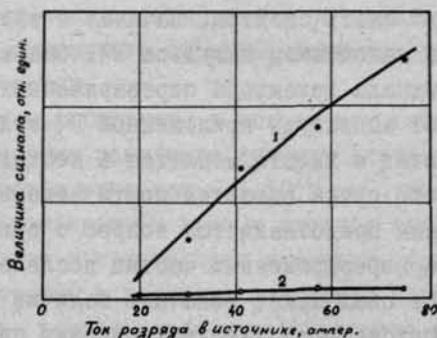


Рис. 4. Зависимость от тока разряда величины сигнала частиц перезарядки в конце импульса инъекции (1) и спустя 200 мксек (2).

Некоторое занижение плотности по сравнению с показаниями калиевого пучка объясняется тем, что детектором перезаряженных частиц регистрируются преимущественно быстрые ионы, тогда как поглощение калиевого пучка определяется полной плотностью, которая может быть выше за счет ионов с небольшой энергией, составляющей несколько сот электронвольт. С этим согласуется и тот факт, что спад длинного хвоста сигнала калиевого пучка происходит значительно медленней, чем спад хвоста перезаряженных частиц, что указывает на значительный вклад медленных ионов с большим временем перезарядки в полную плотность плазмы.

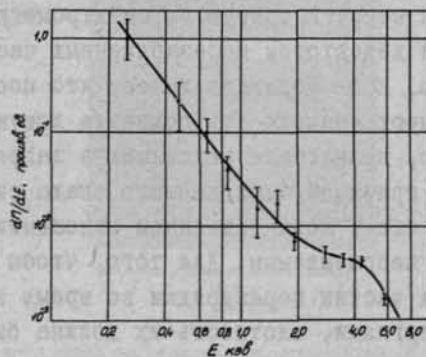


Рис. 5. Энергетический спектр ионов.

Энергетический спектр ионов в хвосте распада, полученный с помощью спектрометра перезаряженных частиц, приведен на рис. 5. Количество ионов возрастает с уменьшением энергии, не обнаруживая спада вплоть до минимальных измеренных энергий (250 эв). Незнание холодной части спектра не позволяет вычислить среднюю энергию, однако она не превышает, по-видимому, 400 ± 500 элект-

ронвольт. "Горячая" часть спектра, начиная с энергии примерно в I кэв, обусловлена наложением импульса ВЧ. Она же ответственна за большую долю сигнала детектора перезаряженных частиц. Поэтому в зависимости от амплитуды приложенной ВЧ величина сигнала перезаряженных частиц в хвосте меняется в несколько раз, тогда как сигнал калиевого пучка остается почти неизменным.

Наиболее важным представляется вопрос о природе быстрого уменьшения сигнала перезаряженных частиц после окончания инъекции, поскольку этот спад может означать наличие какой-либо неустойчивости, препятствующей удержанию плазмы при плотностях $> 10^{10} \text{ см}^{-3}$. Однако, можно было бы предложить и другие объяснения спада, имеющие более простой характер.

Во-первых, изменение вакуума. Возможно, что во время импульса инъекции происходит интенсивное поступление со стенок ловушки в ее объем сбиваемых молекул, в том числе с большим сечением перезарядки. После окончания импульса эти молекулы могут быстро откачиваться сорбирующими стенками, и уменьшение их концентрации отразится в виде уменьшения потока перезаряженных частиц. Однако такому объяснению противоречит слишком малое время наблюдаемого спада (несколько десятков микросекунд) - значительно меньшее, чем возможное время откачки.

Во-вторых, можно предположить, что во время инъекции в ловушке имеется большое количество ионов, обладающих столь малыми энергиями, что они не регистрируются спектрометром, но тем не менее воспринимаются детектором перезаряженных частиц, хотя и с малой эффективностью. Если полагать далее, что после выключения инъекции эти ионы имеют возможность покинуть ловушку за время $\sim 10^{-4}$ сек, например, вследствие рассеяния в запретный конус, то это могло бы быть причиной наблюдаемого спада сигнала. Нетрудно однако убедиться, что в количественном отношении подобное объяснение оказывается неприемлемым. Для того, чтобы объяснить большой сигнал с детектора частиц перезарядки во время инъекции наличием ионов с малыми энергиями, плотность их должна была бы в десятки раз превышать действительную плотность, измеряемую калиевым пучком и интерферометром во время импульса ВЧ.

Поэтому наиболее вероятной причиной спада сигнала перезаряженных частиц представляется уход ионов из ловушки под действием некоторого коллективного механизма. Наблюдения с помощью спектрометра за изменением во времени потока перезаряженных частиц с различной энергией показывают, что между импульсом инъекции и хвостом имеет место перепад интенсивностей, примерно одинаковый

в широком энергетическом интервале и по порядку величины соответствующий скачку суммарного сигнала, регистрируемого детектором перезаряженных частиц.

Важным фактором, говорящим в пользу неустойчивости, является и то, что все попытки заполнить ловушку длительно удерживаемой плазмой с плотностью выше чем $\sim 1 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ оказались безуспешными. Несмотря на изменение в весьма широких пределах таких определяющих параметров интенсивности инжекции, как разрядный ток плазменного источника и величина амплитуды ускоряющего ВЧ напряжения, а также длительности инжектирующего импульса, конечная плотность плазмы, остающейся в ловушке спустя двести-триста микросекунд после окончания импульса, неизменно оказывается близкой к приведенной выше величине (или меньше ее, если выбирался малоинтенсивный режим инжекции). Трудно предположить, чтобы при указанном широком изменении параметров инжекции ее действительная интенсивность и условия захвата оказывались каждый раз такими, при которых накопление плазмы в ловушке происходит до одной и той же относительно небольшой плотности.

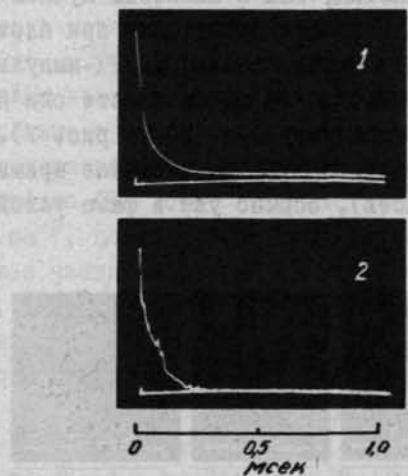


Рис. 6. Форма начального спада сигнала частиц перезарядки: 1 – со стабилизирующим полем; 2 – без стабилизирующего поля. Разворотка осциллографа запускается одновременно с окончанием инжекции.

Если допустить, что аномальный уход действительно имеет место, можно указать на его наиболее общие черты. Характерно, что спад сигнала перезаряженных частиц на заднем фронте импульса инжекции происходит почти одинаково как в присутствии стабилизирующего поля, так и без него (рис. 6), если отвлечься от имеющих место в последнем случае колебаний, связанных с сильными простран-

ственными флюктуациями плотности, вызванными жалобковой неустойчивостью. Обе кривые снижаются совместно, пока сигнал не уменьшится до величины, соответствующей $n \leq 10^{10} \text{ см}^{-3}$, после чего кривые сразу расходятся: кривая без стабилизирующего поля продолжает столь же круто идти вниз, тогда как кривая со стабилизирующим полем резко замедляет спад, обращаясь в длинный хвост. Из этого факта следует, что предполагаемый аномальный уход осуществляется посредством такого механизма, на который дополнительное стабилизирующее поле не оказывает заметного влияния. Отсутствие колебаний может говорить о том, что перенос плазмы имеет скорее микроскопический, чем гидродинамический (объемный) характер.

В добавление к приведенным данным важно указать на группу отдельно стоящих фактов, непосредственно свидетельствующих о существовании весьма быстрого аномального ухода при некоторых условиях. При измененном режиме нагрева ионов во время инжекции, характеризуемом значительно большей амплитудой ВЧ и малой длительностью пакета, на многих осциллограммах распада плазмы наблюдаются резкие сбросы, регистрируемые одновременно как детектором перезаряженных частиц, так и калиевым пучком (рис. 7, осциллограммы (1) и (2)). Сбросы происходят при плотностях $\sim (0,5 + 1) \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$. Чем больше амплитуда ВЧ-импульса, тем чаще наблюдаются сбросы. Иногда на одном хвосте они повторяются дважды и даже трижды (осциллограмма (3) на рис. 7). Примечательно, что сбросы происходят спустя значительное время после окончания инжекции (до 5 мсек), обычно уже в фазе устойчивого удержания.

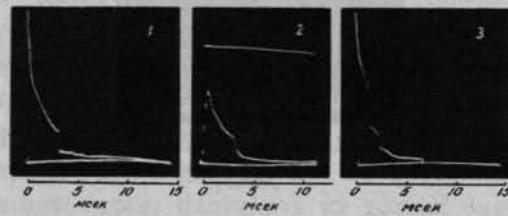


Рис. 7. Осциллограммы, иллюстрирующие сбросы во время распада плазмы: 1 и 2 – сброс, регистрируемый одновременно детектором перезаряженных частиц и калиевым пучком; 3 – случай трех последовательных сбросов, зарегистрированных детектором частиц перезарядки. (1 и 3 – сигналы с детектора частиц перезарядки спустя 200 мкеск после окончания инжекции).

Подобное явление наблюдалось в отдельных редких случаях и при инжекции плазмы методом неустойчивого пучка [II].

Очевидно, сбросы вызываются вспышкой какой-то неустойчивости, приводящей к быстрому уходу значительной доли удерживаемой

плазмы. Природа этого явления пока не исследована, в частности, не известно, возникают ли какие-либо высокочастотные колебания в момент развития неустойчивости, и в чем состоит различие между плазмой в режимах с частыми сбросами и без них. Поэтому пока преждевременно проводить параллель между спадом сигнала на заднем фронте и сбросами в хвосте; последние следует расценивать скорее как реальный пример неустойчивого поведения плазмы в ловушке с комбинированным полем. Этот пример дает больше оснований полагать, что в условиях описываемых экспериментов повышение плотности плазмы не удается осуществить также по причине неустойчивости.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты могут быть сведены к следующему.

1. Модифицированный метод магнетронной инжекции, состоящий в ускорении ионов из столба холодной плазмы высокочастотным радиальным электрическим полем, обладает достаточной интенсивностью для создания в установке ПР-5 плазмы с энергичными ионами плотностью $\approx 10^{11} \text{ см}^{-3}$ в объеме $\approx 10^4 \text{ см}^3$.

2. Несколькими независимыми экспериментальными методами установлено, что плазма с такой начальной плотностью в ловушке длительно не удерживается. При прекращении инжекции она распадается за время порядка 10^{-4} сек. пока плотность не уменьшится до величины $\sim 10^{10} \text{ см}^{-3}$, после чего распад резко замедляется. Оставшаяся долгоживущая часть плазмы может удерживаться стабильно в течение времени, определяемого перезарядкой ионов.

Изменение интенсивности и длительности инжекции не приводит к увеличению плотности удерживаемой плазмы.

3. Причина быстрого начального спада плотности в настоящее время еще не изучена. Не исключено, что она связана с какими-либо невыясненными особенностями самого процесса инжекции. Однако совокупность имеющихся экспериментальных данных делает такое предположение менее вероятным, нежели предположение о том, что спад является следствием неустойчивости плазмы при повышенных плотностях. На возможность появления новых неустойчивостей в исследуемом интервале плотностей указывает также и теория, в частности, на возникновение дрейфово-циклотронной неустойчивости. Наконец, дополнительным аргументом в пользу неустойчивости служит и тот факт, что при некоторых условиях с несомненностью наблюдаются неустойчивые состояния плазмы в комбинированном по-

ле, обнаруживающиеся по неожиданным сбросам плотности в период "спокойного" распада плазмы.

В заключение нужно подчеркнуть, что изложенные результаты могут служить лишь качественным указанием на неустойчивое поведение плазмы при повышенных плотностях. Следует надеяться, что дальнейшие более систематические исследования позволят выяснить действительный механизм наблюдающихся явлений.

Если ограничение плотности длительно удерживаемой плазмы в настоящих экспериментах обусловлено дрейфово-циклотронной неустойчивостью, можно рассчитывать, что при повышении напряженности магнитного поля удастся достигнуть значительно более высоких плотностей: согласно [14] критическое значение плотности, начиная с которой может возникать эта неустойчивость, растет при прочих неизменных условиях не медленнее, чем H^4 .

Авторы выражают свою благодарность: Л.А.Арцимовичу, Б.Б.Кадомцеву и А.Б.Михайловскому за интерес к работе и полезные обсуждения; В.А.Симонову и его сотрудникам за разработку аппаратуры и помочь в проведении измерений по зондированию плазмы калиевым пучком, В.В.Хилилю за разработку СВЧ-интерферометра, Ю.Т.Байгородову, разработавшему всю электрорадиотехническую аппаратуру установки, а также всем сотрудникам нашей лаборатории, активно помогавшим в проведении экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иоффе М.С., Соболев Р.И. Атомная энергия 17 (1964) 366
2. Perkins W.A., Barr W.L. *Bull. Amer. Phys. Soc.* 9 (1964) 328
3. Francis G., Mason D.W., Hill J.W., *Nature* 203 (1964) 623
4. Biguet A., Blanc P., *et al.*, *C. r. Acad. Sci.* 259 (1964) 1040
5. Damm C.C., Foote J.H., Futch A.H., Gardner A.L., Post R.F. *Phys. Rev. Letters* 13 (1964) 464
6. Артеменков Л.И., Богданов Г.Ф., Головин И.Н. и др. Препринт "О получении горячей термоядерной плазмы методом инъекции быстрых частиц в магнитную ловушку". Институт атомной энергии, Москва (1964) 38-45.
7. Valeevanov V.M., Volkov B.J., *et al.*, *J. Nucl. Energy, Part C* 5 (1963) 205
8. Мартыненко Д.В., Соболев Р.И. Атомная энергия 17 (1964) 2II.
9. Готт Ю.В., Иоффе М.С., Тельковский В.Г. Ядерный синтез, приложение часть III (1962) 1045.

- I0. Незлин М.В., Солнцев А.М. ЖЭТФ 45 (1963) 840.
- I1. Готт Д.В., Иоффе М.С., Незлин М.В., Соболев Р.И. Препринт "Исследование устойчивости плазмы в установке ПР-5". Институт атомной энергии, Москва (1964) 23-27.
- I2. Taylor J.B. Phys. Fluids 7 (1964) 762.
- I3. Hantre R.J., Taylor J.B. Phys. Rev. Letters 13 (1964) 123.
- I4. Михайловский А.Б., Ядерный синтез 5 (1965).
- I5. Готт Д.В., Ишманов Е.Е. ЖЭТФ 48 (1965) 804.
- I6. Симонов В.А., Астахов В.Г., Мнев В.Н. и др. Доклад на II Все-советской конференции по физике электронных и атомных столкновений, Ужгород (1962).
- I7. Brink G.O. Phys. Rev. 134(8A) (1964) 345.
- I8. Готт Д.В., Тельковский В.Г. ЖТФ 34 (1964) 2II4.

DISCUSSION

D. KERST: Have you found that the growth rate of the instabilities you associate with the cone of losses is affected by the electron temperature?

M. N. ROSENBLUTH: These instabilities are independent of electron temperature as long as it is less than the ion temperature, as in the case discussed by Dr. Ioffe.

A. H. SNELL: Are the jumps or discontinuities in the decay curves usual or unusual events?

M. S. IOFFE: That depends on the conditions under which injection takes place. When we heated the ion component of the plasma by means of a relatively low-amplitude HF electric field the generator voltage was 1 or 2 kV. In this case we did not observe any discontinuities.

However, when the generator voltage was raised to 30 kV, discontinuities were observed.

I cannot state precisely the difference between the ion energy distribution in the first and second case, but preliminary evidence indicates that it is smoother in the first case, right down to low energies.

J. DRUMMOND: I understand that the breaks in the curve which occurred at late times sometimes occurred multiply. If these breaks are due to anisotropy in the velocity or spatial distribution how can a further anisotropy be generated to make further instabilities occur? Is there an explanation for a regeneration of the anisotropy?

M. S. IOFFE: Mikhailovsky considers that these breaks are not associated with anisotropy, since the anisotropy effect should make itself felt at lower densities than those observed by us. According to Mikhailovsky the breaks in density are due to ion-cyclotron instability caused by the strongly non-Maxwellian character of the ion distribution.

J. DRUMMOND: Is the plasma potential found to jump at the times when these breaks are observed?

M. S. IOFFE: We have not measured the plasma potential, but indirect evidence suggests that no strong jumps in potential occur.



CONTAINMENT OF PLASMA TRAPPED IN A MAGNETIC WELL

G. FRANCIS, J.W. HILL AND D.W. MASON
UNITED KINGDOM ATOMIC ENERGY AUTHORITY
THE CULHAM LABORATORY,
ABINGDON, BERKS., ENGLAND

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

CONTAINMENT OF PLASMA TRAPPED IN A MAGNETIC WELL. Plasma from a coaxial gun is guided along an injection line by a converging magnetic field into a central glass vacuum chamber. Here part of the plasma is reflected from a magnetic mirror, and then trapped by the application of another rapidly-pulsed mirror field. Stabilising fields can also be applied by currents in six Ioffe bars parallel to the axis. The fields, of short rise time, are maintained roughly constant for 1 msec.

In earlier experiments on plasma of mean density $4 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ and ion energy 1 keV, a rotating flute instability was present in simple mirror geometry, the plasma being lost in 60 μsec . With stabilising fields applied, the lifetime of energetic ions (measured by the emission of charge exchanged neutral atoms) increased to 250–400 μsec . This decay rate was faster than that due to charge exchange at the background gas pressure of 3×10^{-7} Torr, indicating a large transient influx of gas from the walls of the chamber.

Later experiments on higher density plasma ($n \sim 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, $e \sim 5 \text{ keV}$) have confirmed these results. In these the fast atom flux lasted 140–200 μsec in both simple mirror and complex fields. The signal due to charge exchange emission peaked about 30 μsec after the instant of trapping. This signal measures the product of the fast ion and neutral gas densities. A deliberate increase of background pressure up to 10^{-5} Torr made little difference in the amplitude of the signal. Attempts to change the influx of gas by baking the chamber and evaporating lithium were unsuccessful, but the lithium coating showed signs of severe bombardment along the cusp lines between the Ioffe bars. A compensated diamagnetic loop placed inside the vacuum chamber showed that the value of β for the trapped plasma was at least 0.1; the diamagnetism fell sharply within 50 μsec , confirming that the longer-lasting neutral atom signal must be due largely to the influx of neutral gas.

CONFINEMENT D'UN PLASMA PIEGE DANS UN PUIT MAGNETIQUE. Le plasma formé dans un canon coaxial est dirigé le long d'une ligne d'injection et amené dans une chambre à vide centrale en verre par un champ magnétique convergent. Dans cette chambre, une partie du plasma est réfléchie par un miroir magnétique, puis piégée par un autre champ à miroir créé par une impulsion rapide. On peut aussi appliquer des champs stabilisateurs produits par des courants circulant dans six barres de Joffé disposées parallèlement à l'axe. Ces champs, à court temps de montée, se maintiennent à une valeur presque constante pendant 1 ms.

Au cours d'expériences faites précédemment avec un plasma dont la densité moyenne était de $4 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ et l'énergie des ions de 1 keV, les auteurs ont constaté une instabilité tournante en cannelures dans une configuration à miroir simple, le plasma disparaissant en 60 μs . En appliquant des champs stabilisateurs, la durée de vie des ions de haute énergie (mesurée grâce à l'émission des atomes neutres ayant subi l'échange de charge) a pu atteindre 250 à 400 μs . Cette décroissance plus rapide que celle qui serait due à l'échange de charge à la pression du gaz résiduel de $3 \cdot 10^{-7}$ Torr indique un afflux transitoire important de gaz venant des parois de la chambre.

Des expériences faites ultérieurement avec des plasmas de densité plus élevée ($n \sim 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, $e \sim 5 \text{ keV}$) ont confirmé ces résultats. Au cours de ces expériences, le flux d'atomes rapides durait de 140 à 200 μs , tant dans les champs simples à miroir que dans les champs combinés. Le signal provoqué par l'émission due à l'échange de charge présentait un maximum de 30 μs après le piégeage. Ce signal mesure le produit de la densité des ions rapides par celle du gaz neutre. Une augmentation délibérée de la pression du gaz résiduel jusqu'à 10^{-5} Torr n'a guère modifié l'amplitude du signal. Les essais effectués en vue de modifier l'afflux de gaz par étuvage de la chambre ou par évaporation du lithium ont été infructueux, mais le revêtement de lithium présentait des signes de bombardement important le long des lignes cuspidées, entre les barres de Joffé. Une boucle diamagnétique compensée placée à l'intérieur de la chambre à vide a montré que la valeur de β ,

pour le plasma piégé, était au moins de 0,1; au bout de 50 μ s, le diamagnétisme diminuait rapidement, confirmant que le signal prolongé provoqué par les atomes neutres doit être imputé, pour une grande part, à l'afflux de gaz neutre.

УДЕРЖАНИЕ ПЛАЗМЫ, ЗАХВАЧЕННОЙ В МАГНИТНОЙ ЯМЕ. Плазма из коаксиальной пушки направляется сходящимся магнитным полем в центральную стеклянную вакуумную камеру. Здесь часть плазмы отражается от магнитного зеркала и затем захватывается в результате применения другого быстро нарастающего зеркального поля. Можно также применять стабилизирующие поля, создаваемые токами, в шести палках Иоффе, расположенных параллельно оси. Быстро нарастающие поля остаются приблизительно постоянными в течение 1 миллисекунды.

В ранее проведенных экспериментах с плазмой со средней плотностью $4 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ и энергией ионов 1 кэв при простой зеркальной геометрии возникала желобковая неустойчивость и вращение плазмы; при этом плазма терялась через 60 мксек. При применении стабилизирующих полей время жизни энергичных ионов (измеряемое по потоку эмиссии перезаряженных нейтральных атомов) увеличивалось до 250 – 400 мксек. Такая скорость распада была выше, чем скорость распада в результате перезарядки при давлении остаточного газа $3 \cdot 10^{-7}$ тор, что свидетельствовало о значительном поступлении газа со стенок камеры.

Более поздние эксперименты с более плотной плазмой ($n \sim 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $\epsilon \sim 5$ кэв) подтвердили эти результаты. В этих экспериментах поток быстрых атомов продолжался 140 – 200 мксек как в простом зеркальном, так и в сложном полях. Сигнал перезаряженных частиц достигал максимума через 30 мксек после начала захвата. Этот сигнал определяет произведение плотностей быстрых ионов и нейтрального газа. Преднамеренное увеличение основного давления до 10^{-5} тор не приводило к заметному изменению амплитуды сигнала. Попытки уменьшить гашение стенок путем прогрева камеры и испарения лития оказались безуспешными, однако, на литиевом покрытии были обнаружены следы от сильной бомбардировки стенок в промежутках между палками Иоффе. На компенсирующей диамагнитной петле измерение диамагнетизма плазмы с помощью витка, помещенного внутри вакуумной камеры, было показано, что величина β для захваченной плазмы составляла, по крайней мере, 0,1; диамагнетизм резко уменьшился через 50 мксек, это подтверждает, что более продолжительный сигнал от частиц перезарядки необходимо в значительной степени объяснять притоком нейтрального газа.

CONFINAMIENTO DE UN PLASMA ATRAPADO EN UN POZO MAGNETICO. En el trabajo descrito en la presente memoria, los autores emplean un campo magnético convergente para guiar a lo largo de una línea de inyección el plasma proveniente de un cañón coaxial, conduciéndolo hasta una cámara de vacío central, de vidrio. En dicha cámara, parte del plasma se refleja en un espejo magnético y luego queda atrapado por la aplicación de otro campo espectral sometido a pulsaciones rápidas. También es posible aplicar campos estabilizadores haciendo circular una corriente en seis barras de Ioffe paralelas al eje. Los campos de aumento rápido, permanecen aproximadamente constantes durante 1 ms.

En anteriores experimentos con plasmas de $4 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ de densidad media y 1 keV de energía iónica, se observó una inestabilidad giratoria con forma de estrías en una geometría espectral simple, perdiéndose el plasma en 60 μ s. En presencia de campos estabilizadores, el período de los iones de alta energía (medido por la emisión de átomos neutros que han sufrido intercambio de cargas) aumentó hasta 250 – 400 μ s. Este índice de decrecimiento fue más elevado que el debido al intercambio de carga con una presión residual en el gas de $3 \cdot 10^{-7}$ Torr, lo que indica una gran afluencia transitoria de gas desde las paredes de la cámara.

Experimentos posteriores con plasmas de mayor densidad ($n \sim 10^{13} \text{ cm}^{-3}$; $\epsilon \sim 5$ keV) han confirmado estos resultados. En dichos experimentos, el flujo de átomos rápidos duró 140 – 200 μ s, tanto en espejos sencillos como en campos complejos. La señal debida a la emisión por intercambio de carga alcanzó su máximo unos 30 μ s después del instante de la captura. Esta señal mide el producto de las densidades de iones rápidos y de gas neutro. Un aumento deliberado de la presión residual hasta 10^{-5} Torr no alteró mayormente la amplitud de la señal. Los intentos de modificar la afluencia de gas calentando la cámara en un horno y evaporando litio no dieron resultados, pero el revestimiento de litio mostró indicios de severo bombardeo según las líneas cuspidales entre las barras de Ioffe. Un lazo diamagnético compensado, colocado dentro de la cámara de vacío, indicó que el valor de β correspondiente al plasma atrapado era igual a por lo menos 0,1; el diamagnetismo disminuyó abruptamente al cabo de 50 μ s, confirmando que la señal del átomo neutro, de mayor duración, debe provenir en gran medida de la afluencia de gas neutro.

1. Introduction

In a number of experiments [1 - 7] it has been shown that plasma confined adiabatically in a magnetic well is not afflicted by interchange instabilities. It remains confined much longer than in a simple magnetic mirror, but frequently escapes faster than can be explained by collisions between the ions of the plasma, or by charge exchange on the background gas. This has been ascribed to the sudden influx of neutral gas, dislodged from the walls of the vacuum vessel by plasma bombardment. We have observed these effects in the apparatus described here (the Magnetic Trap Stability Experiment called M.T.S.E.). Our first experiments on low density plasma ($n \sim 4.10^{10} \text{ cm}^{-3}$, ion energy 1 keV) showed that a rotating flute instability caused the plasma to be lost from a simple mirror in 60 μsecs ; in a magnetic well energetic ions were observed to remain trapped for 400 μsecs , judged by the fast atom flux due to charge exchange. This decay rate was however 4 or 5 times faster than that due to charge exchange at the static background pressure.

If this is due to injection of neutral gas by plasma bombardment, one would expect that at higher plasma densities the effect would be more severe, and containment times shorter. This has been found to be true, both in the French experiment DECA [7] and in our own work previously reported [6].

The purpose of this paper is to describe in detail recent experiments on the trapping of high density plasma in M.T.S.E., which show that the loss of plasma is almost certainly due to charge exchange on injected gas.

2. General Arrangement

The apparatus is shown in Fig. 1. Plasma from a coaxial gun is guided along a drift tube by a converging d.c. magnetic field into the central trapping region where the field is uniform. Additional mirror fields are produced by pulsed currents in the coils shown. These additional fields rise to their peak value in 50 μsecs and decay by 15% in 1 msec. For the purpose of trapping the fast plasma there is a gate coil of rather smaller diameter at the entrance to the central trap, carrying a large pulsed current which produces a peak field of 13 KG in 12 μsecs , decaying in 50 μsecs .

The sequence of events is as follows:-

The far mirror (mirror 2) is first energised forming a magnetic barrier, the gun is fired ejecting plasma down the tube, and the reflected plasma is trapped by the gate field, which is then replaced by the field of the other mirror coil. Thus plasma is trapped within a simple symmetrical mirror within 50 μsecs .

Six sets of stabilising rods ($l = 3$) are also fitted, lying just outside the wall of the central chamber parallel to the axis. The stabilising field rises in 45 μsecs and decays by 25% in 1 msec.

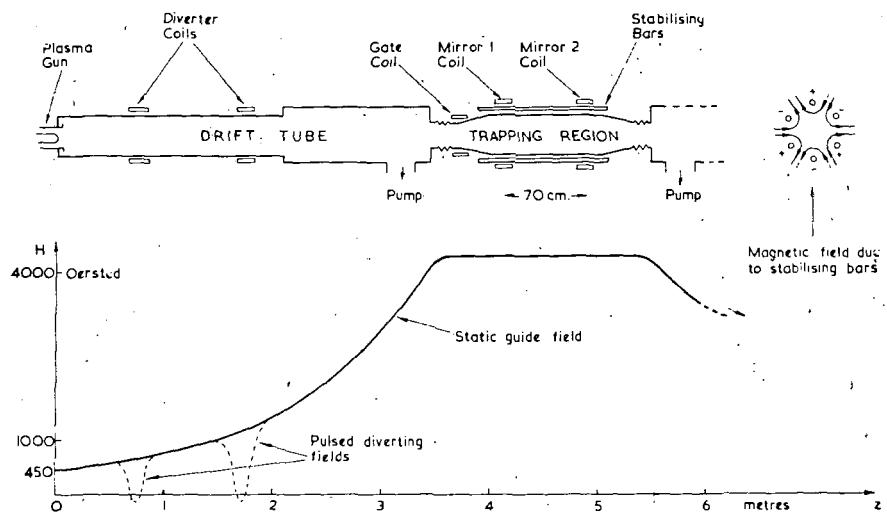


FIG. 1. General experimental arrangement

The simple mirror formed by the pulsed fields superimposed on the d.c. guide field is 70 cm long, and has a mirror ratio of 1.8: the magnetic well formed when the stabilising fields are further superimposed has a ratio of 1.4 (defined as the ratio of the field at the outermost closed contour of B to the field at the centre of the trap).

The vacuum chamber is in three parts: the drift tube is of 9" (22 cms) diameter pyrex glass in the region near the gun, widening to 12" (31 cms) diameter aluminium; the central trapping region is a 22 cm diameter pyrex cylinder with conical ends narrowing to 6" (15 cm) diameter sections where it is joined by stainless steel bellows; beyond this central section is a 3.5 metre long analyser tube (symmetrical with the drift tube) of 31 cm diameter aluminium. Pumping by four 9" oil diffusion pumps gives a base pressure of 3.10^{-7} torr. The system has been partially baked, the central pyrex section up to 130° C.

The gun is 51 cm long, with an inner electrode of diameter 2.85 cms and an outer electrode of diameter 10 cm; it is fed with a condenser bank of $30 \mu F$ working at 16 kV, giving a peak current of 300 KA in 2 μ secs. The initial burst of fast plasma is guided along the drift tube as described: slow plasma from the gun is diverted by rapidly pulsed cusp-type fields applied in the first half of the drift tube after the faster plasma has passed.

3. Methods of measurement

The following techniques have been used:

- (a) Simple single turn diamagnetic loops outside the vacuum system at various points along the tube.

- (b) A compensated diamagnetic loop, (to minimise pick up from the transient mirror and gate fields), placed inside the central vacuum chamber, in the mid plane of the trap. It was found impossible to make an external loop sufficiently compensated, due to asymmetrical metal structures which lie rather close to the vacuum vessel. The internal coil had to be made sufficiently small to be inserted through the 6" conical end: it is 5" (12.7 cms) in diameter, and has the compensating loops wound closely outside it.
- (c) A small magnetic probe, having 80 turns wound on a 2 mm diameter bobbin and movable radially across the mid plane, measuring changes in the axial magnetic field.
- (d) An energy-selective neutral particle detector, to measure the flux of fast atoms from the plasma region resulting from charge exchange. This employs a water vapour cell to ionise the fast atoms, a coarse electrostatic deflector (curved plates) and an energy-selective gridded detector of the kind described by Mason [8]. The coarse deflector simply serves to remove the detector from direct line of sight to the plasma, and this makes it less susceptible to interference. In the detector itself it is possible by choosing suitable potentials on the grids to discriminate between genuine signals due to fast particles, and spurious signals due to a photo electric effect. (See Fig. 2).

The main axis of the instrument is arranged to accept atoms emitted at an angle of approximately 76° to the axis of the trap, in the mid plane. In the simple magnetic mirror these arise from charge exchange between the background gas and ions moving at a fixed angle to the field lines, i.e. having a given ratio of $v_{||} / v_\perp$ in the mid plane. But since the detector is set to respond only to particles within a chosen energy interval it follows that the signal from the instrument will be due ultimately to those ions in the plasma having a given magnetic moment μ , and total energy E . Moreover by changing the grid potentials of the detector to select a different energy, we then select a signal due to plasma ions of a different magnetic moment. This simple relationship does not hold when the plasma is trapped in a magnetic well because the field lines are so twisted that atoms can be injected into the neutral particle detector by ions moving at various angles to different field lines.

- (e) A photomultiplier looking at the wall of the vacuum vessel near the mid plane, and diametrically opposite the neutral particle detector.
- (f) Two double Langmuir probes fitted close to the wall, and used merely to detect the presence of plasma by the flow

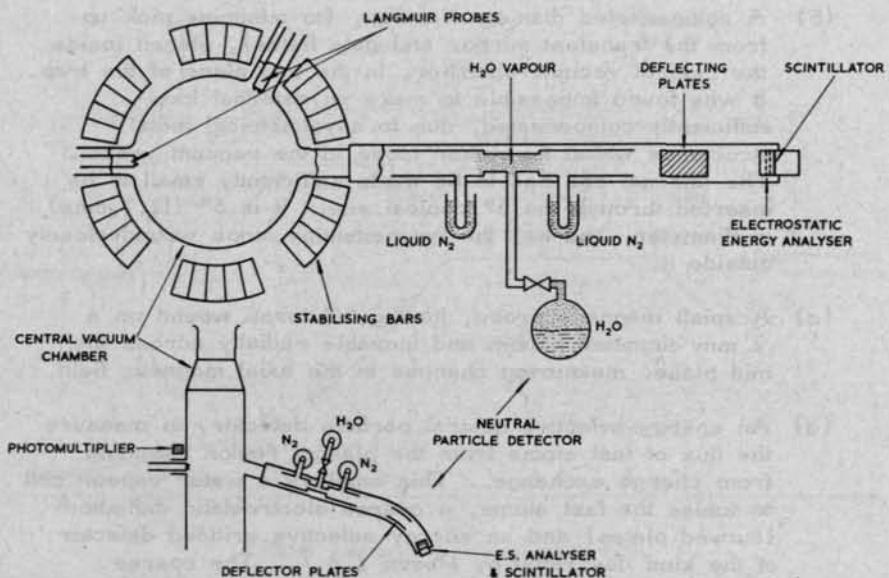


FIG. 2. Methods of measurement

of current between them. One was fitted in the port diametrically opposite the neutral particle detector, the other in another port also in the mid-plane, but lying 120° round the circumference from the first probe. The area of each probe is 10^{-2} cm 2 .

- (g) A fast ion gauge fitted into the port at 120° (the Langmuir probe then being removed).

4. Diamagnetic Measurements

(a) Energy of plasma

Diamagnetic loops placed 200 cm and 450 cm from the gun were used to measure the time of flight of the energetic plasma along the guide field. A typical result is shown in Fig. 3a, where the velocity of the peak is slightly greater than $7 \cdot 10^7$ cms/sec, corresponding to a proton energy of 2.6 keV (In subsidiary experiments using combined energy and time of flight analysis it has been shown that the predominant ion in the fast plasma from the gun is H $^+$).

The two traces on fig. 3a are taken with different oscilloscope sensitivities (1v/cm for the top trace, 50mV/cm the bottom). The diamagnetic loop 2 metres from the gun (top trace) is in a static field of 1.3 KGauss, the further loop, in the mid plane, lies in a field of 4 KGauss. When allowance is made for these factors and for the radial distribution of the plasma (see below) the peak value of β (the ratio of plasma pressure to magnetic pressure) is

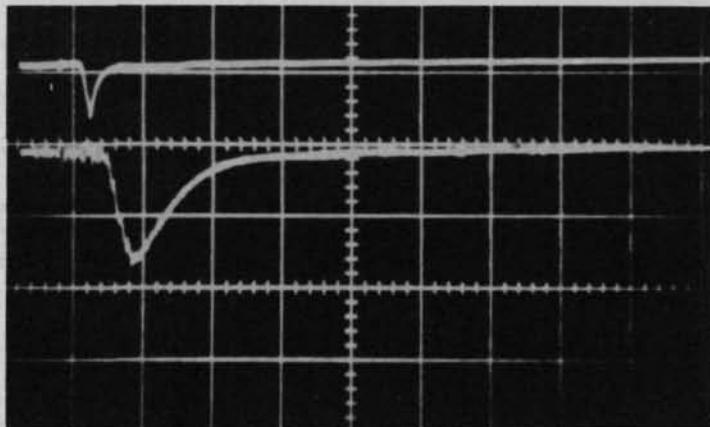


FIG. 3a. Diamagnetic loop signals with d.c. guiding field and diverters only used. Top trace at 2 m from gun, lower trace at centre of trapping region. Sweep speed 5 μ sec per division. (The sensitivity of the lower trace is 10 times that of the upper trace.)

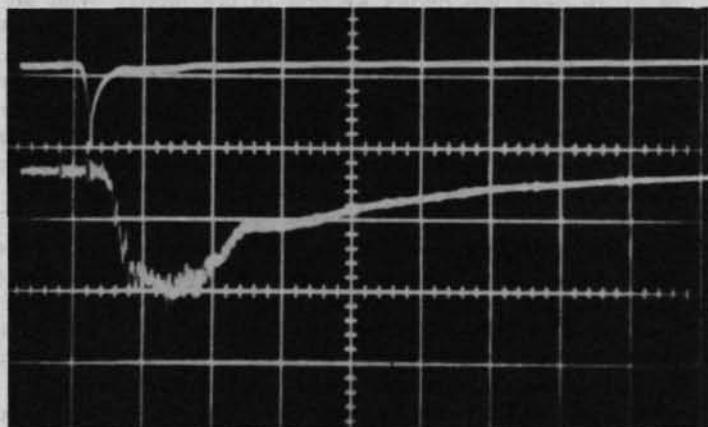


FIG. 3b. Diamagnetic loop signals when simple mirror trapping fields are applied. Top trace at 2 m from gun. Lower trace at centre of trapping region. 5 μ sec/division, sensitivities as for Fig. 3a.

25% under the first loop, and 2.5 to 3% under the second. Most of this change is due to longitudinal dispersion of the plasma arising from the spread in velocities - the duration of the second signal is more than five times greater than the first (Fig. 3a). From other experiments we have evidence that some plasma is lost in travelling along the drift tube, but most of the plasma is guided along the field.

(b) Radial distribution

The movable magnetic probe was used to measure the radial distribution of the injected plasma in the mid-plane

of the trap, (the d.c. guide field only being used). The profile is approximately triangular having a peak at the centre and falling linearly to an undetectable signal at a radius of 6.5 cms. This radial extent is about 50% greater than would be expected if the plasma were rigorously tied to the field lines all the way from the gun, but is only slightly smaller than if the plasma were limited by the 6" aperture of the conical section at the entrance to the central section. It therefore seems likely that the plasma spreads sideways across the guide field, and some of it is scraped off at the entry to the central section.

(c) Trapping of plasma

The diamagnetism of the trapped plasma has been measured by the compensated loop placed inside the vacuum chamber. The loop, having an internal diameter of 12.7 cms encloses nearly all the injected plasma. Fig. 3b shows clearly that the plasma is trapped, the diamagnetic signal persisting for 30 to 35 μ secs. In this oscillogram, β has a mean value of 0.5% over the cross section of the loop. With an ion energy of 2.6 keV this corresponds to a mean density $n \approx 10^{12} \text{ cm}^{-3}$, and assuming the triangular distribution measured above, a peak density of 3.10^{12} at the centre, and a peak value of β of 1.5%. This diamagnetic signal has the same duration and general shape when the stabilising field is applied at the same time as the gate and entrance mirror fields.

The value of β deduced from the response of the small movable magnetic probe is approximately 4 times greater than that deduced from the compensated loop. The reason for this discrepancy is not fully understood, but it may be that plasma is reflected or stagnates against the structure of the probe and its tube to give momentarily an artificially high diamagnetism. The presence of this probe causes the plasma to be destroyed rapidly, presumably as the result of the injection of gas and impurities.

5. Emission of fast atoms

(a) General shape and duration of signals

The neutral particle detector registers the passage of plasma injected along the d.c. field by a single peaked signal like that given by a simple external diamagnetic loop (e.g. fig. 3a). When the trapping fields are applied to form a simple mirror the signal typically lasts 50 to 80 μ secs, and shows some oscillations (like those in Fig. 4). Similar results are obtained from plasma in a magnetic well, but the signal lasts a little longer, up to 140 μ secs [ref. 6]. These measurements were made with no other measuring devices intruding into the plasma.

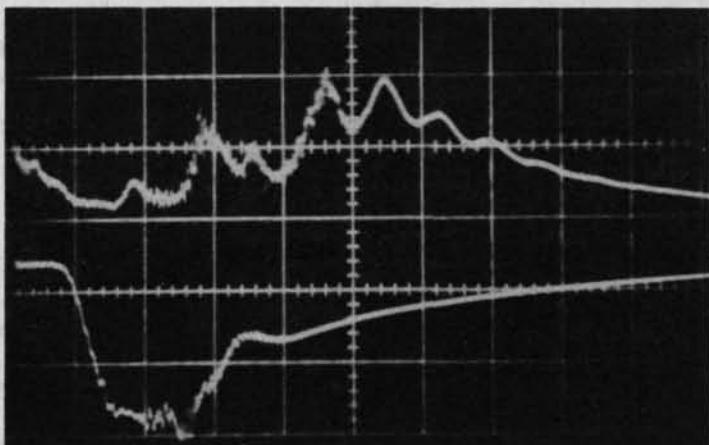


FIG. 4. Simple mirror configuration; sweep speed 5 μ sec/division. Top trace: fast atom flux emitted from plasma. Lower trace: diamagnetic loop signal from trapping region.

(b) Dependence on base pressure

The peak amplitude of the neutral particle detector signal due to injected plasma (i.e. d.c. guide field only) increased by a factor of 10 when the base pressure was raised from $5.5 \cdot 10^{-7}$ torr to $3.3 \cdot 10^{-5}$ torr. The signal due to trapped plasma however was almost independent of pressure over a range of base pressure from $3 \cdot 10^{-7}$ torr to $1 \cdot 10^{-5}$ torr. We conclude that the presence of the plasma itself results in an injection of neutral gas, the mere passage of the plasma through the guide field giving an effective base pressure of $3 \cdot 10^{-6}$ torr, and the trapping of the plasma an effective base pressure of $3 \cdot 10^{-5}$ torr or more. These figures mean that for every ion of trapped plasma, between 1 and 10 neutral molecules have been injected from the walls to fill the central vacuum chamber, within about 100 μ secs.

- (c) The neutral particle detector signals were found to oscillate in amplitude for the first 30-40 μ secs, with a precise period. (See for example Fig. 4). The phase of these oscillations remains constant from shot to shot (see Fig. 8). This is observed when the plasma is trapped in a simple magnetic mirror or in a magnetic well. It was thought that the oscillations occur because, as explained in section 3, the detector respond only to groups of ions of a given μ and E (or μ and J , where $J = \int v_{\parallel} dl$); the signals would then correspond to the periodic motion of this particular group of ions between the mirror points. To test this idea the period of oscillation was compared at two energies, at 1.5 keV and 3 keV ($\pm 15\%$). The period at 1.5 keV was 4.7 μ sec and at 3 keV 3.4 μ sec i.e.

a ratio of 1.37:1. Since this ratio is within 3% of that expected it seems that the assumption is justified. If this interpretation is correct the observation suggests that for 30-40 μ sec at least there is no violent change in μ or J of the particles as this would be expected to destroy the coherence of the particle motions.

6. Simultaneous measurements of diamagnetism and fast atom flux

The fast atom flux was measured with the compensated diamagnetic loop inserted into the central chamber. It was found that the presence of the loop reduced the duration of the neutral particle detector signal to about 35 μ secs. (See Fig. 4). This suggests that the loop is struck by plasma, with the consequent release of gas. In fact the early part (the first 12 μ secs) of the neutral particle detector signal is due to light, since it persisted when the potential was removed from the curved deflector plates. This could also arise from plasma bombardment.

Fig. 4 also shows that the flux of fast neutral atoms due to charge exchange reaches its peak value about 15 μ secs later than the diamagnetic signal. When the diamagnetic signal (and thus presumably the ion density) is at its maximum the true neutral atom flux is in fact very small. The signal given by the neutral particle detector is proportional to the product, $n_+ n_0$, of the ion and neutral gas densities, and since it is clear that the ion density is decaying it must follow that there is a transient increase in the background gas density during the time of the oscillogram (50 μ secs).

7. Simultaneous measurements of visible light and fast atom emission

Three effects were noted when the signal from the photomultiplier and the neutral particle detector were compared

(a) There is always an initial burst of light from the injected plasma. If the plasma is not trapped a small, more or less constant, light signal persists over the time of interest ($\sim 100 \mu$ secs). Whenever the plasma is trapped there is a general correlation in the shape of the light signal and fast atom signal, (see Fig. 5) both rising and falling during the pulse. The light signal rises and falls more slowly than the neutral particle detector signal.

(b) Occasionally, (but only when plasma is trapped in a simple mirror) there is a more detailed correlation, when a burst of light is followed 4 μ secs later by a peak in the neutral particle detector signal. The 4 μ sec delay is just the time required by fast atoms ejected from the plasma region to pass down the tube of the neutral particle detector and reach the ultimate detecting surface (a scintillator). Thus the emission of light and fast neutral atoms occur almost simultaneously. (See Fig. 7).

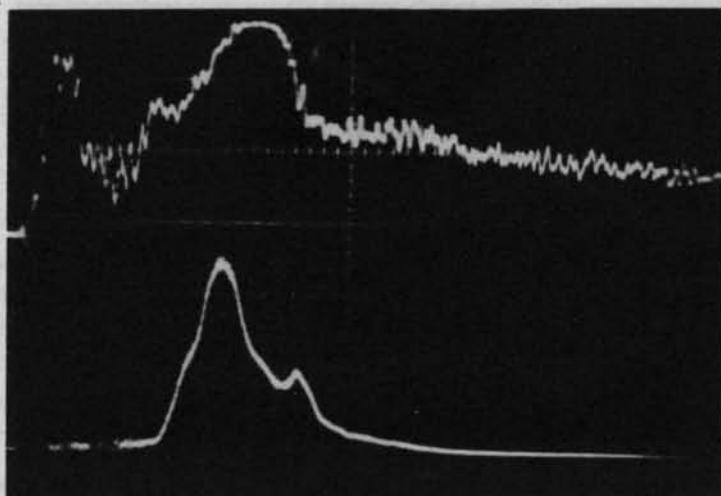


FIG. 5. Simple mirror configuration; sweep speed 10 μ sec/division. Top trace: visible light emission. Lower trace: fast atom flux.

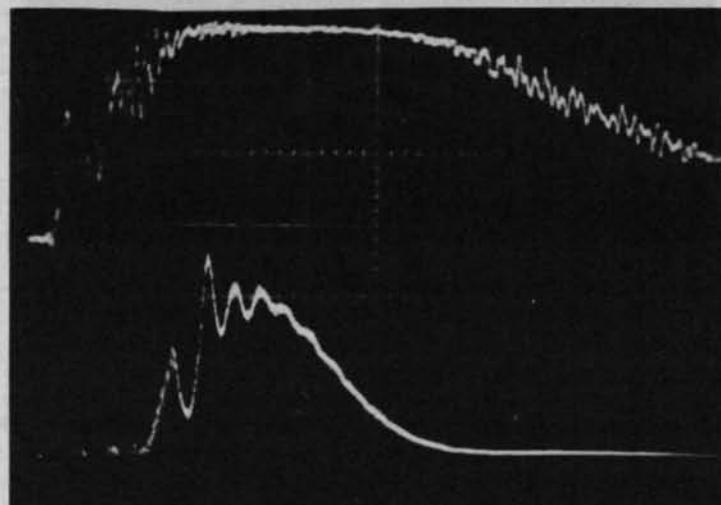


FIG. 6. Magnetic well; sweep speed 10 μ sec/division. Top trace: visible light emission. Lower trace: fast atom flux.

- (c) When the stabilising rods are energised and plasma is trapped in a magnetic well the photomultiplier saturates (see Fig. 6). The photomultiplier looks at a region of the opposite wall between two bars, where the field lines intersect the wall and one would expect intense wall bombardment due to plasma streaming along the field.

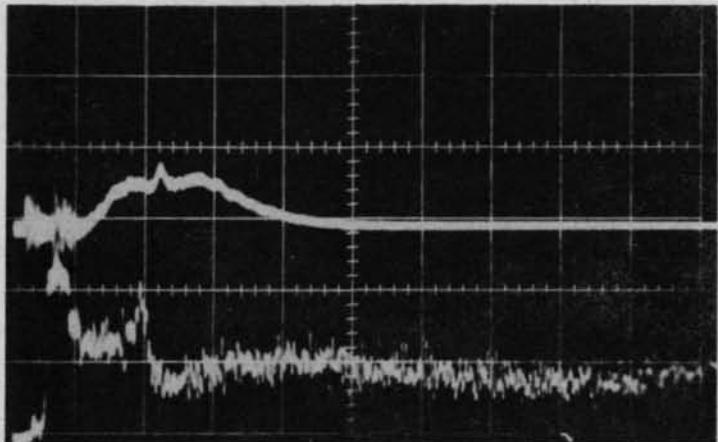


FIG. 7. Simple mirror; sweep speed 20 μ sec/division. Top trace: fast atom flux. Lower trace: visible light emission.

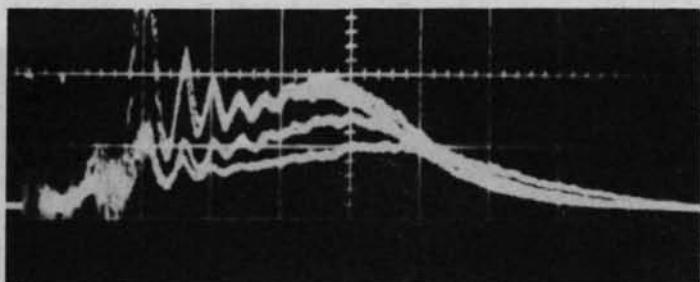


FIG. 8. Fast atom flux from simple mirror configuration (4 shots overlaid). Sweep speed 10 μ sec/division.

8. Langmuir probe measurements

Two double Langmuir probes (floating with respect to earth) were inserted close to the wall in ports 120° apart in the mid plane. It was observed that:

- (a) When the plasma was trapped in a simple mirror one or other of the probes often showed a large signal. This occurred on the average once in every two or three shots. The duration of the signal was usually 10-20 μ sec and appeared between 5 and 30 μ sec after trapping. If the plasma was not trapped these large signals did not appear. Occasionally signals appeared on both probes but not frequently enough to deduce anything about a possible phase relationship between them.
- (b) With the stabilising rods energised the probes detected a signal very rarely (approx. once in 20 shots) and then

usually only early on in the pulse i.e. before the stabilising field had been fully established. (In view of the fact that plasma is known to escape along the cusp lines this result seems rather odd. However the width of the "loss cusp" is only about 0.5 cms so it is possible that the probes did not cover the loss regions).

9. Ion gauge measurements

A fast ion gauge was used to detect the arrival of neutral gas from the gun plenum. No detectable amount of gas arrived in the first 5 milli seconds. (A resistance/capacitance analogue gave similar results). Attempts to measure the rise in pressure in the presence of plasma in the trap failed due to photo emission in the gauge. The photo emission was avoided by positioning the gauge out of line of sight of the plasma but this change resulted in too long a delay between a pressure rise in the trap and the corresponding rise in the region of the gauge.

10. Discussion

The measurements with the diamagnetic loops and the magnetic probe show that most of the fast plasma emitted from the gun is guided into the central chamber by the static field, and that a significant fraction (1/3 to 1/2) of this injected plasma is trapped, and reasonably well centred on the axis.

The important question is whether the plasma is subsequently lost by an instability mechanism or by charge exchange on neutral gas. The observation that the amplitude of the fast atom flux from trapped plasma, (whether in a magnetic mirror or well) is independent of base pressure over a wide range strongly suggests that the main source of loss is charge exchange on injected neutral gas. If plasma were lost mainly by instability then although the duration of the signal from the neutral particle detector should not change with increasing background pressure, its amplitude should. Furthermore the estimated transient rise in pressure (to a few times 10^{-5} torr) is of the right order to destroy the plasma in about 100 μ secs - one cannot be more specific without knowing exactly the composition of the gas ejected from the walls, but earlier mass spectrometer analysis has shown that molecular hydrogen and water vapour are the main constituents. The delay between peak diamagnetism and peak charge exchange emission also point to large transient increase in neutral gas density during the time of interest.

Without spectral analysis it is difficult to draw definite conclusions from the emission of visible light but it is reasonable to suppose that the increase in light output is the result of excitation by plasma electrons of gas molecules or impurities ejected from the wall by plasma or fast atom bombardment. The close correlation between bursts of light and bursts of fast atoms seems impossible to account for otherwise.

The Langmuir probe results indicate that once in every 2 or 3 shots in simple mirror geometry an appreciable amount of plasma reaches the wall before it is completely lost by charge exchange. Under these conditions the neutral particle detector signals show a large variation in plasma lifetime. Clearly on these occasions the plasma is unstable, but it is not possible to say that it is always so. With the stabilising field applied the absence of Langmuir probe signals and the better reproducibility of the signals due to charge exchange indicate a more stable situation.

The regular oscillations in the neutral particle signals are significant because they show that, until the periodic motion of the ions becomes smeared out the adiabatic invariants μ and J are preserved. It therefore appears that no instabilities associated with ion cyclotron resonances occur during this period ($\sim 40 \mu\text{secs}$), since they would produce fluctuating fields with a period of about $1/10 \mu\text{sec}$ and would change the magnetic moment of the ions. Attempts to observe ion cyclotron emission from the plasma have given negative results.

Other experiments to reduce the influx of gas by baking the central glass vessel, and by evaporating lithium have not proved successful, but the lithium coating showed strips of intense bombardment (5 mm wide) along the cusp lines between the stabilising bars.,

II. Conclusions

In the experiments described here, with this particular method of generating and trapping the plasma, the dominant cause of plasma loss is charge exchange on neutral gas injected due to wall bombardment. This is so severe a limitation that plasma lifetime, whether in a simple mirror or magnetic well, is limited to about $100 \mu\text{secs}$. The simple mirror, however, frequently shows evidence of gross instability within this time. It is not possible to say anything about more slowly growing instabilities until the injection of neutral gas can be greatly reduced.

REFERENCES

- / 1 / GOTTL, Y. B.; IOFFE, M. S., and TELKOVSKY, V. G., Proc. Conf. Plasma Physics and Controlled Fusion Salzburg 3 (1961) 1045.
- / 2 / GOTTL, Y. B., IOFFE, M. S., NEZLIN, M. V., SOBOLEV, R. I., Report IAE - 658 Kurchatov Inst. of Nucl. Energy Moscow (1964).
- / 3 / DAMM, C. C. et al, Phys. Rev. Letters, 13 (1964), 464.
- / 4 / BARR, W., PERKINS, W. Bull. Am. Phys. Soc. 2 (1965) 203.

- / 5 / FRANCIS, G., MASON, D. W., and HILL, J. W.
Nature Vol. 203 (1964) 623.
- / 6 / MASON, D. W., HILL, J. W., FRANCIS, G.,
Bull. Am. Phys. Soc. 2, (1965) 204.
- / 7 / BIGUET, A., et al, C. R. Acad. Sci. 259, (1964) 1040
- / 8 / MASON, D. W., Plasma Physics J.N.E. part C
6, (1964) 553.

DISCUSSION

J. R. ROTH: You refer to the anomalous decrease in plasma diamagnetism after two microseconds. Were any of the self-collision or equilibration times as short as that in your apparatus?

G. FRANCIS: At low densities the ion-ion collision time was 400 ms, the electron-electron collision time was 30 ms, and the equipartition time of energy was 26 ms. At high densities the ion-ion collision time was 23 ms, the electron-electron collision time was 0.5 μ s and the equipartition time was 350 μ s. Therefore, I do not think that the plasma properties change much during the time we take for our experiment.

J. TACHON: I believe I am right in thinking that the agreement between the theoretical model and experiment, proving that charge exchange is responsible for plasma losses, requires one to assume that the number of thermal neutrals produced by one ion or one fast neutral is very large.

Is this a reasonable assumption, considering the ratio of the plasma volume to the volume of the chamber?

G. FRANCIS: In order to get the best fit with experimental results we had to assume that one fast particle hitting the wall released about ten neutral molecules. For a Pyrex surface, unbaked and subjected to successive shots of plasma and gas from the gun, there is experimental evidence that this is a reasonable assumption.



CHAUFFAGE ET CONFINEMENT DE PLASMA DANS LE PUITS MAGNETIQUE DE DECA II

A. BIGUET, P. BLANC, R. GRAVIER, P. LACOUSTEY, H. LUC, C. RENAUD,
J. TACHON ET D. VERON

CENTRE D'ETUDES NUCLEAIRES DE FONTENAY-AUX-ROSES, SEINE, FRANCE

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

HEATING AND CONTAINMENT OF PLASMA IN THE MAGNETIC WELL IN DECA II. A jet of deuterium plasma obtained by an induction gun is guided and slowed down adiabatically by an increasing static longitudinal magnetic field. The energetic part of the plasma is captured between a pulsed magnetic barrier and gate, and then adiabatically compressed between two mirrors. A magnetic well configuration is produced by superimposing a pulsed quadrupolar magnetic field. The lifetime of the hot plasma (mean energy 1 keV) is 50 μ s in the simple mirror configuration (in which flute instabilities are observed) and 200 μ s in the magnetic well configuration. The plasma density - determined by microwave interferometry, spectroscopy in the near ultraviolet, or attenuation of a neutral atom beam - lies between 1×10^{13} and 3×10^{14} cm $^{-3}$, whereas the density deduced from the emission of fast neutral atoms by the plasma (assuming that the plasma is lost only by charge exchange) is substantially lower, being of the order of 10^{10} cm $^{-3}$. The experimental results do not rule out the hypothesis that the lifetime of the plasma is limited by diffusion in the cone of losses.

CHAUFFAGE ET CONFINEMENT DE PLASMA DANS LE PUITS MAGNETIQUE DE DECA II. Un jet de plasma de deutérium produit par un canon à induction est guidé et freiné adiabatiquement par un champ magnétique statique longitudinal croissant. La fraction énergétique du plasma est capturée entre une barrière et une porte magnétiques pulsées, puis comprimée adiabatiquement entre deux miroirs. La superposition d'un champ quadrupolaire pulsé permet de créer une configuration à puits magnétique. Le temps de vie du plasma chaud (d'énergie moyenne 1 keV) est de 50 μ s dans la configuration en miroirs simples (où l'on observe des instabilités en flûte) et 200 μ s dans la configuration à puits magnétique. La densité du plasma, déterminée par interférométrie micro-ondes, spectroscopie dans le proche ultraviolet, ou atténuation d'un faisceau d'atomes neutres est comprise entre 10^{13} et $3 \cdot 10^{14}$ cm $^{-3}$. Par contre, la densité déduite de l'émission d'atomes neutres rapides par le plasma, - en admettant que celui-ci n'est perdu que par échange de charge -, est nettement plus faible, de l'ordre de 10^{10} cm $^{-3}$. L'ensemble des résultats expérimentaux n'exclut pas l'hypothèse que le temps de vie du plasma est limité par la diffusion dans le cône de perte.

НАГРЕВАНИЕ И УДЕРЖАНИЕ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОЙ ЯМЕ УСТАНОВКИ ДЕКА II. Струя дейтериевой плазмы, получаемая с помощью индукционной пушки, направлялась и адиабатически тормозилась возрастающим продольным статическим магнитным полем. Энергичная часть плазмы захватывалась между импульсными магнитными барьерами, а затем адиабатически сжималась между двумя зеркалами. Наложение квадрупольного пульсирующего поля позволяло создавать конфигурацию магнитной ямы.

Время жизни теплой плазмы (со средней энергией 1 кэВ) составляет 50 мсек в конфигурации простых зеркал (где наблюдаются флютовые неустойчивости) и 200 мсек в конфигурации магнитных ям. Плотность плазмы, определяемая с помощью микроволновой интерферометрии, спектроскопии и ультрафиолетовой области или ослаблением пучка нейтральных атомов, лежит между 10^{13} и $3 \cdot 10^{14}$ см $^{-3}$. Вместе с тем плотность плазмы, выводимая путем эмиссии быстрых нейтральных атомов, при условии, что плазма теряется лишь при переразрядке, заметно более низкая и составляет порядка 10^{10} см $^{-3}$. Совокупность экспериментальных результатов не исключает гипотезы о том, что время жизни плазмы ограничено диффузией в выводящем конусе.

CALENTAMIENTO Y CONFINAMIENTO DE PLASMA EN EL POZO MAGNETICO DE DECA II. En este experimento, los autores producen un chorro de plasma de deuterio en un cañón de inducción, y lo guían y frenan adiabáticamente mediante un campo magnético estático, longitudinal y creciente. La fracción del plasma de mayor energía queda atrapada en la cámara de compresión, entre una barrera y una puerta magnéticas pulsadas; luego se la comprime adiabáticamente entre dos espejos. La superposición de un campo cuadru-

polar permite crear una configuración de pozo magnético. La vida del plasma caliente (energía media 1 keV) es de 50 μ s en la configuración de espejos simples (en la que se observan inestabilidades en estrías) y de 100 μ s en la configuración de pozo magnético. La densidad del plasma, determinada por interferometría de microondas, espectroscopía en la región ultravioleta próxima o atenuación de un haz de átomos neutros, varía entre 10^{13} y $3 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$. En cambio, la densidad deducida de la emisión de átomos neutros rápidos por el plasma, suponiendo que éste sólo se pierde por intercambio de cargas, es netamente menor, del orden de 10^{10} cm^{-3} . El conjunto de los resultados experimentales no excluye la hipótesis de que la vida del plasma esté limitada por la difusión en el cono de pérdidas.

1. INTRODUCTION

L'injection de plasma dans des puits magnétiques a déjà été étudiée dans divers laboratoires. Le plasma est créé à l'intérieur d'une configuration statique [1], ou injecté, de l'extérieur, dans une configuration pulsée [2, 3]. Les instabilités en flûte, décelées en configuration à miroirs simples, disparaissent lorsque l'intensité du champ stabilisateur est suffisante pour créer un puits magnétique; lorsque la densité est de l'ordre de 10^{10} à 10^{11} cm^{-3} , le temps de vie est limité, soit par l'échange de charge sur le gaz résiduel [1, 2], soit par une nouvelle instabilité [3]. Lorsque la densité du plasma injecté dépasse 10^{11} cm^{-3} , il semble que le dégazage des parois, consécutif au mode de remplissage [1] ou aux fuites de particules [4] augmente la pression du gaz ambiant et réduise le confinement.

Le présent rapport fait état de mesures analogues, effectuées pour un régime de densité de l'ordre de 10^{13} à 10^{14} cm^{-3} dans un Dispositif d'Etude de Compression Adiabatique (DECA-II) [5]. Le plasma, produit à l'extérieur, est injecté dans une configuration pulsée. Cette dernière est, soit une bouteille de révolution à miroirs simples, soit un puits magnétique obtenu en superposant un champ quadripolaire à la configuration précédente. Par la suite, ces deux configurations seront appelées, respectivement, "miroirs simples" et "puits magnétique".

2. DESCRIPTION DE L'EXPÉRIENCE (Fig. 1)

Un jet de plasma de deutérium, produit par un canon à induction (1), est guidé et freiné adiabatiquement par un champ statique longitudinal croissant (3). Une fraction du plasma est capturée dans la chambre de compression, entre une barrière magnétique quasi-statique (4) et une porte magnétique pulsée (5), puis comprimée adiabatiquement entre deux miroirs magnétiques (4), (6) [6]. La superposition d'un champ quadripolaire (7), créé par un courant pulsé circulant dans quatre barres parallèles à l'axe de la chambre de compression, permet de créer une configuration à puits magnétique [6]. Celle-ci est caractérisée par le rapport (α) de l'intensité du champ entre barres au champ sur l'axe. Le puits magnétique existe si $\alpha > 1$. Pour des conditions expérimentales typiques, la figure 2 montre l'évolution de α pour 3 valeurs de l'intensité maximale du champ quadripolaire. Pour certaines mesures, un diaphragme a été placé à l'entrée de la chambre de compression afin de réduire le diamètre du plasma injecté.

3. CARACTÉRISTIQUES DU PLASMA INJECTÉ

Les caractéristiques du plasma injecté ont été déterminées à partir des mesures faites en l'absence de champs pulsés. L'intensité du champ magnétique statique est repérée par sa valeur B_1 au niveau du plan médian de l'étage de compres-

[7] Le plan équidistant des bobines (4) et (6) sera appelé "plan médian" de l'étage de compression. Il est distant de 5,5 m du canon.

SCHEMA DE PRINCIPE DE DECA II

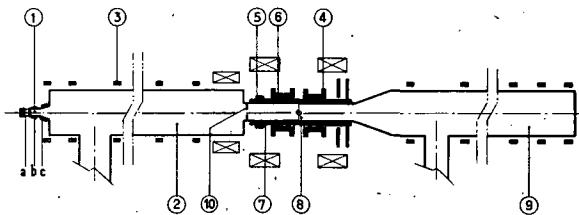
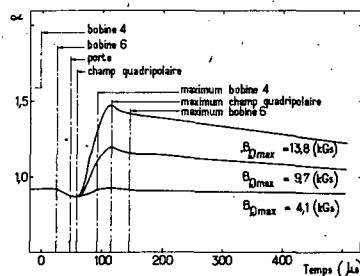


FIG. 1. Schéma de principe de DECA II

- 1) Canon à induction. a) Réservoir et vanne rapide. b) Spire de préionisation: monospire en cuivre, diamètre 8 cm, alimentée par une capacité de $0,5 \mu F$ chargée sous 22 kV (période 1,5 μs). c) Spire principale: monospire de forme conique en cuivre, diamètre moyen 8 cm, alimentée par un banc de condensateurs de 1 à 4 kJ sous 25 kV (période 9 μs pour 4 kJ); tension de travail: $U_t = 21$ kV
- 2) Chambre de l'étage d'injection: cylindre métallique, diamètre 50 cm et longueur 4,25 m
- 3) Bobines créant le champ magnétique statique de guidage
- 4) Bobine pulsée créant la barrière magnétique et un miroir de la configuration finale ($T/4 = 158 \mu s$; $\tau = 1,3$ ms; $B_M = 3,4$ kGs/kV; $U_t = 7$ kV)
- 5) Bobine porte ($T/4 = 7 \mu s$; $\tau = 325 \mu s$; $B_M \approx 0,7$ kGs/kV; $U_t = 18$ kV)
- 6) Bobine pulsée créant le deuxième miroir de la configuration finale ($T/4 = 130 \mu s$; $\tau = 1,3$ ms; $B_M = 2,8$ kGs/kV; $U_t = 10$ kV)
- 7) Enroulement quadrupolaire ($T/4 = 60 \mu s$; $\tau = 0,7$ ms; $I_M = 50$ kA/kV; $U_t = 5$ kV)
- 8) Chambre de compression, diamètre interne utile 12 cm, longueur 1,5 m
- 9) Chambre de l'étage de détection: cylindre métallique, diamètre 50 cm et longueur 2 m
- 10) Diaphragme métallique (diamètre d'ouverture: 120, 55 ou 20 mm)

FIG. 2. Evolution du paramètre α au cours du temps

$$\alpha = \left[\frac{(B_r^2 + B_z^2)}{B_{zo}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \left. \begin{array}{l} B_r \text{ et } B_z \text{ mesurés à } r = 6,4 \text{ cm} \\ B_{zo} \text{ mesuré à } r = 0 \end{array} \right\} \text{ dans le plan médian}$$

Le tir est à $t=0$

sion 2/. Des mesures de profil radial du plasma, faites au moyen de thermocouples, ont montré que le plasma s'écoule dans un tube de flux lorsque B_1 dépasse 1 kGs.

Les spectres d'énergie et de masse ont été déterminés à l'aide d'un analyseur électrostatique placé au bout de la machine à 9,35 m du canon ; le champ magnétique au droit de l'analyseur est inférieur à 1 % de B_1 . L'énergie

2/

L'indice 1 caractérisera les grandeurs mesurées au niveau de ce plan médian.

moyenne des deutons est de 1 keV (pour $B_1 = 1,4$ kGs et 4 kJ emmagasinés dans le banc d'énergie du canon). Les principales impuretés sont O^{+++} , O^{++} , O^+ , C^{++} , C^+ , H^+ . Le rapport entre le nombre total d'ions lourds et le nombre des deutons est inférieur à 2 %.

Des mesures effectuées en l'absence de champ magnétique permettent d'évaluer la durée d'émission du plasma à 0,6 μ s. En présence de champ magnétique, les signaux détectés après l'analyse présentent un élargissement (Δt) dissymétrique vers les temps croissants. Ceci suggère que le phénomène résulte principalement de la variation de la composante parallèle de la vitesse des particules au cours de leur mouvement le long du champ statique variable dans l'espace.

En affectant à chaque groupe de particules d'énergie longitudinale donnée ($W_{//}$) une "température" transversale ($T_{\perp 0}$) au niveau du canon, on montre que :

$$\Delta t \propto \frac{k T_{\perp 0}}{W_{//}^{3/2}} \quad \text{si} \quad k T_{\perp 0} \ll W_{//}$$

Dans le cas où $B_1 = 1,4$ kGs, on a observé que $\Delta t \propto \frac{1}{E}$ (où E désigne l'énergie d'analyse). On en déduit donc que :

$$k T_{\perp 0} \propto W_{//}^{1/2} \quad \text{pour} \quad 0,2 < W_{//} < 4 \text{ keV}$$

La "température" des tranches successives du plasma s'obtient en ajustant les largeurs à mi-hauteur des signaux calculés et observés. Par ailleurs, l'énergie transversale moyenne a été déterminée d'une façon plus directe en mesurant le diamagnétisme du plasma et sa transmission à travers une barrière magnétique [8].

Les résultats des différentes mesures, rapportés au niveau de l'étage de compression, pour les deutons dont l'énergie moyenne longitudinale est de 1 keV et pour $0,8 < B_1 < 2,5$ kGs, peuvent se résumer ainsi :

$$\frac{k T_{\perp 1}}{B_1} \simeq 200 \text{ eV/kGs} \quad (1)$$

Si on admet une distribution gaussienne de la densité, et désignant par r_p le rayon moyen du plasma, on a :

$$\frac{n_1}{B_1} \simeq 3 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}/\text{kGs} \quad (2)$$

$$B_1 r_p^2 \simeq 4,4 \text{ kGs} \cdot \text{cm}^2 \quad (3)$$

Combinant les équations (1) à (3), on montre aisément que le signal diamagnétique mesuré aux boucles magnétiques doit être sensiblement indépendant de B_1 , ce qui s'est toujours trouvé vérifié. Remarquons, par ailleurs, que le rayon du plasma observé est de l'ordre du rayon de Larmor des ions.

4. CHAUFFAGE PAR COMPRESSION ADIABATIQUE

L'énergie des ions du plasma confiné est déterminée à partir du spectre en énergie des atomes neutres rapides, formés par échange de charge sur le gaz am-

biant, et s'échappant dans le plan médian, perpendiculairement à l'axe magnétique.

Ces neutres sont réionisés dans une cellule à gaz et analysés en énergie, puis, comptés à l'aide d'un détecteur d'ions à émission secondaire-scintillation [9]. L'angle d'ouverture des détecteurs est de $1,7 \cdot 10^{-3}$ rad. Dans certains cas, lorsque la sensibilité l'exigeait, nous avons détecté les neutres par émission secondaire. La première méthode a pour avantage sur la seconde de permettre l'analyse en énergie et la discrimination entre neutres et rayonnement ultra-violet.

L'étalonnage a montré que l'ionisation des neutres dans la cellule et la détection des ions n'apportent pas de distortion au spectre des neutres émis par le plasma. Pour déduire l'énergie moyenne des ions confinés (\bar{E}_i) à partir de l'énergie moyenne des neutres (E_0), il faut connaître la nature des particules cibles sur lesquelles se fait l'échange de charge (hydrogène ou azote, atomes ou molécules). Nous avons calculé le rapport \bar{E}_i/E_0 dans deux cas extrêmes (échange de charge résonnant et échange de charge sur les molécules d'azote), en faisant l'hypothèse d'une distribution maxwellienne des ions. On trouve ainsi que \bar{E}_i/E_0 varie de 0,8 à 0,5 lorsque \bar{E}_i est compris entre 0,5 et 4 keV. Nous retiendrons la valeur $\bar{E}_i/E_0 = 0,6$. La figure 3 donne un type de spectre en énergie des neutres dans la configuration en miroirs simples.

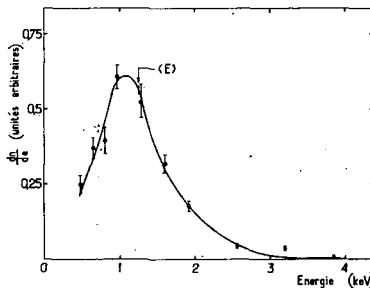


FIG. 3. Spectre d'énergie des neutres rapides
Configuration en miroirs simples

$B_{\max 1} = 8$ kGs

Diaphragme $\phi = 55$ mm

Afin d'étudier le chauffage des ions par le champ magnétique de compression, nous avons déterminé l'énergie des ions, d'une part en faisant varier l'intensité maximale du champ de compression (figure 4) et, d'autre part, en fonction du temps pendant la phase de compression.

Dans la partie décroissante de la fonction de distribution, le rapport du nombre de particules $N(E_1)$ ayant une énergie E_1 au nombre de particules $N(E_2)$ ayant une énergie $E_2 > E_1$ doit varier dans le même sens que le champ magnétique, s'il y a chauffage. Expérimentalement, le rapport du nombre de neutres de 3 keV à ceux de 1 keV suit sensiblement la variation de B_1 jusqu'au maximum de ce champ.

L'effet du chauffage adiabatique apparaît lorsque l'on compare les énergies moyennes obtenues en "miroirs simples" et en "puits magnétique". En présence d'un diaphragme, les maxima d'émission de neutres s'observent aux 30ème et 120ème [10], respectivement; dans l'intervalle, l'intensité du champ B_1 a doublé ainsi que l'énergie moyenne des particules (E passe de 0,7 à 1,2 keV).

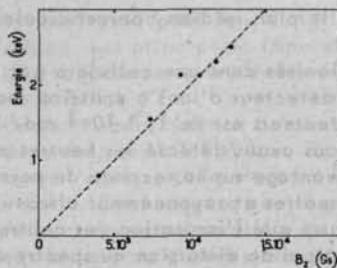


FIG. 4. Energie moyenne des neutres rapides en fonction de l'intensité du champ magnétique

Configuration en miroirs simples

Diaphragme $\varnothing = 120$ mm

Energie intégrée sur toute la durée de l'émission

5. COMPARAISON DU CONFINEMENT EN "MIROIRS SIMPLES" ET EN "PUITS MAGNETIQUE"

L'évolution du plasma a été suivie par les méthodes de mesure suivantes :

- Les histogrammes de neutres rapides ont été déterminés à l'aide d'un bloc mémoire monté en multiéchelles avec une résolution temporelle de $10 \mu\text{s}$. On en déduit la constante de temps de décroissance du flux de neutres rapides que nous considérons comme représentative du temps de vie du plasma (τ).
- La lumière émise par le plasma, dans l'étage de compression, a été photographiée par des caméras placées sur l'axe, au bout de la machine. Une caméra électronique à convertisseur d'image, fonctionnant en caméra à images ou en caméra à fente, permet une résolution temporelle.
- Des sondes électriques, couplées capacitivement avec le plasma, ont été placées dans le plan médian.
- Un faisceau de neutres atomiques de 1 à 4 keV, et d'intensité équivalente 10^{-12} A , peut traverser le plasma dans le plan médian. Son atténuation est mesurée en employant pour la détection le dispositif décrit ci-dessus.
- Des interféromètres micro-ondes, placés dans le plan médian, permettent de mesurer la densité électronique. Les trois longueurs d'onde employées ont été, suivant les expériences, 2, 4 ou 8 mm.
- La valeur absolue du flux lumineux dans le visible et le proche ultra-violet a été mesurée à l'aide de filtres ^{3/}. La densité du plasma est déduite en interprétant l'émission comme du rayonnement de freinage.

5.1. Résultats expérimentaux

En ne limitant pas le diamètre accessible au plasma dans la chambre de compression, les histogrammes du flux de neutres rapides montrent l'existence de pertes catastrophiques. En effet, dans les deux configurations, le maximum du flux de neutres rapides se produit $30 \mu\text{s}$ après la capture (alors que la compression dure $120 \mu\text{s}$). Quand on passe des "miroirs simples" au "puits magnétique", le temps de vie décroît de 40 à $20 \mu\text{s}$, l'intensité du rayonnement visible augmente d'un facteur 10 et la durée de la coupure d'un faisceau de micro-ondes en 4 mm ($n_e > 6 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$) passe de 30 à $10 \mu\text{s}$. À l'instant du maximum du flux de neutres rapides, la densité dépasse $6 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ pour $B_{\max} = 10 \text{ kGs}$ et est supé-

^{3/}

Mesures effectuées par H.W. DRAWIN

rière à $2 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ lorsque $B_{\max_1} = 15 \text{ kGs}$. Les photographies indiquent des fuites très importantes de plasma ; celles-ci n'ont pas de direction privilégiée en "miroirs simples", alors qu'elles se produisent toujours dans les plans bissecteurs entre barres en "puits magnétique". Ces résultats suggèrent les interprétations suivantes :

- En "miroirs simples", le mauvais confinement résulte d'instabilités.
- En "puits magnétique", certaines lignes de force coupent la paroi dans la zone du plan médian ; il en résulte un bombardement intense qui produirait une désorption suffisante pour détruire rapidement le plasma par échange de charge.

Pour étayer cette dernière hypothèse, le diamètre du plasma injecté a été réduit par interposition d'un diaphragme à l'entrée de la chambre de compression, et une feuille métallique en Inconel de 0,1 mm d'épaisseur a été placée contre la paroi interne de la chambre en pyrex. Sauf mention contraire, le diamètre du diaphragme est de 20 mm.

Mesures avec diaphragme

a) En "miroirs simples", les signaux de neutres présentent un pic ou une succession de pics à décroissance rapide dont l'amplitude est faible au moment du maximum de compression. L'énergie moyenne des ions est de l'ordre de 0,7 keV. Les photographies intégrées dans le temps font apparaître (figure 5-a) une fuite rapide de la colonne de plasma vers la paroi, mais sans direction privilégiée.

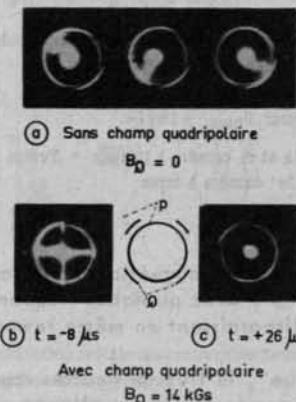


FIG. 5. Photographies du plasma intégrées sur toute la durée du choc

Diaphragme $\varnothing = 20 \text{ mm}$

p : paroi de la chambre de $\varnothing = 120 \text{ mm}$

Q : barres du champ quadripolaire

t : instant de lancement du champ quadripolaire par rapport au début de la capture

$n = 10^{15} \text{ particules} \times \text{cm}^{-3}$

Champ au centre: $B_{\max_1} = 10 \text{ kGs}$

Pour suivre l'évolution temporelle de la lumière, il a fallu opérer avec un diaphragme de 55 mm de diamètre pour avoir une luminosité suffisante.

La figure 6-a présente trois images consécutives d'une même expérience. Elle permet d'estimer que le diamètre initial du plasma est de 4 cm et d'évaluer à $10 \mu\text{s}$ le temps mis par le plasma pour parcourir les 4 cm qui séparent sa frontière de la paroi. Pour une autre expérience (photographie 6-b), la vitesse de déplacement du plasma est de l'ordre de $0,2 \text{ cm}/\mu\text{s}$.

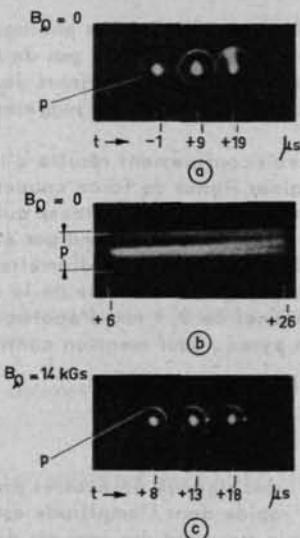


FIG. 6. Photographies du plasma résolues dans le temps

Diaphragme $\varnothing = 55$ mm

$t = 0$ début de la capture

$tBQ = +6 \mu s$: instant de lancement du champ quadripolaire

p: paroi de la chambre de $\varnothing = 120$ mm

$n = 10^{13}$ particules $\times cm^{-3}$

Champ au centre: $B_{max} = 10$ kGs

Photographies a et c: caméra à images - Temps de pose: $1 \mu s$

Photographie b: caméra à fente

Pendant la montée des champs magnétiques, la sonde électrique décale des champs électriques fluctuants ^{4/}, avec quelques fréquences dominantes (200 kcs, 1 Mcs, 7 Mcs); les signaux disparaissent en même temps que le flux de neutres.

b) En "puits magnétique", le flux de neutres rapides croît pendant toute la durée de la compression et le temps de vie est allongé; la compression a sa pleine efficacité, comme l'atteste l'énergie moyenne des ions $E_i = 1,2$ keV (cf. § 4). Les photographies indiquent que les fuites se produisent dans les plans bissecteurs entre barres. Elles sont très lumineuses si le champ stabilisateur est lancé avant la capture (photographie 5-b) ou si la pression résiduelle est mauvaise ($> 5 \cdot 10^{-6}$ torr). Par contre, si le champ quadripolaire est lancé après la capture, les fuites sont peu lumineuses (photographies 5-c, 6-c). Les fluctuations décelées sur les signaux de sondes électriques diminuent lorsque l'intensité maximale du champ quadripolaire augmente. Lorsque cette intensité est suffisante pour créer un puits magnétique, l'amplitude des signaux périodiques décroît d'un facteur supérieur à 100; ils ne sont plus décelables.

La densité du plasma, au maximum de la compression, a été déterminée par plusieurs méthodes, dans des expériences différentes, où les paramètres de fonction-

^{4/} —

Mesures effectuées par P. BROSSIER

nement étaient identiques. Les mesures micro-ondes ^{5/} permettent d'évaluer une densité voisine de la coupure en 8 mm ($n_e > 1,6 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$) ^{6/}.

L'atténuation d'un faisceau d'atomes neutres de 2 keV conduit à une densité de l'ordre de 10^{14} cm^{-3} , en admettant que l'atténuation résulte des réactions d'échange de charge résonnant et de l'ionisation par les ions et les électrons. Un calcul à partir de la valeur absolue du flux de neutres rapides émis par le plasma donnerait une densité de l'ordre de 10^{10} cm^{-3} , en supposant que tous les ions soient perdus par échange de charge et que l'efficacité de comptage des neutres soit de 0,8 (nous avons mesuré un rendement de la cellule à gaz de 80 % et estimé à 100 % le rendement de comptage des ions formés). Le flux lumineux recueilli dans le proche ultra-violet correspondrait à une densité légèrement supérieure à 10^{13} cm^{-3} . Ces valeurs, très différentes de densité, seront analysées au § 6.

La distribution radiale des centres émetteurs des neutres rapides a été obtenue en déplaçant verticalement sur + 25 mm un ensemble de deux détecteurs disposés à 180° dans le plan médian. Un alignement optique permet de s'assurer que les deux détecteurs voient le même volume de plasma. Les deux distributions radiales obtenues (figure 7) sont symétriques par rapport à l'axe magnétique. L'espace-ment entre leurs maxima croît avec l'énergie moyenne des ions, ce qui pourrait s'expliquer par les grands rayons de giration des ions (l'espacement est de l'ordre du diamètre de Larmor des ions); un effet résultant d'une opacité partielle aux neutres thermiques irait dans le même sens. Si le plasma est transparent aux neutres son rayon moyen est de l'ordre de 15 mm. Des mesures optiques, effectuées radialement, ont donné une valeur de $r_p \approx 8 \text{ mm}$.

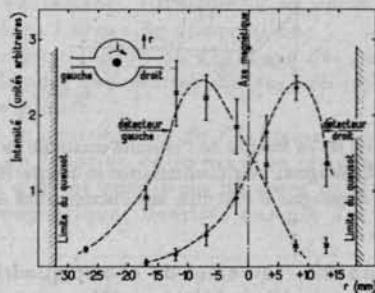


FIG. 7. Distribution radiale des centres émetteurs de neutres rapides
Configuration à puits magnétique
Résolution spatiale 6 mm
Distribution intégrée sur toute la durée de l'émission et sur toutes les énergies
Diaphragme 20 mm

L'extension axiale du plasma a été déterminée en avançant sur l'axe et vers le canon un disque métallique de 60 mm de diamètre et en relevant l'évolution du flux de neutres rapides émis par le plasma (temps de vie et amplitude) en fonction de la position du disque. Un comportement très différent est observé pour deux régimes particuliers que nous avons étudiés. Dans le premier régime (R_1), où le champ quadripolaire est appliqué après la capture, le flux de neutres est perturbé dès que le disque a franchi le miroir créé par la bobine barrière (à 20 cm du plan

^{5/}

Mesures effectuées par B. ZANFAGNA

^{6/} Notons cependant que les dimensions transversales de la colonne de plasma et du faisceau micro-ondes sont comparables.

médian). Dans le second régime (R_2), où le champ quadripolaire est lancé 35 μ s avant la capture, il faut avancer le disque jusqu'à 4 cm du plan médian pour perturber le flux de neutres. En comparant ces résultats avec la configuration magnétique calculée au maximum des champs, on remarque qu'à 4 cm le rapport de miroir vaut 1,1 et que le degré d'anisotropie de la fonction de distribution serait alors de 10.

5.2. Variation du temps de vie avec l'intensité maximale du champ quadripolaire

Sans diaphragme, le temps de vie diminue rapidement d'un facteur 2, puis reste à peu près constant (figure 8).

En présence de diaphragme, la variation avec l'intensité du champ quadripolaire présente un palier, une brusque augmentation d'un facteur 2 à 3, suivie d'un nouveau palier.

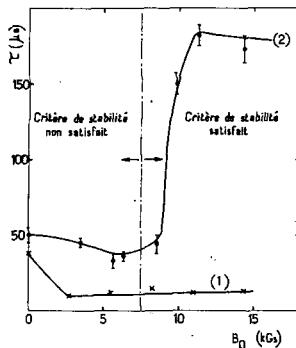


FIG. 8. Temps de vie (τ) en fonction de l'intensité maximale du champ quadripolaire
Courbe (1) - sans diaphragme; avec discrimination en énergie ($E_{\text{neutres}} = 2 \text{ keV}$)
Courbe (2) - avec diaphragme $\phi = 20 \text{ mm}$; sans discrimination en énergie

A titre de comparaison, la valeur de champ quadripolaire suffisante pour empêcher le développement de l'instabilité en flûte est calculée. Le critère utilisé est que l'invariant $J = \int m v // dl$ soit une fonction décroissante de la distance à l'axe [6] pour chaque particule considérée comme isolée. La valeur limite calculée, reportée sur la figure 8, est en bon accord avec la transition observée.

Le fait que la valeur maximale de τ observée en puits magnétique soit inférieure à la constante de temps de décroissance des champs pulsés ($\sim 1 \text{ ms}$), exige l'examen des causes de pertes, susceptibles de limiter τ . Celles-ci peuvent se classer en pertes normales : diffusion dans le cône de perte, échange de charge sur le gaz ambiant, et en pertes anormales : pollution par le plasma froid, équilibre perturbé par la présence de champ ambipolaire, instabilité dans l'espace des vitesses.

6. CAUSES POSSIBLES DE LIMITATION DU TEMPS DE VIE EN PUITS MAGNETIQUE

6.1. Diffusion dans le cône de perte

L'énergie moyenne (\bar{E}_i) des ions confinés peut être fixée entre les limites $0,8 \text{ keV} < \bar{E}_i < 1,8 \text{ keV}$. Les évaluations de la densité (n_i) du plasma sont

moins sûres (cf. § 5). Trois mesures définissent une densité du plasma présent dans le plan médian, comprise entre 10^{13} et 10^{14} , sans qu'on puisse assurer que cette densité soit celle d'un plasma confiné. La quatrième mesure donnerait une densité de l'ordre 10^{10} en supposant que le processus de pertes des ions soit uniquement l'échange de charge. Nous écarterons cette dernière valeur pour des raisons exposées dans ce qui suit.

Selon le choix que nous faisons pour n_i et E_i , dans les limites indiquées ci-dessus, le temps de collision (t_{ij}) qui détermine la vitesse de diffusion dans le cône de perte est compris dans la gamme $0,2 \text{ ms} < t_{ij} < 6 \text{ ms}$. Bien que le temps de vie (τ) mesuré atteigne la limite inférieure de t_{ij} , il semble peu probable que nous ayons confiné un plasma de densité 10^{14} cm^{-3} , d'énergie moyenne $0,8 \text{ keV}$ dont le temps de vie ($0,2 \text{ ms}$) s'expliquerait par la diffusion classique dans le cône de perte. En effet, nous n'avons pas observé d'allongement du temps de vie au cours de la décroissance du flux de neutres qui dure jusqu'à 1 ms.

6.2. Echange de charge

Pour un plasma dont l'énergie moyenne des ions est de l'ordre du keV, les pertes par échange de charge peuvent devenir prépondérantes, car les sections efficaces de neutralisation ont leur maximum dans cette gamme d'énergie.

En plus du gaz résiduel, deux autres sources de gaz peuvent entraîner des pertes par échange de charge :

- la fraction du gaz introduit par la vanne rapide et qui n'est pas ionisée, ne peut être mise en cause, car, en l'absence de plasma, on a observé une augmentation de pression de, seulement, 10^{-6} torr, 2 ms après le temps correspondant à l'arrivée du plasma dans l'étage de compression;
- l'autre source de gaz proviendrait du dégazage des parois de la chambre de compression sous l'impact des neutres rapides, du rayonnement électromagnétique et des fuites de plasma.

Afin d'évaluer la contribution de l'échange de charge aux pertes de plasma, la courbe $1/\tau_G$ en fonction de la pression résiduelle avant le choc, a été tracée (figure 9). Bien que les conditions de notre expérience, où tout évolue dans le temps (champ magnétique, densité, énergie des ions et des électrons et,

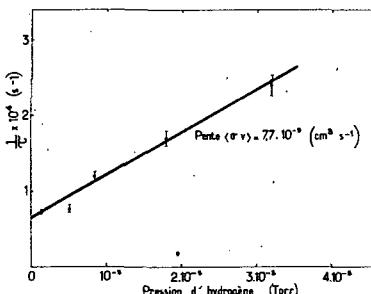


FIG. 9. Effet de la pression résiduelle sur la constante de décroissance du flux de neutres

Avec diaphragme $\varnothing = 20 \text{ mm}$

$B_{\max_1} = 12 \text{ kGs}; B_Q = 14 \text{ kGs}$

probablement, pression du gaz neutre) ne soient pas favorables à une analyse fine des phénomènes comme dans une expérience statique, cette mesure montre que :

- les points expérimentaux s'alignent sur une droite de pente

$$\langle \sigma \cdot v \rangle = 7,7 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^3/\text{s}$$

qui correspond à une énergie moyenne des ions de 1,8 keV dans l'hypothèse où l'échange de charge se fait sur les molécules d'hydrogène. Cette énergie est compatible avec les mesures de spectre d'énergie faites par ailleurs.

- pour une pression nulle, la droite s'extrapole à un temps de vie de 140 μ s. Ce-
la montre que l'échange de charge n'est pas le phénomène dominant de pertes,
ou bien que la pression du gaz présent est différente de la pression lue avant le
choc. Il faudrait alors admettre que le dégazage conduit à une pression de l'or-
dre de 10^{-5} torr.

Ces mesures nous ont suggéré de développer un modèle théorique simple,
pour tenir compte du dégazage des parois lorsque le plasma est transparent aux
neutres γ . Nous supposerons qu'un neutre rapide, formé par échange de char-
ge, produit γ neutres thermiques par impact sur la paroi. Le coefficient de mul-
tiplication de la densité de neutres thermiques est alors :

$$k_{eff} = \gamma \frac{V_0}{V_1}$$

où V_0 est le volume du plasma et V_1 le volume de la chambre. Des calculs numé-
riques, faits avec une densité d'ions de 10^{13} cm^{-3} , et une pression résiduelle de
 10^{-6} torr, conduisent à un temps de vie de l'ordre de 100 μ s lorsque k_{eff} est
légèrement supérieur à 1.

La valeur élevée de γ qui en résulte (≈ 10) suggère que les fuites de
particules le long des lignes de champ contribuent au bombardement de la paroi.

Ces calculs prévoient que le maximum du flux de neutres devrait se pro-
duire plus tôt, lorsque la pression augmente, ce qui est observé expérimentalement.
Par ailleurs, on a pu calculer que la constante de temps de décroissance de la den-
sité était environ une fois et demie plus grande que la constante de temps de dé-
croissance du flux de neutres rapides.

Dans un autre cas extrême, où le plasma est opaque, le temps de vie n'est
plus limité que par la vitesse de diffusion du gaz neutre entourant le plasma. Le
temps nécessaire pour brûler un plasma de densité n_i avec une densité de gaz
constante n_0 est alors de l'ordre de quelques

$$\frac{n_i r_p}{n_0 V_0}$$

où r_p est le rayon du plasma et v_0 la vitesse. Avec $n_i = 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ et une pres-
sion de quelques 10^{-5} torr, la constante de temps de décroissance du flux de
neutres est de l'ordre de 200 μ s.

Ces résultats conduiraient à retenir l'échange de charge comme un des mé-
canismes essentiels pour les pertes de plasma. Cependant, ils ne sont pas compa-
tibles avec la densité déduite par l'émission d'atomes neutres rapides qui donne
 $n_i \approx 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. Si cette dernière mesure n'est pas entachée d'erreur par une
surestimation du rendement de comptage, il est alors probable que l'échange de
charge ne suffit pas à expliquer le temps de vie observé.

6.3. Pollution par le plasma froid

Les mesures de densité pourraient s'interpréter par la coexistence de deux
populations ioniques. Une population chaude de densité 10^{10} cm^{-3} et une popula-
tion froide de densité 10^{13} cm^{-3} . Ce plasma froid proviendrait, soit de la queue
du jet de plasma, soit de l'ionisation du gaz désorbé des parois.

Pour tenter de réduire la densité du plasma lent qui arrive dans l'étage de
compression après la fermeture de la porte magnétique et qui n'est pas réfléchi
par celle-ci, nous avons placé dans l'étage d'injection, à 1 m du canon, un bobinage
pulsé qui annule le champ statique après le passage de la bouffée rapide. La
plus grande amélioration constatée ne dépasse pas 50 % sur γ et le gain moyen

est compris dans les incertitudes expérimentales. S'il y a pollution par du plasma froid, il faudrait donc admettre que seul le dégazage des parois y contribue.

Pour que le mécanisme de refroidissement des ions d'une densité de 10^{10} cm^{-3} sur les électrons d'un plasma froid de densité 10^{13} cm^{-3} soit compatible avec le temps de vie observé, il faudrait une température électronique $T_e \geq 50 \text{ eV}$. Cette valeur semble élevée pour une population constamment renouvelée. De plus, cette hypothèse de refroidissement est infirmée par le fait que l'énergie moyenne des ions ne varie pas sensiblement au cours de la décroissance ainsi qu'en témoigne l'analyse du flux de neutres.

6.4. Défaut d'équilibre

La configuration du puits magnétique n'ayant pas la symétrie de révolution on peut craindre que la précession due au champ électrique résultant du potentiel ambipolaire n'entraîne un défaut d'équilibre.

Dans le régime R_2 , précédemment défini, le plasma est contenu à l'intérieur d'une isobare fermée. Dans ce cas, le défaut d'équilibre n'est pas à craindre. C'est aussi dans ce régime que le plus long temps de vie a été observé (0,3 ms) et que l'atténuation du faisceau de neutres indique une densité de 10^{14} cm^{-3} .

Cependant, les remarques précédentes s'appliquent à ce régime, et le temps de vie est trop faible pour être expliqué par un mécanisme de pertes normales.

6.5. Micro-instabilités

Une analyse exhaustive des critères calculés pour les très nombreuses instabilités que la théorie a identifiées, n'a pas sa place dans ce rapport. La nature du confinement impose cependant d'examiner les instabilités relatives à l'anisotropie de la fonction de distribution.

Le critère d'instabilité de miroirs conduit, pour une anisotropie de 10, à un β de 10 %. Cette valeur est à comparer à la borne supérieure de β que l'on calcule avec $n_j = 10^{14}$ et $E_j = 1 \text{ keV}$ et qui atteint 3 %.

Le critère d'instabilité en cône de perte conduit à une longueur critique de 3 m qui est largement supérieure à la valeur expérimentale.

7. CONCLUSION

Le confinement d'un plasma de densité 10^{13} à 10^{14} cm^{-3} , dans une configuration à puits magnétique, est limité dans cette expérience à un temps de vie de 0,2 à 0,3 ms. La durée totale pendant laquelle la décroissance du plasma chaud est mesurée s'étend néanmoins jusqu'à 1 ms. L'analyse des causes possibles de pertes de plasma n'a pas permis de dégager une cause dominante.

Il n'est pas complètement exclu que la superposition de plusieurs mécanismes de pertes classiques, par exemple diffusion dans le cône de perte et échange de charge, explique les phénomènes observés. Cependant, les mesures laissent subsister un doute et il est possible qu'un mécanisme de pertes anormales non identifié soit responsable de la limitation du temps de vie.

REMERCIEMENTS

Nous remercions MM. P. HUBERT et F. WAEELBROECK pour les conseils éclairés et les vifs encouragements qu'ils nous ont prodigués au cours de ce travail. Nous exprimons notre gratitude envers les techniciens du Groupe DECA qui ont rendu ces mesures possibles. Nos remerciements vont également à M. B.TAQUET et son groupe qui étudièrent les bancs d'énergie nécessaires à l'expérience.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GOTTE, Y. V., IOFFE, M. S., NEZLINE, M.V., SOBOLEV, R.I.
Rapport n° 658 de l'Institut Kourchatov, Moscou (1964)
- [2] FRANCIS, G., MASON, D. W., HILL, J.W.
Nature, 203, n° 4945, (1964), 623
- [3] BARR, W. L., PERKINS, W. A.
6th Conf. of A.P.S., New York (1964)
- [4] MASON, D. W., HILL, J. W., FRANCIS, G.
6th Conf. of A.P.S., New York (1964)
- [5] GRAVIER, R., LECOUSTEY, P., LELEGARD, J., LUC, H.,
TACHON, J., VERON, D.
Rapport EUR-CEA-FC - 271 (1964)
- [6] ANDREOLETTI, J., C. R. Acad. Sci., 257, (1953), 1235
- [7] GRAVIER, R., LECOUSTEY, P., LUC, H., RENAUD, C.,
TACHON, J., VERON, D.
Rapport EUR-CEA-FC - 259 (1964)
- [8] GRAVIER, R., LECOUSTEY, P., LUC, H., TACHON, J.,
VERON, D.
Rapport CEA n° 2264 (1963)
- [9] RENAUD, C., 7ième Conf. Int. Phen. d'Ion. Gaz, Belgrade (1965)
- [10] TACHON, J., Rapport EUR-CEA-FC - 289 (1965)

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В ПРОБКОТРОНЕ СО СТАБИЛИЗИРУЮЩИМИ СТЕРЖНЯМИ

Б. А. ТРУБНИКОВ

ИНСТИТУТ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ им. И. В. КУРЧАТОВА, МОСКВА
СССР

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

PLASMA STABILITY IN A MAGNETIC MIRROR MACHINE WITH STABILIZING RODS. The well-known criterion $\delta \int d\ell / B < 0$ is generalized for arbitrary axially-asymmetric fields. For this purpose it must be presented as $\int (\delta B / B^2) (P_r + P_\perp) d\ell > 0$; here $\delta B = \vec{s} \cdot \vec{\nabla} B$ is the increase of the magnitude of the field on the adjacent (external) line of force, where $\vec{s} \perp \vec{B}$. This criterion is applied to plasma stability in a magnetic mirror machine with stabilizing rods. The field near the axis is described by the scalar potential

$$\psi = \int B_0(z) dz - B_0^{-1}(z) r^{2/4} + g(z) r^n \cos n\varphi$$

while for the field on the axis itself we accept the parabolic approximation $B_0(z) = B_0^0 (1 + z^2 / l^2)$. If $2n$ rods each with current J are located on a circle of radius a , then, for $r_0 / l \ll 1$ we can give the stability criterion such a form that in it remain only the parameters $\alpha = 4\pi J l r_0^{n-2} / ca^n B_0^0$ and $x = z_{\max} / l$, where z_{\max} is the farthest point of particle reflection ($z = 0$ is the central plane of the magnetic mirror machine). Two particle distributions are discussed: the Maxwellian distribution with the cut-out cone, and the single-valued distributions of v^2 and $J = v_\perp^2 / B$. Stability appears for $\alpha > (n-1)^{-\frac{1}{2}}$; the particles with small longitudinal velocities ($v_z \neq 0$) stabilize first; then, as α increases, those having ever more distant x . The limit, $\alpha_{\lim} = (n-1)^{-\frac{1}{2}}$, has a simple physical meaning and corresponds to the condition $\Delta B / B > 0$ at $z = 0$. In this article, systems with 4 and 6 stabilizing rods are discussed in detail. The calculated results for the 6-rod system are in good agreement with the experiments of Ioffe and collaborators, who observed the appearance of a stabilized plasma in the magnetic mirror machine. (In comparing theory with experiment it is assumed that the plasma is described by a Maxwellian distribution with a cut-out cone and it expands in length right up to the magnetic mirrors. To avoid numerical calculations, we discuss in this article the case $x = z_{\max} / l \ll 1$; this is, however, extrapolated to $x \sim 1$, which is admissible for semi-quantitative evaluations.)

In addition to the infinite rods, we discuss stabilizing rods of finite length, which can be realized with multipole magnets of finite length. Stabilization can be achieved even in the extreme case of very short rods, where they can be regarded as a system of $2n$ magnetic point dipoles located in the central plane of the magnetic mirror machine on a circle of radius a , and directed along the radius away from the axis (or towards the axis - the directions alternate). Such systems, which we considered at the suggestion of Artsimovich, are very promising since their structure facilitates access to the plasma and makes it possible to install additional devices for diagnostics or for heating the plasma.

STABILITE DU PLASMA DANS UNE MACHINE A MIROIRS MAGNETIQUES AVEC BARREAUX DE STABILISATION. L'auteur étend le critère bien connu $\delta \int d\ell / B < 0$ au cas arbitraire des champs à dissymétrie axiale. A cet effet, il convient d'exprimer ce critère par la formule: $\int (\delta B / B^2) (P_r + P_\perp) d\ell > 0$, où $\delta B = \vec{s} \cdot \vec{\nabla} B$ est l'accroissement du module du champ sur la ligne de force voisine (extérieure), s étant perpendiculaire à \vec{B} . Le critère mentionné est appliqué à l'étude de la stabilité du plasma dans une machine à miroirs magnétiques comportant des barreaux de stabilisation. Le champ au voisinage de l'axe est décrit par le potentiel scalaire:

$$\psi = \int B_0(z) dz - B_0^{-1}(z) r^{2/4} + g(z) r^n \cos n\varphi$$

Pour le champ situé sur l'axe proprement dit, on admet l'approximation parabolique $B_0(z) = B_0^0(1 + z^2 / l^2)$. Si $2n$ barreaux parcourus par un courant J sont disposés à la périphérie d'un cercle de rayon a on peut, en tirant parti du fait que le rapport $r_0 / l \ll 1$, modifier le critère de stabilité de manière à ne laisser subsister que le

paramètre $\alpha = 4nJl\Gamma_0^{n-2} / ca^n B_0^0$ et la quantité $x = z_{\max}/l$, où z_{\max} est le point de réflexion le plus éloigné des particules ($z = 0$ correspond au plan central de la machine). L'auteur a examiné deux modes de distribution des particules, à savoir la distribution maxwellienne à cône tronqué et le cas où toutes les particules possèdent les mêmes valeurs v^2 et $J = v_\perp^2/B$. La stabilité apparaît pour $\alpha > (n-1)^{-\frac{1}{2}}$; tout d'abord se stabilisent les particules à vitesse longitudinale faible ($v_\parallel \rightarrow 0$), puis, à mesure que α augmente, les particules ayant une valeur de x de plus en plus grande. La valeur limite de $\alpha_{\lim} = (n-1)^{-\frac{1}{2}}$ possède une signification physique simple et correspond à la condition $\nabla |B| > 0$ dans le plan central de la machine où $z = 0$. L'auteur examine en détail les systèmes à quatre et à six barreaux de stabilisation. Les résultats des calculs relatifs au système à six barreaux concordent parfaitement avec les données expérimentales obtenues par Ioffé et ses collaborateurs qui ont constaté l'apparition d'un plasma stabilisé dans la machine à miroirs. Pour la comparaison des données théoriques et expérimentales, on admet que le plasma est décrit par la distribution maxwellienne à cône tronqué et qu'il s'étend en longueur jusqu'aux miroirs magnétiques. En vue d'éviter l'introduction de calculs numériques dans cette étude, on a examiné le cas $x = z_{\max}/l \ll 1$, qui a cependant été extrapolé aux valeurs $x \sim 1$, ce qui est admissible pour les évaluations semi-quantitatives.

Outre les barreaux de longueur infinie, l'auteur a examiné des systèmes à barreaux de stabilisation de longueur finie qui peuvent être également réalisés à l'aide d'aimants multipolaires de longueur finie. Comme il le montre dans le mémoire, on peut même parvenir à une stabilisation dans le cas limite des barreaux très courts, où ces derniers peuvent être considérés comme formant un système de $2n$ bipôles magnétiques ponctuels situés dans le plan central de la machine sur la périphérie d'un cercle de rayon a et orientés parallèlement au rayon dans le sens opposé à l'axe (ou vers l'axe - les directions alternent). Ces systèmes, que l'auteur a examinés à la suite d'une suggestion de Artsimovitch peuvent se révéler très utiles; en effet, leur structure facilite l'accès au plasma et permet d'installer des dispositifs complémentaires pour son diagnostic ou son chauffage.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В ПРОБКОТРОНЕ СО СТАБИЛИЗИРУЮЩИМИ СТЕРЖНЯМИ. В настоящей работе известный критерий $\delta / d |B| < 0$ обобщается на произвольный случай аксиально-несимметричных полей. Для этого его следует представить в виде $\int (\delta B / B^2) (P_u + P_v) dl > 0$. Здесь $\delta B = \vec{S} \cdot \vec{B}$ приращение модуля поля на соседней (внешней) силовой линии, причем $\vec{S} \perp \vec{B}$. Указанный критерий применяется для исследования устойчивости плазмы в пробкотроне со стабилизирующими стержнями. Поле вблизи оси описывается скалярным потенциалом:

$$\psi = \int B_0(z) dz - B_0^1(z) r^2/4 + g(z) r^n \cos n\phi,$$

причем для поля на самой оси принимается параболическая аппроксимация $B_0(z) = B_0^0(1 + z^2/1^2)$. Если $2n$ стержней с током J в каждом расположены на окружности радиуса a , то используя малость величины $r_0/l \ll 1$ можно привести критерий устойчивости к такому виду, что в нем остается лишь параметр $\alpha = 4nJl\Gamma_0^{n-2} / ca^n B_0^0$ и величина $x = z_{\max}/l$, где z_{\max} - максимальная точка отражения частиц ($z = 0$ соответствует центральной плоскости пробкотрона). Были рассмотрены два распределения частиц: максвелловское с вырезанным конусом и случай, когда все частицы обладают одинаковыми значениями v^2 и $J_\perp = v_\perp^2/B$. Устойчивость возникает при $\alpha > (n-1)^{\frac{1}{2}}$, причем в первую очередь стабилизируются частицы с малыми продольными скоростями ($v_\parallel \rightarrow 0$), а по мере роста α все более далекие x . Предельное значение $\alpha_{kp} = (n-1)^{-\frac{1}{2}}$ имеет простой физический смысл и соответствует условию $\nabla |B| > 0$ в центральной плоскости пробкотрона $z = 0$. В работе подробно рассмотрены системы с 4 и с 6 стабилизирующими стержнями. Результаты расчета системы с 6 стержнями находятся в хорошем согласии с экспериментами Иоффе с сотрудниками, наблюдавшими возникновение стабилизированной плазмы в пробкотроне (при сопоставлении теории с экспериментом принимается, что плазма описывается максвелловским распределением с вырезанным конусом и простирается по длине вплоть до магнитных пробок). Чтобы избежать численных расчетов в работе рассматривался случай $x = z_{\max}/l \ll 1$, который однако экстраполировался на значения $x \sim 1$, что допустимо для полукинематических оценок).

Помимо бесконечных стержней в работе были рассмотрены системы со стабилизирующими стержнями конечной длины, которые могут быть реализованы также многополосными магнитами конечной длины. Как показано в работе, стабилизация может быть достигнута даже в предельном случае, очень коротких стержней, когда их можно рассматривать как систему $2n$ точечных магнитных диполей, расположенных в центральной плоскости пробкотрона на окружности радиуса a и направленных по радиусу от оси (или к оси - направления чередуются). Такие системы, рассмотренные нами по предложению Л. А. Арцимовича, могут оказаться весьма перспективными, так как их конструкция облегчает доступ к плазме и позволяет установить дополнительные устройства для ее диагностики или нагрева.

ESTABILIDAD DEL PLASMA EN UNA TRAMPA DE ESPEJOS CON BARRAS ESTABILIZADORAS. En esta memoria se amplía el criterio ya conocido $\delta f d l / B < 0$ al caso de que los campos no tengan simetría axial. Para ello hay que expresarlo en la forma $f(\delta B / B^2) (P_n + P_\perp) dl > 0$; en donde $\delta B = \vec{s} \cdot \vec{\nabla} B$ es el incremento del módulo del campo sobre la línea de fuerza adyacente (exterior), siendo $s \parallel B$. Se aplica dicho criterio al estudio de la estabilidad del plasma en una trampa de espejos con barras estabilizadoras. El campo, en las proximidades del eje, está representado por el potencial escalar:

$$\psi = \int B_0(z) dz - B_0(z) r^{2/4} + g(z) r^n \cos n\varphi$$

mientras que para el campo en el eje mismo se utiliza la aproximación parabólica $B_0(z) = B_0^0(1 + z^2/l^2)$. Si hay $2n$ barras, en cada una de las cuales la corriente es I , dispuestas en forma de circunferencia de radio a , teniendo en cuenta la pequeñez de $r_0/l \ll 1$, se puede expresar el criterio de estabilidad de forma que permanezca en el simplemente el parámetro $\alpha = 4nI^2 r_0^{n-2} / c a^n B_0^0$ y la magnitud $x = z_{\max}/l$, en donde z_{\max} es el punto de máxima reflexión de partículas ($z = 0$ corresponde al plano central de la trampa de espejos). Se han considerado dos distribuciones de partículas: la maxwelliana con el cono eliminado y el caso en que todas las partículas tengan los mismo valores de v^2 y $J_1 = v^2/B$. La estabilidad aparece cuando $\alpha > (n-1)^{-1/2}$ y las primeras que se estabilizan son las partículas cuyas velocidades axiales son pequeñas ($v_z \rightarrow 0$) y, a medida que va creciendo α , todas las más alejadas que x . El valor límite $\alpha_{\lim} = (n-1)^{-1/2}$ tiene un sentido físico simple y corresponde a la condición $\vec{\nabla} |B| > 0$ en el plano central de la trampa de espejos para $z = 0$. En la memoria se consideran con detalle los sistemas con 4 y con 6 barras estabilizadoras. Los resultados del cálculo del sistema con 6 barras concuerdan satisfactoriamente con los experimentos de Ioffe y colaboradores, que han observado la formación de un plasma estabilizado en la trampa de espejos. (Al confrontar la teoría con el experimento, se supone que el plasma tiene una distribución maxwelliana con el cono eliminado y se extiende en longitud hasta los espejos magnéticos. Con objeto de evitar los cálculos numéricos, en la memoria se considera el caso $x = z_{\max}/l \ll 1$, el cual, sin embargo, se ha extrapolado al valor $x \sim 1$, lo que es admisible para evaluaciones semi-cuantitativas).

Además de las barras infinitas, se han considerado en la memoria los sistemas con barras estabilizadoras de longitud finita, los cuales se pueden realizar en la práctica, también, en forma de imanes multipolares de longitud finita. Como se indica en la memoria, se puede conseguir la estabilización incluso en el caso límite de barras muy cortas, en el cual se las puede considerar como un sistema de $2n$ dipolos magnéticos puntiformes, situados en el plano central de la trampa de espejos, en una circunferencia de radio a y dirigidos en sentido radial desde el eje (o hacia el eje - las direcciones alternan). Estos sistemas, que hemos considerado a propuesta de Artsimovich, pueden ofrecer muy buenas perspectivas, ya que su estructura simplifica el acceso al plasma y permite instalar un equipo complementario para el diagnóstico o el calentamiento del plasma.

I. Хорошо известный критерий устойчивости плазмы $\delta f d l / B < 0$ или, что то же самое

$$\left\{ \frac{\delta B}{B^2} dl \right\} > 0 \quad (1)$$

допускает обобщение на случай анизотропной плазмы ($P_n \neq P_\perp$), для чего его следует представить в виде:

$$\left\{ \frac{\delta B}{B^2} (P_n + P_\perp) dl \right\} > 0 \quad (2)$$

Частный вид этого критерия, применимый для аксиально-симметричного поля был использован ранее Розенблотом и Лонгмайром [2].

В настоящей работе рассмотрены аксиально-несимметричные системы типа пробкотрона со стабилизирующими стержнями, где величину δB можно найти следующим образом.

Скалярный потенциал магнитного поля $B_{\text{m}} = \nabla \Psi$ вблизи оси можно представить в виде:

$$\Psi = \int B_0(z) dz + \Psi^{(2)}(z, \varphi, z) \quad (3)$$

где $B_0(z)$ — поле на самой оси. Если ℓ — характерная длина, на которой меняется $B_0(z)$, то $\Psi^{(2)}$ следует считать величиной второго порядка малости по параметру $\varepsilon = z/\ell \ll 1$.

Из (3) для поля имеем:

$$B_z = \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial z}, \quad B_\varphi = \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial \varphi}, \quad B_0 = B_0(z) + \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial z} \quad (4)$$

причем B_z и B_φ будут величинами I порядка, а поправочный член в B_0 — второго порядка. Будем отмечать порядки величин индексом сверху. Тогда имеем:

$$B_0 = B_0^{(1)}, \quad B_z = B_z^{(1)}, \quad B_0 = B_0^{(2)} + B_0^{(2)}, \quad \text{также } B_0^{(2)} = \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial z} \quad (5)$$

и модуль поля, следовательно, равен:

$$B = B_0 + B^{(2)}, \quad \text{также } B^{(2)} = B_0^{(2)} + \frac{1}{2B_0} (B_z^2 + B_\varphi^2) \quad (6)$$

По определению (из $\delta(B \cdot e) = 0$) величина δB в (5) есть приращение поля на соседней (внешней) силовой линии:

$$\delta B = \underline{\underline{s}} \nabla B \quad \text{причем } \underline{\underline{s}} \perp \underline{\underline{B}} \quad (7)$$

Уравнения

$$\frac{dz}{dz} = \frac{B_z}{B_0} \cong \frac{B_z^{(1)}}{B_0^{(1)}} \quad ; \quad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{B_\varphi}{B_0} \cong \frac{B_\varphi^{(1)}}{B_0^{(1)}} \quad (8)$$

определяют силовую линию $z = R(z_0, \varphi_0)$, $\varphi = \Phi(z, z_0, \varphi_0)$, где z_0, φ_0 — точка в плоскости $z=0$, через которую проходит данная линия.

Введем удобное обозначение:

$$\delta F = \int_0^z F(z, r_0, \varphi_0) dz = \frac{\partial F}{\partial z_0} \delta z_0 + \frac{\partial F}{\partial \varphi_0} \delta \varphi_0 \quad (9)$$

тогда вектор δ можно представить в виде:

$$z_i = \delta z_0, \quad z_\varphi = \delta \varphi_0, \quad z_z = -\frac{B_x}{B_0} \delta z_0 - \frac{B_y}{B_0} z_0 \delta \varphi_0 \quad (10)$$

Из (6) в необходимом порядке имеем:

$$\nabla_z B = \frac{\partial}{\partial z} B^{(2)}, \quad \nabla_\varphi B = \frac{\partial}{\partial \varphi} B^{(2)}, \quad \nabla_z B \cong B'_0(z)$$

так что окончательно:

$$\delta B = \frac{\partial B^{(2)}}{\partial z} \delta z_0 + \frac{\partial B^{(2)}}{\partial \varphi} \delta \varphi_0 - \frac{B'_0}{B_0} (B_z \delta z_0 + B_\varphi z_0 \delta \varphi_0) = \frac{1}{B_0} \delta K \quad (II)$$

где

$$K = B_0 B^{(2)} - B'_0 \psi^{(2)} \quad (12)$$

Поскольку здесь стоят величины II порядка малости, то в остальных множителях критерия (2) можно опустить поправки II порядка и проводить интегрирование не по выбранной силовой линии, а непосредственно вдоль оси. Тогда оператор δ можно вынести из-под интеграла и критерий (2) принимает вид:

$$\delta \int dz \frac{P_0 + P_1}{B_0} (B_0 B^{(2)} - B'_0 \psi^{(2)}) > 0 \quad (13)$$

Иными словами необходимо, чтобы величина, стоящая под знаком δ , возрастила в направлении наружу от оси системы.

2. Используем найденный критерий для исследования устойчивости плазмы в пробкотроне со стабилизирующими стержнями. Вблизи оси потенциал ψ имеет вид:

$$\psi = \int B_0(z) dz - \frac{1}{q} B'_0(z) z^q + g(z) z^n C_{0, n} \quad (14)$$

Для определенности поле на оси можно аппроксимировать параболой

$$B_z(z) = B_0(0) \left(1 + z^2/\ell^2\right) \quad (15)$$

Функция $g(z)$ связана с геометрией стабилизирующих обмоток. Например для $2n$ тонких бесконечно-длинных стержней, параллельных оси, $g(z) = 4J/c\alpha = \text{const}$, где J - ток в одном стержне (в соседних стержнях токи противоположны) и α - радиус окружности, на которой располагаются стержни. В общем случае однако $g(z)$ следует считать переменной. Из (14) имеем:

$$\psi^{(2)} = -\frac{1}{4} B'_0 z^2 + g z^n \cos \varphi \quad (16)$$

а компоненты поля равны:

$$\left. \begin{aligned} B_z &= -\frac{1}{2} B'_0 z + g n z^{n-1} \cos \varphi, \quad B_\varphi = -g n z^{n-1} \sin \varphi \\ B_z &= B_0 + B_z^{(2)}, \quad \text{т.е. } B_z^{(2)} = -\frac{1}{4} B'_0 z^2 + g z^n \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Интегрируя уравнения силовых линий (8) получим (см. также [3]):

$$\beta = \frac{z}{z_0} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin^{2/n} \varphi} = -\alpha \left(\frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi} \right)^{1-\frac{2}{n}} \int_0^{z/\ell} dt' G(t') / \beta^{\frac{n}{2}}(t') \quad (18)$$

Здесь мы ввели безразмерный параметр

$$\alpha = n \lg(\alpha) z_0^{n-2} / B_0(0) \quad (19)$$

и обозначили $\beta = B_0(z)/B_0(0)$, $G = g(z)/g(0)$

Тогда для фигурирующей в критерии (13) величины K можно получить выражение

$$\begin{aligned} K &= B_0 B_z^{(2)} + \frac{1}{2} (B_z^2 + B_\varphi^2) - B'_0 \psi^{(2)} = \\ &\stackrel{?}{=} \frac{\beta^2}{\ell^2} B_0(0) \left\{ \left(\frac{3\beta^2}{8\beta} - \frac{\beta}{4} \right) \left(\frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi} \right)^{\frac{2}{n}} + \alpha \frac{\beta^2}{n} \sin \varphi_0 \cos \varphi \frac{d}{dt} \left(\frac{G}{\beta^{\frac{n}{2}+1}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha^2}{\ell^2} \frac{G^2}{\beta^{n-1}} \left(\frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi} \right)^{2-\frac{2}{n}} \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь точка означает производную по переменной $t = z/\ell$.

Заметим, что хотя ζ_0 входит в параметр α , саму α можно не считать малой величиной, так как помимо ζ_0 в ней фигурирует функция $g(\alpha)$, связанная с токами в стабилизирующих обмотках.

В частности ниже показано, что устойчивость достигается лишь при α порядка единицы: $\alpha \sim 1$. Предполагая, что плазма описывается максвелловским распределением с вырезанным конусом:

$$f(z, \omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } J_1/\omega^2 < 1/B_0(z_{\max}) \\ \text{Const} \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right) & \text{при } J_1/\omega^2 > 1/B_0(z_{\max}) \end{cases} \quad (21)$$

где $J_1 = v_1^2/B_0 = \text{const}$, а z_{\max} — максимальная точка отражения частиц, для суммы давлений получим:

$$P_u + P_\perp = M \left(v_u^2 + \frac{v_\perp^2}{2} \right) f d\omega = \text{Const} [4\beta(x) - \beta(t)] \sqrt{\beta(\omega) - \beta(t)} \quad (22)$$

где $x = z_{\max}/\ell$, а $t = \omega/\ell$. Таким образом, окончательно критерий (13) принимает вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \right) \int_{-x}^{+x} dt \frac{4\beta(\omega) - \beta(t)}{\beta'(t)} \sqrt{\beta(x) - \beta(t)} K(t, z, \varphi_0) \right) > 0 \quad (23)$$

где $K(t, z, \varphi_0)$ определяется формулами (20) и (18).

3. Будем аппроксимировать поле на оси параболой

$$B_0(z) = B_0(0)(1 + z^2/\ell^2), \quad \text{тогда } \beta = 1 + t^2 \quad (24)$$

и рассмотрим вначале случай $\alpha = 0$, что соответствует отсутствию тока в стабилизирующих обмотках. При этом

$$\varphi = \varphi_0 \quad \text{и} \quad K = \frac{z^2}{\ell^2} B_0(0) \frac{t^2 - \frac{1}{z}}{1 + t^2} \quad (25)$$

Вычисляя интеграл в (23) можно убедиться, что он оказывается отрицательным в области $0 < x < 1,77$, что и указывает на неустойчивость плазмы в обычном пробкотроне (в реальных установках пробочное отношение обычно не превышает 2, и поэтому не имеет смысла рассматривать $x > 1$. Кроме того, при $x > 1$ сомнительна применимость параболической аппроксимации).

Устойчивость появляется лишь при $\omega \sim 1$, причем в первую очередь стабилизируются малые $x = z_{\max} / \ell$. Чтобы убедиться в этом рассмотрим в (23) предельный случай $x \rightarrow 0$, что соответствует частицам с $v_n \rightarrow 0$. Считая $G(t)$ четной функцией (см. ниже) находим:

$$K(t, \tau_0, q_0) = \frac{\tau_0^2}{\ell^2} B_0^2(0) \left[-\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{2} \right] \quad (26)$$

Так как остальные множители в (23) положительны, то результат определяется знаком производной:

$$\frac{\partial}{\partial \tau_0} K = [(n-1)\omega^2 - 1] \quad (27)$$

(при этом учтено, что $\omega = \tau_0^{n-2}$). Отсюда видно, что устойчивость возможна лишь при

$$\omega > \omega_{kp} = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \quad (28)$$

Этот результат имеет простой физический смысл, который можно установить, если вспомнить, что величина B_k пропорциональна δv . Частицы с $v_n \rightarrow 0$ почти не отклоняются от средней плоскости пробкотрона, и, следовательно, их устойчивость будет обеспечена, если $(\partial v / \partial r)_{z=0} > 0$. В самом деле, считая, что $g'(z=0) = 0$ из формул (17) для модуля поля в центральной плоскости пробкотрона получим выражение:

$$B \Big|_{z=0} = B_0(0) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\tau_0^2}{\ell^2} + \frac{1}{2} \frac{n g(0)}{B_0(0)} \tau_0^{2n-2} \right) \quad (29)$$

Отсюда имеем:

$$\frac{\partial B}{\partial r} \Big|_{z=0} \sim - \frac{\tau_0}{\ell^2} + \left(\frac{n g(0)}{B_0(0)} \right)^2 (n-1) \tau_0^{2n-3} \sim [(n-1)\omega^2 - 1] \quad (30)$$

что совпадает с (27). Выделенным случаем является система с 4 стержнями ($n = 2$), когда τ_0 вообще не входит в ω и, следовательно, при $\omega > 1$ будет обеспечена устойчивость на всех радиусах. Если же $n \geq 3$, то критическое значение $\omega_{kp} = 1/\sqrt{n-1}$ указывает радиус

$$\tau_{kp} = \left(B_0(0) / n g(0) \sqrt{n-1} \right)^{\frac{1}{n-2}} \quad (31)$$

далее которого $\partial \beta / \partial r > 0$ и плазма с $\partial \rho / \partial r < 0$ будет устойчива.

Рассмотрим более детально случай $n = 2$. Из (18) при этом следует:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_0 e^{-2\alpha \int(t)}, \quad \omega e^{\int(t)} = \int_0^t dt' G(t')/\beta(t'). \quad (32)$$

Тогда для K в соответствии с (20) можно получить выражение:

$$K = \frac{\alpha^2}{\beta^2} B_0^2(t) \left[\left(\frac{3\dot{\beta}^2}{4\beta} - \frac{\ddot{\beta}}{2} + \alpha^2 \frac{G^2}{\beta} \right) \left(\frac{1}{2} e^{2\alpha \int} - \sin^2 \varphi_0 \operatorname{Sh}(2\alpha \int) \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} e^{2\alpha \int} - \sin^2 \varphi_0 \operatorname{Ch}(2\alpha \int) \right) \alpha \beta \frac{d}{dt} \left(\frac{G}{\beta^2} \right) \right] \quad (33)$$

Предполагая, что функция $G(t)$ также, как и $\beta(t)$ является четной ($G(t) = G(-t)$), а, следовательно $\int(t)$ — нечетной, нетрудно убедиться, что выражения, содержащие $\sin^2 \varphi_0$, являются нечетными, а поскольку интеграл в критерии (23) берется в симметричных пределах (от $-\infty$ до $+\infty$), то такие выражения в K пропадают. Таким образом при $n = 2$ критерий не зависит от φ_0 . Вспоминая, что при $n = 2$ параметр α не содержит τ_0 , нетрудно видеть, что окончательно критерий (23) в случае $n = 2$ сводится к условию:

$$f(x, \alpha) = \int_0^\infty dt \frac{4\beta(t) - \beta'(t)}{\beta''(t)} \sqrt{\beta(t) - \beta'(t)} \left[\left(\frac{3}{4} \dot{\beta}^2 - \frac{1}{2} \beta \ddot{\beta} + \alpha^2 G^2 \right) \operatorname{Ch}(2\alpha \int) + \right. \\ \left. + \operatorname{Sh}(2\alpha \int) \alpha \beta \frac{d}{dt} \left(G / \beta^2 \right) \right] > 0 \quad (34)$$

Здесь в квадратной скобке аргументом у всех функций является t .

4. При $n \geq 3$ ситуация является более сложной, так как из (18) нельзя выразить $\varphi(t)$ в явном виде. Если не обращаться к численным методам, то в общем виде можно рассмотреть лишь случай $x \ll I$, которым мы и ограничимся.

При $x \ll I$ (а, следовательно и $t \ll I$) формулу (18) можно разложить в ряд по $\varphi - \varphi_0$:

$$-\tilde{\alpha} (\operatorname{Sh} n\varphi_0)^{1-\frac{2}{n}} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\psi}{\operatorname{Sh} \frac{2}{n}\psi} = \frac{\varphi - \varphi_0}{\operatorname{Sh} \frac{2}{n}\varphi_0} [1 - (\varphi - \varphi_0) \operatorname{Ctg} n\varphi_0 + \dots] \quad (35)$$

Здесь мы временно обозначили

$$\tilde{\omega} = \alpha \int_0^t dt' G(t') / \beta^{\frac{n}{2}}(t') \quad (36)$$

и предполагаем, что $\tilde{\omega} \ll 1$ при $t \ll 1$.

Обращая формулу (35) и ограничиваясь двумя членами разложения по $\tilde{\omega}$ имеем:

$$\varphi - \varphi_0 = -\tilde{\omega} \sin \varphi_0 + \tilde{\omega}^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \dots \quad (37)$$

Подставляя это в выражение (20) для K с той же точностью получим:

$$K = \frac{\tau_0^2}{\ell^2} B_0^2(\alpha) \left\{ \left(\frac{3\beta^2}{8\beta} - \frac{\beta}{4} \right) (1 + n\tilde{\omega}^2) + \alpha \tilde{\omega} \beta^{\frac{n}{2}} \frac{d}{dt} \left(G/\beta^{\frac{n}{2}+1} \right) + \right. \\ \left. + \frac{d}{2} \frac{G^2}{\beta^{n-1}} [1 + (n-1)\tilde{\omega}^2(n+(2n-4)\cos^2 \varphi_0)] \right\} \quad (38)$$

При этом, мы, считая $\tilde{\omega}$ нечетной функцией t , опустили члены, которые заведомо выпадут в интеграле (23). Как видим здесь остается член, содержащий φ_0 . Полагая теперь

$$\beta = 1 + t^2, \quad G = 1 + \frac{1}{2} t^2 \ddot{G}_0 \quad (39)$$

произведем в (38) разложение по t , удерживая лишь члены порядка t^2 . Тогда

$$K \approx \tau_0^2 \left\{ \alpha^2 - 1 + t^2 \left[3 + \alpha^2 (3\ddot{G}_0 - 4n - 3) + \alpha^4 (n-1)(2(n-1) + (n-2)\cos 2\varphi_0) \right] \right\} \quad (40)$$

Разлагая по x и t остальные члены, входящие в (23) и опуская несущественные множители, после интегрирования получим условие

$$\left\{ \tau_0^2 (\alpha^2 - 1) + \tau_0^2 \frac{x^2}{4} [-5 + \alpha^2 (3\ddot{G}_0 - 4n + 2) + \alpha^4 (n-1)(2(n-1) + (n-2)\cos 2\varphi_0)] \right\} > 0 \quad (41)$$

В частном случае $n = 2$ член с $\cos 2\varphi_0$ выпадает, и поскольку α не зависит от τ_0 , получаем критерий:

$$\alpha^2 - 1 - \frac{5}{4} x^2 \left(1 - \frac{1}{3} \ddot{G}_0 \right) > 0 \quad (42)$$

(в квадратной скобке можно положить $\alpha = 1$). Иными словами для стабилизации плазмы данной длины $L_{\text{ макс}} = x \ell$ при $x \ll 1$

необходимы по меньшей мере значения α равные:

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{3}{4} x^2 \left(1 - \frac{1}{3} \zeta_0\right)} \cong 1 + \frac{3}{8} x^2 \left(1 - \frac{1}{3} \zeta_0\right) \quad (43)$$

В случае $G(t) = \text{const}$ (бесконечно длинные стержни) получаем кривую $\alpha(x) = 1 + (9/8)x^2$, которая изображена на рис. I ($n = 2$). Для сравнения пунктиром изображена аналогичная функция $\alpha^{(n)}$, полученная путем численного решения точного уравнения (34) с $f(x, \alpha) = 0$ при $G(t) = \text{const}$. Как видим, приближение (43), справедливое при $x \ll 1$, сравнительно неплохо применимо даже при $x = 1$ (ошибка $\%$). Можно, поэтому надеяться, что и при $n \geq 3$ формула (41), справедливая для $x \ll 1$, не будет приводить к большой ошибке в определении α , необходимых для стабилизации $x \approx 1$ (рассмотрение $x > 1$, как уже отмечалось, не имеет смысла).

При равновесии магнитная трубка должна двигаться таким образом, чтобы ее энергия не менялась, что соответствует постоянству величин, стоящей под знаком δ_0 в формуле (41):

$$\zeta_0 (\alpha^2 - 1) + \zeta_0^2 \frac{x^2}{4} [\dots] = \text{const} \neq F(\zeta_0, \varphi_0) \quad (44)$$

Здесь в квадратных скобках заключено то же выражение, что в формуле (41). Уравнение (44) определяет в плоскости $\alpha = 0$ кривую $\zeta_0(\varphi_0)$, которую при $x \ll 1$ можно представить в виде:

$$\zeta_0(\varphi_0) = \langle \zeta_0 \rangle (1 + \zeta_n \alpha^2 \zeta_0 \varphi_0) \quad (45)$$

При этом

$$\zeta_n = - \frac{(n-1)(n-2) \langle \alpha \rangle^4}{8[(n-1)\langle \alpha \rangle^2 - 1]} \quad (46)$$

где $\langle \alpha \rangle = n \ell g(\alpha) \langle \zeta_0 \rangle^{n-2} / B_0(\alpha)$, а постоянная, входящая в (44) оказывается равной:

$$\text{const} = F(\langle \zeta_0 \rangle) = \langle \zeta_0 \rangle^2 (\langle \alpha \rangle^2 - 1) + \langle \zeta_0 \rangle^2 \frac{x^2}{4} [-5 + \langle \alpha \rangle^2 (3 \zeta_0^2 - 4n + 2) + \langle \alpha \rangle^4 2(n-1)^2] \quad (47)$$

Критерий (41) соответствует требованию положительности приращения энергии магнитной трубки при ее конвективном переходе на соседнюю

внешнюю кривую $\tau_0(\varphi_0)$ и теперь его можно представить в виде:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_0} F(\tau_0) = 2\langle \tau_0 \rangle \left\{ \langle \alpha \rangle^2 (n-1) - 1 + \frac{x^2}{4} [-5 + \langle \alpha \rangle^2 (n-1) (3G_0 - 4n + 2) + \langle \alpha \rangle^4 (2n-3) 2(n-1)^2] \right\} > 0 \quad (48)$$

Приравнивая это выражение нулю, найдем минимальные значения $\langle \alpha \rangle$, необходимые для стабилизации плазмы заданной длины x (ср.(43)):

$$\langle \alpha \rangle = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \left[1 + \frac{9}{8} x^2 \left(1 - \frac{1}{3} G_0 \right) \right] \quad \text{при } G_0 = 0 \quad \langle \alpha \rangle = \frac{\alpha_2}{\sqrt{n-1}} \quad (49)$$

(в члене с x^2 мы положили $\langle \alpha \rangle = 1 / \sqrt{n-1}$). Кривые $\langle \alpha \rangle = f(x)$, относящиеся к случаю $G(t) = C_0 t$, также приведены на рис. I.

5. Определим величины $q(\varphi)$ и G_0 , входящие в критерий (49). Наиболее общий вид рассматриваемых нами систем представляет собой пробкотрон, вокруг которого на цилиндре радиуса α уложены $2n$ рамок с током I в каждой, причем в соседних рамках ориентация токов противоположна (см.рис.2). Каждая рамка имеет длину $2d$ и занимает угол χ . На элемент площади dS , охватываемой одной рамкой, приходится магнитный момент $dM = \frac{3}{c} dS$, потенциал которого равен потенциалу магнитного диполя:

$$d\psi_1 = dM \frac{\frac{r_1^2 - z^2}{z}}{\left| \frac{r_1^2 - z^2}{z} \right|^3} = dM \frac{\alpha - r \cos(\varphi_1 - \varphi)}{\left[(\frac{r^2 - z^2}{z})^2 + \alpha^2 + z^2 - 2r\alpha \cos(\varphi_1 - \varphi) \right]^{3/2}} \quad (50)$$

Потенциал $2n$ таких элементарных диполей $\pm dM$ с чередующимися направлениями, расположенных по окружности через промежуток π/n будет равен сумме выражений (50). Тогда, разлагая знаменатель в ряд по $\cos(\varphi_1 - \varphi)$, найдем

$$d\psi_{2n} = \frac{dM/\alpha^2}{\left(1 + \frac{r^2 + (z'-z)^2}{\alpha^2} \right)^{3/2}} \sum_{s=1}^{\infty} (1+s-s) \frac{r^2 + (z'-z)^2}{\alpha^2} \frac{(2s-1)!!}{(2s)!!} \cdot \\ \cdot \left(\frac{2r/\alpha}{1 + \frac{r^2 + (z'-z)^2}{\alpha^2}} \right)^{3/2} \sum_{\kappa=0}^{2n-1} (-1)^{\kappa} \cos^s(\varphi_1 - \varphi + \kappa \frac{\pi}{n}) \quad (51)$$

Для последней суммы нетрудно получить:

$$\sum_{\kappa=0}^{2n-1} (-1)^{\kappa} \cos^s(\varphi_1 - \varphi + \kappa \frac{\pi}{n}) = \begin{cases} 0 & \text{при } s < n \\ 2^n \cos^n \varphi & \text{при } s = n \end{cases} \quad (52)$$

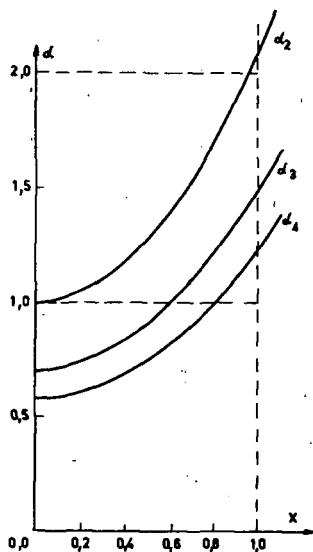


Рис.1.

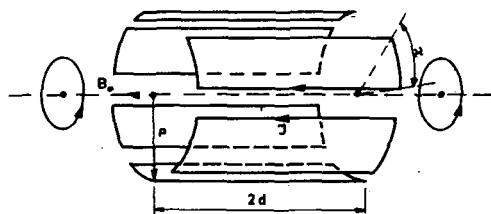


Рис.2.

так, что ограничиваясь первым неисчезающим членом порядка $(\varepsilon/\alpha)^n$ имеем:

$$\frac{d\psi}{d\eta} = \frac{d\mu}{\alpha^2} \frac{2n-1!!}{2n!!} 4n^2 \left(\frac{2+\frac{1}{n}}{\left[1 + \left(\frac{z-\alpha}{\alpha}\right)^2\right]^{n+\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{z-\alpha}{\alpha}\right)^2\right]^{n+\frac{1}{2}}} \right) \left(\frac{\eta}{\alpha}\right)^n \cos n(\varphi_1 - \varphi) \quad (53)$$

где $d\mu = \frac{3}{c} dS$, $dS = d\varepsilon' \alpha d\varphi_2$. Наконец интегрируя по φ_2 от $-d$ до $+d$ и по φ_1 от $-x/2$ до $+x/2$ окончательно находим (ср.(I4)):

$$\Psi_{2n} = g(z) \tau^n \cos n\varphi \quad (54)$$

где

$$g(z) = \frac{8J}{ca^n} \frac{2n-1!!}{2n!!} \int_{\infty}^{\infty} \left[\frac{t}{(1+t^2)^{n+\frac{1}{2}}} \right] \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+\frac{1}{2}}} \right| dt \quad (55)$$

и пределы интегрирования равны: $t_1 = -(d+z)/a$, $t_2 = (d-z)/a$. Из этой общей формулы можно получить ряд предельных случаев.

2n точечных диполей

Если имеется $2n$ точечных диполей с дипольным моментом m каждый, расположенных по окружности в плоскости $z=0$ (см. рис.3, где $n=3$), то полагая в (53) $z=0$, $\varphi_1=0$ имеем

$$g(z) = \frac{2\mu}{a^{2n}} \frac{2n-1!!}{2n-2!!} \frac{1+n-n(z/a)^2}{[1+(z/a)^2]^{n+\frac{3}{2}}} \quad (56)$$

В частности

$$g(0) = \frac{2\mu}{a^{2n}} \frac{2n-1!!}{2n-2!!} (1+n)$$

а для $G(t) = g(z)/g(0) \Big|_{z \rightarrow te}$ получим:

$$G(t) = \frac{1 - \frac{n}{2n} \left(\frac{\ell}{a} t\right)^2}{[1 + (te/a)^2]^{n+\frac{3}{2}}} = 1 + \frac{t^2}{2} \left[-\frac{\ell^2}{a^2} \left(3 + 2n \frac{n+2}{n+1} \right) \right] + \dots \quad (57)$$

Выражение в квадратных скобках есть величина \tilde{G}_o , входящая в критерий (49).

2n бесконечно-длинных стержней

Полагая в (55) $X = \pi/n$ получаем случай, когда рамки соприкасаются (см.рис.4). Устремляя далее длину рамок $2d$ к бесконечности (при этом $t_1 = -\infty$, $t_2 = +\infty$) и делая замену $2J \rightarrow J$ получим систему $2n$ тонких бесконечно-длинных стержней с чередующимися токами J в каждом, для которой

$$g(z) = \frac{4J}{ca^n} \frac{2n-1!!}{2n!!} n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{4J}{ca^n} ; \quad G(t) = 1 \quad (58)$$

Так как эта функция не зависит от z , то здесь очевидно $\tilde{G}_o = 1$. Если стержни выполнены в форме пластин с угловым раствором X , по каждой из которых равномерно распределен ток J , то найдем:

$$\Psi_{2n \text{ пластины}} = \frac{4J}{ca^n} z^n \int_{-X/2}^{+X/2} \frac{G(x)(q-q')}{X} \frac{dq'}{X} = \frac{4J}{ca^n} \frac{\sin(nX/2)}{(nX/2)} z^n \cos \varphi \quad (59)$$

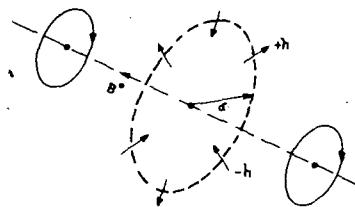


Рис. 3.

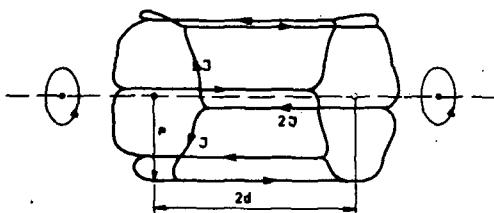


Рис. 4.

так что для пластин в функции φ возникает дополнительный множитель, равный единице при $x \rightarrow 0$:

$$\frac{g(\infty)}{g_{\text{пластин}}} = \frac{4J}{c\alpha^n} \frac{\sin(nx/2)}{(nx/2)} ; \quad G(t) = 1 \quad (60)$$

2n рамок

В общем случае $2n$ рамок, с током J в каждой, из (55) находим:

$$\frac{g(0)}{g_{\text{рамок}}} = \frac{8J}{c\alpha^n} \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} f_n\left(\frac{d}{\alpha}\right) \quad (61)$$

где функция $f_n(d/\alpha)$ равна ($C_n^{\infty} = n! / m! (n-m)!$) :

$$f_n(\xi) = \frac{2n-1!!}{2n-2!!} \left[\frac{\xi/n}{(1+\xi^2)^{n+\frac{1}{2}}} + \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{\xi^2}{1+\xi^2} \right)^{k+\frac{1}{2}} \right] \quad (62)$$

При $\xi \gg 1$ (длинные рамки) эта функция близка к единице, а при $\xi \ll 1$ имеет вид:

$$f_n(\xi) \Big|_{\xi \ll 1} = \frac{2n-1!!}{2n-2!!} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \xi \left[1 - \frac{n+1}{2} \xi^2 + \dots \right] \quad (63)$$

Графики функций $f_2(\xi)$ и $f_3(\xi)$ приведены на рис.5. Для

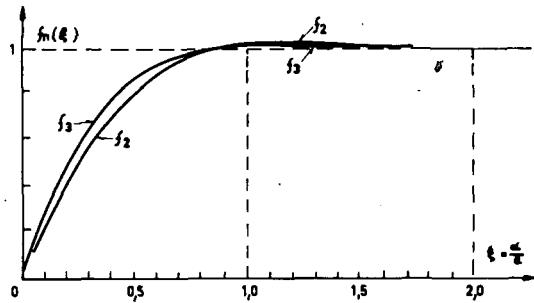


Рис. 5.

функции $G(t)$ имеем:

$$G(t) = 1 + \frac{t^2}{\alpha^2} \left[-\frac{\ell^2}{\alpha^2} g_n \left(\frac{d}{\alpha} \right) \right] + \dots$$

где

$$g_n(\zeta) = \frac{\ell_{n+1}!!}{\ell_{n-2}!!} \frac{\zeta / f_n(\zeta)}{(1+\zeta^2)^{n+\frac{3}{2}}} \left(\frac{2+\frac{3}{n}}{1+\zeta^2} - 1 \right) \quad (64)$$

На рис. 6 приведены кривые $g_2(\zeta)$ и $g_3(\zeta)$. Любопытно отметить, что при $\zeta = \sqrt{1+3/n}$ эти кривые меняют знак.

При $\zeta \rightarrow 0$ получим $g_n(0) = 3+2n + [2n/(1+n)]$, что совпадает с формулой (57) для точечных диполей. При $\zeta \gg 1$ эти функции быстро спадают так как этот предел соответствует рамкам, переходящим в длинные ($d \gg \alpha$) стержни, для которых $G_0 = 0$.

Подставляя формулы для $g(0)$ и G_0 в критерий (49), имеем, таким образом, условия конвективной устойчивости для различных систем:

$2n$ бесконечных пластин

$$\langle \alpha \rangle = \frac{n\ell}{B_0(0)} \langle \gamma_0 \rangle \frac{45}{ca^n} \frac{\sin nx/2}{nx/2} > \frac{1}{\sqrt{n-1}} \left(1 + \frac{9}{8} x^2 \right) \quad (65)$$

$2n$ рамок

$$\langle \alpha \rangle = \frac{n\ell}{B_0(0)} \langle \gamma_0 \rangle \frac{83}{ca^n} \frac{\sin nx}{2} f_n \left(\frac{d}{\alpha} \right) > \frac{1}{\sqrt{n-1}} \left\{ 1 + \frac{9}{8} x^2 \left[1 + \frac{1}{3} \frac{\ell^2}{\alpha^2} g_n \left(\frac{d}{\alpha} \right) \right] \right\} \quad (66)$$

$2n$ точечных диполей

$$\langle \alpha \rangle = \frac{n\ell}{B_0(0)} \langle \gamma_0 \rangle \frac{2\mu}{\alpha^{2+n}} \frac{2n-1!!}{2n-2!!} (n+1) > \frac{1}{\sqrt{n-1}} \left\{ 1 + \frac{9}{8} x^2 \left[1 + \frac{\ell^2}{\alpha^2} \left(1 + \frac{2n}{3} \frac{n+2}{n+1} \right) \right] \right\} \quad (67)$$

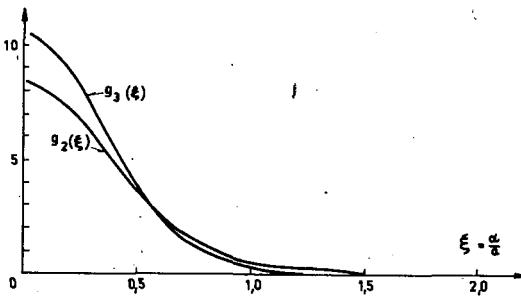


Рис. 6.

6. Сравним полученные формулы с результатами экспериментов Иоффе с сотр. [4], [5]. В установке ПР-5 стержни, которые можно считать бесконечно длинными, выполнены в форме б пластин в 40° каждая ($n=3$, $\chi = 2\pi/3$). Тогда из формулы (60) находим:

$$g(0) = \frac{4J}{ca^3} \cdot \frac{\sin 60^{\circ}}{\pi/3} = \frac{6\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{J}{ca^3}$$

и далее:

$$\langle \omega \rangle = n\ell g(0) \langle r_0 \rangle^{n-2} / B_0(0) = \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{J/ca}{B_0(0)} \cdot \frac{\ell}{a} \cdot \frac{\langle r_0 \rangle}{a} \quad (68)$$

Критерий устойчивости должен иметь вид (см.(65)):

$$\langle \omega \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{9}{8} x^2 \right) \quad (69)$$

В этой установке можно принять $\ell = 65$ см, $a = 25$ см, а продольное пробочное отношение $B_{\max}/B_{\min} = 1,7$. Если считать, что плазма простирается вплоть до пробок (или близко к ним), то приняв параболическую аппроксимацию, из соотношения $1,7 = 1 + x^2$ найдем $x = \sqrt{0,7} = 0,85$ и для устойчивости необходимо:

$$\langle \omega \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{9}{8} 0,7 \right) = 1,26$$

или

$$\frac{\langle r_0 \rangle}{a} = 1,26 \frac{a}{\ell} \frac{\pi}{18\sqrt{3}} \frac{B_0(0)}{J/ca} \quad (70)$$

Стенка камеры располагалась на радиусе $r_{\text{ст}} = 20$ см, и поле у стенки, создаваемое пластинами (экспериментально наблюдаемая величина), можно принять равным

$$B_0 = \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \frac{J}{ca} \left(\frac{r_{\text{ст}}}{a} \right)^2 = \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \left(\frac{20}{25} \right)^2 \frac{J}{ca}$$

(общая формула для 2n пластин с раствором x и током J каждая имеет вид $B_1 = (4\pi J/\epsilon a) \left(\sin \frac{\pi x}{R} / \frac{\pi x}{R} \right) (z/a)^{n-1}$)

Тогда (70) можно записать в виде:

$$\frac{\langle z_0 \rangle}{a} = 1,26 \frac{a}{e} \left(\frac{z_0}{a} \right)^2 \frac{B_1(z)}{B_1(z_{eq})} = \frac{0,31}{\sqrt{x_1^2 - 1}} \quad (71)$$

где x_1 - введенное в экспериментальной работе [5] "поперечное пробочное отношение" $x_1 = \sqrt{1 + (x_1/a)^2}$. Учитывая, что стенка камеры расположена на $z_{eq} = 20$ см, однако, еще 3 см можно отнести за счет титанового поглотителя (1 см) и лармировского радиуса (2 см), следовало бы ожидать, что стабилизированный режим будет возникать при $\langle z_0 \rangle = 17$ см, что в соответствии с (71) отвечало бы

$$x_1 = \sqrt{1 + \left(0,31 \frac{17}{17} \right)^2} = 1,1 \quad (72)$$

Это критическое значение x_1 в самом деле наблюдается в работе [5]. На рис.7, взятом нами из работы [5], приведены осцилограммы тока на ленгмировский зонд, расположенный на различных расстояниях от оси системы. Из формулы (71) находим:

$$\langle z_0 \rangle = 19 \text{ см}, \quad \begin{matrix} \langle z_0 \rangle = 11 \text{ см} \\ x_1 = 1,08 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \langle z_0 \rangle = 9,3 \text{ см} \\ x_1 = 1,22 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \langle z_0 \rangle = 7,3 \text{ см} \\ x_1 = 1,30 \end{matrix}$$

Сравнивая эти значения с рис.7 можно видеть, что при $z_{sond} > \langle z_0 \rangle$ осцилограммы имеют плавный характер, а при $z_{sond} < \langle z_0 \rangle$ на них видны колебания. Значение $\langle z_0 \rangle$, определяемое формулой (71), соответствует "эффективному минимуму B", и плазма от оси должна стекать в этот минимум поля, так чтобы ее давление $P(z)$ спадало как наружу от $\langle z_0 \rangle$, так и в направлении от $\langle z_0 \rangle$ к оси. Подобная перестройка плазмы, по-видимому, действительно имеет место на эксперименте. Тогда колебания, наблюдавшиеся при $z_{sond} < \langle z_0 \rangle$, можно объяснить тем, что сам зонд "выедает" внешние области плазмы создавая при $z < \langle z_0 \rangle$ неблагоприятное соотношение между градиентом $\partial P / \partial z$ и эффективным градиентом модуля поля $(\partial B / \partial z)_{eff}$. Такое заключение подтверждается (в той мере, насколько позволяет статистика эксперимента) тем фактом, что в отсутствии зонда при $x_1 > 1,1$ поток нейтралов не показывает колебаний. При наличии же зонда на расстоянии z_{sond} поток нейтралов при $z_{sond} > \langle z_0 \rangle$ не показывает колебаний, а при $z_{sond} < \langle z_0 \rangle$ колебания есть и на осцилограмме зонда и на осцилограмме потока нейтралов.

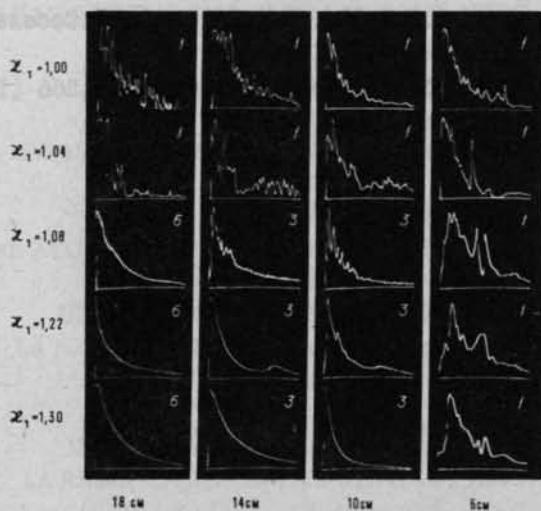


Рис. 7.

В заключение отметим, что на установке *Phoenix II* (Свитмен, Адамс и др., Англия), в которой стабилизация достигается 4 рамками ($n = 2$), и в которой инъекция осуществляется перпендикулярно оси системы, так что можно принять $x = 0$, стабилизация конвективной неустойчивости (при $x = 0$ она возникает при $\delta_B > 0$) должна была бы происходить при (см.(66))

$$\omega = \frac{2\ell g(\alpha)}{\Omega_e(\alpha)} = 16 \frac{\ell}{\alpha} \frac{\sigma/c_a}{\Omega_e(\alpha)} f_2\left(\frac{\alpha}{\omega}\right) \sin \varphi > 1 \quad (73)$$

где $f_2(\varphi)$ — функция, изображенная на рис. 5.

Автор признателен академику Л.А.Арцимовичу, по предложению которого нами были рассмотрены рамки конечной длины, а также М.С.Иоффе, Б.Б.Кадомцеву и В.Г.Тельковскому за обсуждение результатов работы.

Автор благодарит Д.Х.Морозова и В.В.Косачева за участие в ряде отдельных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

- I D.B. Gott, M.S. Ioffe, V.G. Telykovskii, Nucl. Fusion, suppl part III p.I045 (1962г.) — доклад в Зальцбурге.
- 2 Rosenbluth, Longmire , Ann. of Phys I, 120 (1957)
- 3 Furth, Rosenbluth Phys. of Fluids 7, 764 (1964)

- 4 Ю.Т.Байборо́дов, М.С.Иоффе, В.М.Петров, Р.И.Соболев
Атомная энергия 14, 443 (1963)
- 5 М.С.Иоффе, Р.И.Соболев, Атомная энергия 17, 366 (1964)

STABILIZATION BY SHEAR AND NEGATIVE V"

H.P. FURTH AND J. KILLEEN
LAWRENCE RADIATION LABORATORY,
LIVERMORE, CALIF., UNITED STATES OF AMERICA
AND
M.N. ROSENBLUTH
GENERAL ATOMIC DIVISION, GENERAL DYNAMICS CORPORATION,
AND
UNIVERSITY OF CALIFORNIA (SAN DIEGO)
LA JOLLA, CALIF., UNITED STATES OF AMERICA
AND
B. COPPI
UNIVERSITY OF CALIFORNIA (SAN DIEGO)
LA JOLLA, CALIF., UNITED STATES OF AMERICA

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

STABILIZATION BY SHEAR AND NEGATIVE V". A criterion is derived for the stability against gravitational interchange of toroidal systems by using the hydrodynamic equation with finite resistivity. The stability depends on an expression that reduces to the sign of the second derivative of the volume per unit flux (V'') in the case that the plasma does not surround any "floating" conductors. If this condition is violated, then a "rapid" resistive instability results. If the condition is satisfied, then both the resistive growth rate and the critical β against "ballooning" modes depend on a figure of merit rR_c/L^2 where r is plasma radius, L is length along field lines between "good" and "bad" regions, R_c the mean radius of curvature and γ is a shape factor depending on the design. A similar consideration applies to "kinking" modes.

Using the results of numerical calculations, we will discuss the structure, stability properties and figure of merit of several "stagnation-point" solutions having the negative-V" property. The principle here is to create directions of favorable $\vec{V} B$, then cause the rotational transform to be weakened in the favorable regions (reaching a null at the stagnation point). The negative contributions to V'' are then weighted heavily, becoming infinite at the stagnation point. We consider three types of solution: (1) Linear periodic-multipole arrays, by using helical $\ell = 2$ and 4, or $\ell = 3$ "shaping fields" with natural stagnation points; and by superimposing $\ell = 0$ and 2, $\ell = 1$ and 3, or $\ell = 0$ and 3 "corrugating fields", to create favorable $\vec{V} B$ regions. (2) Helical equilibria, by using gross helical curvature to create the favorable $\vec{V} B$ regions and stagnating the rotational transform by means of a current on an axial conductor, around which the helical equilibrium flux-tube is wound. (3) Toroidal equilibria, by using the gross toroidal curvature to create the favorable $\vec{V} B$ regions. The rotational transform is generated by a helical $\ell = 2$ winding and stagnated by an auxiliary poloidal field.

STABILISATION AU MOYEN DU CROISEMENT DE LIGNES DE CHAMP ET DE L'EMPLOI D'UN V" NEGATIF.
Les auteurs établissent un critère de stabilité à l'égard de l'interchange gravitationnel dans les dispositifs toroïdaux à l'aide de l'équation hydrodynamique dans laquelle on tient compte d'une résistivité finie. La stabilité dépend d'une expression qui se réduit au signe de la dérivée seconde du volume par unité de flux (V'') lorsque le plasma n'entoure pas de conducteurs « flottants ». Si cette condition n'est pas remplie, il se produit une instabilité résistive « rapide ». Si elle l'est, le taux de croissance de l'instabilité résistive ainsi que la valeur critique de β au-delà de laquelle se produit le mode de « ballonnement » dépendent d'un nombre caractéristique $\approx (rR_c/L^2) \gamma$ où r est le rayon de plasma, L la distance séparant les « bonnes » et les « mauvaises » régions mesurée le long des lignes de forces, R_c le rayon moyen de courbure et γ un facteur de forme qui dépend des détails de la configuration. Des considérations semblables s'appliquent à des « modes en serpents ».

En se fondant sur les résultats de calculs numériques, les auteurs étudient la structure, les propriétés de stabilité, ainsi que le nombre caractéristique de plusieurs solutions à « points de stagnation » pour lesquelles

V'' est négatif. La méthode consiste, dans ce cas, à créer des directions où $\vec{V}B$ est favorable et à provoquer ensuite l'affaiblissement de la transformée rotationnelle dans les régions favorables (pour atteindre la valeur zéro au point de stagnation). Les facteurs contribuant à rendre V'' négatif sont alors fortement pondérés et deviennent infinis au point de stagnation. Les auteurs examinent trois types de solutions: 1. Des dispositifs linéaires à multipôles périodiques, au moyen de «champs modelants» hélicoïdaux (du type $\ell = 2$ et 4 ou $\ell = 3$) présentant des points de stagnation naturels auxquels on superpose des «champs de gafrants» (du type $\ell = 0$ et 2, $\ell = 1$ et 3 ou $\ell = 0$ et 3), pour créer les régions à $\vec{V}B$ favorable. 2. Des équilibres hélicoïdaux au moyen de la courbure hélicoïdale globale pour créer des régions à $\vec{V}B$ favorable, la stagnation de la transformée rotationnelle étant obtenue à l'aide d'un courant circulant sur un conducteur axial, autour duquel s'enroule le tube de flux en équilibre dont la forme est hélicoïdale. 3. Des équilibres toroïdaux, au moyen de la courbure toroïdale globale, pour créer les régions à $\vec{V}B$ favorable. La transformée rotationnelle est engendrée par un enroulement hélicoïdal du type $\ell = 2$. Sa stagnation est obtenue par un champ poloïdal auxiliaire.

СТАБИЛИЗАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ ШИРА И ОТРИЦАТЕЛЬНОГО V'' . Для устойчивости относительно гравитационной желобковой неустойчивости тороидальных систем выводится критерий путем использования гидродинамического приближения с конечным удельным со- противлением. Устойчивость зависит от выражения, которое сводится к знаку второй производной величины объема на единицу потока (V''); в том случае, когда плазма не окружена какими-либо "плавающими" проводниками. Если это условие нарушается, то возникает "быстрая" резистивная неустойчивость. Если это условие выполняется, то как диссиликативный инкремент, так и критическое β для "баллонных" мод зависят от величины $\sim rR_c \gamma/L^2$, где r — радиус плазмы, L — длина вдоль линий поля между "хорошими" и "плохими" областями, R_c — средний радиус кривизны и, наконец, γ — формфактор, зависящий от детальной конструкции. Подобные соображения распространяются и на винтовые моды.

Используя результаты численных расчетов, мы обсудим структуру, устойчивость и преимущества нескольких решений со "стационарной точкой", имеющих отрицательное V'' . Принцип состоит в том, чтобы создать направления благоприятного $\vec{V}B$, а затем создать вращательное преобразование, ослабляемое в благоприятных областях (достигая 0 в стационарной точке). Отрицательные вклады в величину V'' приобретают большой вес, становясь бесконечными в стационарной точке.

Рассматриваются три типа решения: 1) Линейные периодически-мультитипольные ряды С использования винтовых $\ell = 2$ и 4, или $\ell = 3$ "формирующих полей" с естественными стационарными точками; и путем наложения $\ell = 0$ и 2, $\ell = 1$ и 3, или $\ell = 0$ и 3 "гофрирующих полей", для того, чтобы создать благоприятные области $\vec{V}B$. 2) Винтовое равновесие путем использования большой винтовой кривизны с целью создания благоприятных областей $\vec{V}B$ и остановки вращательного преобразования с помощью тока на осевом проводнике, вокруг которого навита винтовая трубка для равновесного потока. 3) Тороидальное равновесие с использованием большой тороидальной кривизны для создания благоприятных областей $\vec{V}B$. Вращательное преобразование создается с помощью спиральных витков $\ell = 2$ и стационарная точка образуется благодаря вспомогательному полоидальному полю.

ESTABILIZACION POR CIZALLAMIENTO Y EMPLEO DE V'' NEGATIVA. Se establece en la presente memoria un criterio de estabilidad respecto del intercambio gravitatorio en los sistemas toroidales, usando la ecuación hidrodinámica en la cual se tiene en cuenta una resistividad finita. La estabilidad depende de una expresión que se reduce al signo de la derivada segunda del volumen por unidad de flujo (V'') en el caso de que el plasma no rodee a ningún conductor «flotante». Si esta condición no se cumple aparece una inestabilidad resistiva rápida mientras que, en caso contrario, tanto el índice de aumento de la inestabilidad resistiva como el valor crítico de β más allá del cual se manifiesta el modo de «inflación» depende de un valor característico $\sim rR_c \gamma/L^2$, donde r es el radio del plasma, L la distancia que separa las zonas «buenas» y «malas», medida a lo largo de las líneas de fuerza, R_c el radio de curvatura medio, y γ un factor de forma que depende de detalles de la configuración. Análogas consideraciones se aplican a los modos «serpenteados».

Sobre la base de los resultados de los cálculos numéricos, los autores analizan la estructura, las propiedades de estabilidad y el valor característico de varias soluciones de «punto de estancamiento» para las cuales V'' es negativa. El método consiste en crear direcciones en que $\vec{V}B$ es favorable y debilitar luego la transformada rotacional en las regiones favorables (para alcanzar el valor cero en el punto de estancamiento). Los factores que contribuyen al valor negativo de V'' se ponderan entonces marcadamente, llegando a ser infinito en el punto de estancamiento. Los autores consideran tres tipos de solución: 1) Disposiciones lineales de multipolos periódicos, mediante campos «modeladores» helicoidales (del tipo $\ell = 2$ y 4 o $\ell = 3$) que presentan

puntos de estancamiento naturales a los que se superponen «campos de acanaladura» (del tipo $\ell = 0$ y 2 , $\ell = 1$ y 3 , o bien $\ell = 0$ y 3) para crear regiones de ∇B favorable. 2) Equilibrios helicoidales, empleando la curvatura helicoidal de carácter global para crear las regiones de ∇B favorable y estancando la transformada rotacional mediante una corriente que circula por un conductor axial, alrededor del cual se arrolla el tubo de flujo en equilibrio, de forma helicoidal. 3) Equilibrios toroidales empleando la curvatura toroidal de carácter global para crear las regiones de ∇B favorable. La transformada rotacional se genera mediante un devanado helicoidal del tipo $\ell = 2$ y se logra el estancamiento mediante un campo poloidal auxiliar.

I. INTRODUCTION

Experiments with open-ended minimum-B systems have demonstrated the effectiveness of favorable field-curvature in eliminating the interchange instability. However, recent experiments and theory [1] also indicate the prevalence of velocity-space instabilities under many conditions for "loss-cone" distributions. It is therefore of interest to investigate the properties of toroidal "average minimum-B" configurations.

Experiments with shear-stabilized toroidal geometries [2] have demonstrated imperfect plasma confinement under conditions where the infinite-conductivity hydromagnetic theory would predict stability. These unfavorable experimental results may reflect the theoretical point that inclusion of a small but finite resistivity in the hydromagnetic theory gives rise to resistive interchange modes [3] with growth-rates much faster than ordinary resistive diffusion. These finite-resistivity modes are not strongly inhibited even by very high shear. Shear-stabilization may, however, become effective at sufficiently high plasma temperature [4] and has also been shown both theoretically [5] and experimentally [6] to be useful in suppressing universal instabilities.

Stabilization by negative V'' (i.e., by a favorable gradient of $\int dA/B$ or of "average B ") is feasible in toroidal systems [7], and can be much more effective than shear-stabilization against the resistive interchange modes. Negative V'' is also useful against universal instabilities [8], in approximately the same sense as minimum-B [9].

The two stabilizing principles of shear and negative V'' are readily combined within a single configuration. In fact, this feature arises naturally in some of the most practical negative- V'' solutions.

In Section II we review briefly the stability situation for configurations having both shear and negative V'' . The theoretical picture is not as yet fully explored; and experimental studies are only now in progress. One can, however, define three distinct figures of merit which are certain to play an important role in controlling stability.

(1) The distance L between favorable and unfavorable contributions to V'' must be small in the sense that $r_p R_c / L^2$ should not be very small compared with 1, where r_p is the pressure-gradient distance and R_c is the mean radius of curvature.

(2) The difference in magnitude between the favorable and unfavorable contributions to V'' must be of the same magnitude as the unfavorable contribution.

(3) The total decrease in V' from the center of the confinement flux tube to its surface (the "magnetic well") should be as large as possible.

In Section III we discuss an important class of negative- V'' and shear-stabilized configurations, the "stagnation point" solutions. These have the property that criterion (2) is satisfied automatically near the surface of the confinement zone. Criteria (1) and (3) are in many cases competitive with each other, but there are some configurations that give promising results for both criteria at once.

II. STABILITY CONSIDERATIONS

For the most part, we confine ourselves in this paper to discussing the stability of negative- V " systems within the framework of the fluid theory, reserving an examination of specific plasma effects to another paper [4].

The energy principle for hydromagnetic stability may be put in the form [10]

$$\delta W = \int d\tau \left\{ \frac{(\nabla \times \vec{\xi} \times \vec{B})^2}{4\pi} + \frac{B^2}{8\pi} \left[\nabla \cdot \vec{\xi} + \frac{\vec{\xi} \cdot \nabla (B^2 + 8\pi p)}{B^2} \right]^2 + j_{||} (\vec{\xi} \times \nabla \times \vec{\xi} \times \vec{B}) \right. \\ \left. + \gamma_H p_0 (\nabla \cdot \vec{\xi})^2 - \frac{1}{B^2} (\vec{\xi} \cdot \nabla p) [\vec{\xi} \cdot \nabla (B^2 + 8\pi p)] \right\} \quad (1)$$

where all quantities except the displacement $\vec{\xi}$ refer to the plasma equilibrium. The first two terms represent the energy contribution from the components of the perturbed magnetic field perpendicular and parallel to the equilibrium field. The third term drives "kinking modes" for which we mention in passing that all cases so far looked at give similar but slightly more favorable stability results than the ballooning modes discussed herein. The fourth term represents a very small stabilizing contribution which may be neglected if we set $\xi_{||} = 0$, while the last term represents the driving energy for the instability, clearly expressing the fact that the crucial factor in determining stability is the sign of the quantity $(\nabla p \cdot \nabla B)$.

The short-wavelength interchange perturbation is given by $\vec{\xi} = \vec{B} \times \nabla \phi / (B^2 + 8\pi p)$ where ϕ varies slowly along the magnetic field lines, fairly rapidly normal to the flux surfaces and very rapidly in the direction normal to \vec{B} and the pressure gradient. This choice makes the second and third terms in Eq. (1) negligible. We further restrict ourselves to the limit of fairly low β making the approximation $\nabla(B^2 + 8\pi p) \approx \nabla B_0^2$ where B_0 is the vacuum magnetic field and also neglect terms of order p/B_0^2 . With these approximations the energy principle may be put in the form:

$$\delta W = \int d\tau \left[\frac{1}{4\pi} \left(\vec{B}_0 \times \nabla \frac{\vec{B}_0 \cdot \nabla \phi}{B_0^2} \right)^2 - \frac{1}{4} (\tilde{\nabla} \phi)^2 (\nabla p \cdot \nabla B_0^2) \right] \quad (2)$$

where $\tilde{\nabla} \phi$ is the component of $\nabla \phi$ within the magnetic surface, but normal to \vec{B} .

In the limit $\beta \rightarrow 0$, δW is clearly positive definite except for the special case $\vec{B} \cdot \nabla \phi = 0$, i.e., ϕ a constant along field lines. In the case of a sheared magnetic field surface this perturbation is not allowable as ϕ would no longer be a continuous function. This restriction evidently arises from the fact that in hydromagnetic theory plasma remains rigidly frozen to magnetic field lines, so that if the field lines cannot be interchanged without bending no instability can develop. Just how this restriction is modified by the complete set of plasma equations is an as yet incompletely solved problem. We have shown [3] however that the addition of a simple resistivity to the hydrodynamic equations leads to a similar variational principle which has the property that if the last term in Eq. (2) gives a negative contribution to δW for $\vec{B} \cdot \nabla \phi = 0$ on a magnetic surface then a resistive instability with growth rate $\sim \eta^{1/3}$ results. Thus we may regard the condition

$$\int d\tau \frac{1}{B} (\tilde{\nabla} \phi)^2 (\nabla p \cdot \nabla B^2) < 0 \quad (3)$$

$\vec{B} \cdot \nabla \phi = 0$; as the requirement for favorable potential energy against a pure interchange instability, whose violation leads to hydrodynamic instability in the absence of shear, or a resistive instability in the presence of shear.

The stability criterion Eq. (3) has been evaluated in three special cases and reduces to the following simple expressions:

(A) closed magnetic field lines, no rotational transform [11]:

$$\nabla_p \cdot \nabla \oint \frac{ds}{B} > 0; \quad (3A)$$

(B₁) magnetic surfaces, no enclosed conductors [11]:

$$\frac{\partial p}{\partial \psi} \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} > 0 \quad (3B)$$

where ψ is the flux contained within a given flux surface and V the volume.

(B₂) magnetic surfaces enclosing non-plasma currents, e.g., hard-cores, with axial symmetry around the cylindrical axis of the torus:

$$\frac{\partial p}{\partial \psi} \oint \frac{ds}{B_\perp} \frac{\partial}{\partial \psi} \ln(B_\perp^2 + B_\phi^2) < 0 \quad (3C)$$

Here R_T is the major radius, $B_\phi \propto 1/R_T$, B_\perp is the poloidal field, and the integral is to be taken along the intersection of a flux surface with a constant- ϕ plane. Equation (3C) indicates that in the case of the levitron [2] displacing the hard-core outwards from the geometrical center should be stabilizing. A strong stabilizing effect is achieved by creating a stagnation point on the small-major-radius side of the hard-core.

Next we turn to theoretical considerations relevant to the assessment of the relative merits of configurations satisfying condition Eq. (3). We note that, if β is non-zero, perturbations are possible for which ϕ is larger in the regions of unfavorable curvature, making the last term in Eq. (2) negative, the first term non-zero, and thereby determining a critical β for hydromagnetic stability against these so-called ballooning modes. Suppressing details due to particular geometries, neglecting the stabilizing effect of shear in the spirit of this study, (it is also usually small for a deep-well configuration) we find that Eq. (2) reduces to the following differential equation for stability

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} + \frac{\beta}{r_p R_c(z)} \phi = 0 \quad (4)$$

where

$$\frac{\beta_c}{r_p} = \left(\frac{8\pi V_p}{B^2} \right)_{\text{crit.}} ; \quad r_p \approx \frac{p}{V_p}; \quad R_c \approx \frac{B}{V_B}$$

and for simplicity we may write

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_c} \left\{ -\gamma + \cos 2\pi \frac{z}{L} \right\}$$

where γ is positive (expressing the fact that our configuration is on the average stable) and less than 1, since in some regions unfavorable curvature must prevail in toroidal geometry. Large γ implies that the favorable region is strongly predominant. Here z measures distance along a field line, or flux surface, and for stability all flux surfaces must satisfy $8\pi V_p/B^2 < \beta_c/r_p$ determined by Eq. (4). Equation (4) is now of the standard Mathieu form and we may write the eigenvalue as

$$\gamma = F \left(\frac{\beta L^2}{2\pi^2 r_p R_c} \right)$$

where

$$F(x) = x/4 \quad x \ll 1$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad x \gg 1$$

A satisfactory approximation for our purposes is given by using the forms

$$\beta_c = \frac{4\gamma}{(1+3\gamma)(1-\gamma)^2} \frac{2\pi^2 r_p R_c}{L^2} \quad (5)$$

Note that the absolute well-depth, r_p/R_c , does not enter into the above result. The well-depth is of course important in making the system insensitive to stray fields and other imperfections and may well also be relevant to stability against more general perturbations, such as the universal instability, to be discussed later.

Equation (5) shows the dependence on the figures of merit (1) and (2) mentioned in the introduction.

Turning now to the low β resistive ballooning mode, a fundamental difference from the infinite-conductivity case arises [12] because in the resistive case the field lines remain fixed and the ballooning diffusion across field sets up a strong unbalance of pressure along the field lines, with a consequent production of sound waves to even the imbalance. If these sound waves are neglected, a figure of merit similar to that given by Eq. (5) is found to govern the resistive growth rate. The following simplified set of equations will be used to describe the effect of sound waves in the hydrodynamic approximation,--again using our approximate form for field curvature, and keeping only the parallel component of resistivity, which is the essential one for the resistive modes.

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = - \nabla p + \vec{j} \times \vec{B}_0 + \frac{2p}{R_c} \left(-\gamma + \cos 2\pi \frac{z}{L} \right) \hat{x} \quad (6a)$$

$$- \nabla \phi + \vec{V} \times \vec{B} = \eta \frac{j_{\parallel}}{B_0} \hat{B}_0 \quad (6b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla p + \gamma_B p \vec{V} \cdot \vec{V} = 0 \quad (6c)$$

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (6d)$$

We consider an equilibrium situation characterized by

$$p_0 = \hat{p}_0 \left(1 - \frac{x}{r_p} \right); \quad \vec{B}_0 = B_0 \left(\hat{z} - 2\pi \frac{xy}{L_s} \right); \quad iK \left(y - \frac{2\pi x}{L_s} z \right)$$

$\vec{V}_0 = 0$ and look for perturbed "quasi-modes" of the form $e^{st} e^{-\frac{z}{L_s}} \phi(z)$ where z is now to be interpreted as distance along the field lines and K describes the variation perpendicular to the field. We are making the usual "flute" approximation that the variation in x , except for the terms involving the shear, $1/L_s$, is slow compared with the variation in y .

Equation (6b) may now be used to solve for V_z , and the parallel component of Eq. (6a) to solve for V_x , thus eliminating \vec{V} . Next, Eq. (6a) is solved for j_{\parallel} and Eq. (6b) for j_{\perp} . Equations (6c) and (6d) now reduce to the following coupled set for ϕ and p_1

$$- S p_0 K^2 \left[1 + \left(\frac{2\pi z}{L_s} \right)^2 \right] \phi + \frac{i2K p_1}{R_c} \left[-\gamma + \cos \left(2\pi \frac{z}{L} \right) \right] + \sigma \frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0 \quad (7a)$$

$$sp_1 + \frac{iK\phi p_0}{r_p} - \frac{c^2}{s} \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} = 0 \quad (7b)$$

where c^2 is the sound speed, $\gamma_H \frac{p_0}{p_0}$.

Finally Eq. (7) may be Fourier-transformed and p_1 eliminated to yield

$$\frac{L^2}{s^2} \frac{d^2 \phi(\alpha)}{d\alpha^2} - \phi(\alpha) - \frac{\alpha^2 \phi(\alpha)}{s^2 \epsilon} - G \left\{ \frac{\gamma \phi(\alpha)}{s'^2 + \alpha^2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\phi(\alpha+1)}{s'^2 + (\alpha+1)^2} + \frac{\phi(\alpha-1)}{s'^2 + (\alpha-1)^2} \right] \right\} = 0 \quad (8)$$

We have written Eq. (8) in dimensionless variables such that $\alpha = L/2\pi \times$ (Fourier transform variable of z); and

$$s' = \frac{L}{2\pi c} s$$

$$G = \frac{L^2}{2\pi^2 r_p R_c \gamma_H}$$

$$\epsilon = \frac{\beta \gamma_H I K^2}{16\pi^2 c} \eta. \quad (9)$$

First consider the no-shear case $L_s \rightarrow \infty$. Then Eq. (8) reduces to a three term recursion relation between $\phi(\alpha)$, $\phi(\alpha+1)$, $\phi(\alpha-1)$ with the eigenvalue s' determined by the secular determinant. If the resistivity η is assumed small then all the diagonal elements of the determinant will be large except for $\alpha = 0$. This means it is sufficient to consider the 3×3 determinant for $\phi(0, \pm 1)$, yielding the equation:

$$(s'^2 + G\gamma)(s'^2 + 1 + \epsilon G\gamma s') = \frac{1}{2} \epsilon s' G^2 \quad (10)$$

Equation (10) now has two solutions

$$s'_1 = \pm i\sqrt{G\gamma} + \frac{1}{4} \epsilon \frac{G^2}{1 - G\gamma} \quad (11a)$$

$$s'_2 = \pm i + \frac{1}{4} \frac{\epsilon G^2}{G\gamma - 1} - \frac{\epsilon G\gamma}{2} \quad (11b)$$

The first solution corresponds in lowest order to the stable oscillation in the average favorable curvature. It will be seen that in the case $G\gamma < 1$ the oscillation becomes unstable, with growth rate proportional to the resistivity. The second solution corresponds to a sound wave with wave-length L and becomes unstable for the usual case of $\gamma G > 1$, unless γ is implausibly close to 1. Again the growth rate is proportional to the resistivity and is in fact similar to that calculated neglecting sound waves. It is interesting to note that for the special case $G\gamma \equiv 1$ a resonance obtains and $s' \propto \eta^{1/2}$.

It is perhaps worth digressing briefly to describe the situation calculated in Ref. 4, where the plasma equations without non-ion collisions are used in the same geometry. The importance of the plasma corrections may be expressed in terms of the ratio of the frequency of the drift wave to the sound wave $\chi = (KR_1) L/r_p$. If $\chi < 1$, then strong ion Landau damping stabilizes the mode. If $\chi > 1$, the two modes become $s'_1 \approx i(G\gamma/\chi)$; $s'_2 \approx i\chi$, with the same stability properties described above, but now as a function of $G\gamma/\sqrt{\chi}$. There is the important additional feature that for $G\gamma > 1$, $(R_1/r_p) < \sqrt{r_p R_c}$, K may be adjusted to satisfy the resonant condition leading to growth proportional to $\eta^{1/2}$.

We have seen that without shear the ballooning mode persists in spite of sound-wave propagation. Returning now to Eq. (8) to study the effect of shear, we expect that the solution will consist of components peaked around $\alpha' = 0, \pm 1$. The shear is relatively ineffective on the short-wavelength components, so we may again solve for $\phi(\alpha \pm 1)$ algebraically, yielding the equation for the long-wavelength component $\phi_0(\alpha)$

$$\frac{L^2}{L_s^2} \frac{d^2\phi_0}{d\alpha^2} - \phi_0 - \frac{\alpha^2\phi_0}{s'\epsilon} - \frac{G\gamma\phi_0}{s'^2} + \frac{G^2\epsilon}{2s'} \frac{s'^2 + 1 + Gys'\epsilon}{(s'^2 + 1 + Gys'\epsilon)^2 - 4\alpha^2} \phi_0 = 0 \quad (12)$$

Again there is a root near $s' = \pm i\sqrt{G\gamma}$. For this mode the correction $-4\alpha^2$ in the last term is negligible and we are left with Hermite's equation, which yields the result that for $G\gamma < 1$ the wave is unstable, as given by Eq. (11a), provided that the shear is weak enough, i.e., the wave is stabilized if

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{G^{3/2}\epsilon^{3/2}}{\sqrt{\gamma}} \frac{L_s}{L} \frac{1}{1 - G\gamma} < 1. \quad (13a)$$

For the sound wave, $s' \sim 1$, the situation is more complex since now the correction term is important. We note that the term α'/ie is small except at very large α , where it dominates the asymptotic behavior. Thus we seek a solution of the equation obtained by omitting this term, which behaves as

$$e^{\mp ix \frac{L}{L_s} \sqrt{G\gamma - 1}} \quad \text{at } \pm \infty,$$

and connects properly with the well-behaved solution of the complete equation as may be seen by WKB analysis. Expanding the last term of Eq. (12) for small α , we again find Hermite's equation with solution

$$\exp \left\{ \frac{i\alpha^2 L_s}{4} \frac{1}{L} \left[\frac{G^2\epsilon}{(\delta s_0)^3} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

where (δs_0) is the growth rate for $L_s \rightarrow \infty$ as given by Eq. (11b). This solution goes over asymptotically to the desired behavior at $\pm \infty$. This will now be a valid solution if the expansion is correct, i.e., if

$$(\delta s_0)^2 > \overline{\alpha^2} \approx \left[\frac{(\delta s_0)^3}{G^2\epsilon} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{L}{L_s}.$$

For larger shear, a WKB analysis indicates that no solution exists. Hence to stabilize the sound wave mode which occurs for $G\gamma > 1$ we require

$$\frac{L_s}{L} \frac{\epsilon G^2}{G\gamma - 1} < 1 \quad (13b)$$

Similarly the $\frac{1}{\alpha^2}$ growth rate at resonance ($G\gamma \approx 1$) will disappear if

$$\frac{L_s}{L} \epsilon G^2 < 1. \quad (13c)$$

Conditions (13b) and (13c) have a simple physical interpretation: $\delta s_0 \frac{L_s}{L} < 1$, arising because the sound wave is essentially phase-mixed away by the shear when it has travelled a distance L_s , and for an instability to exist it must grow more rapidly than this.

Finally we turn to a brief discussion of the other well-known low-frequency non-hydromagnetic instability--the so-called drift or universal instability. For a minimum-B system it has been shown [9] that stability will result against the universal instability for wave-number K transverse to the field, if

$$2 \frac{r}{R_c} > (\overline{KR_i})^2 \frac{T_e}{T_e + T_i}$$

where $(\overline{KR_i})^2 = (KR_i)$ if $(KR_i) < 1$, and ≈ 1 if $(KR_i) > 1$. For a negative-V" system with large-well depth and low electron temperature such a criterion could be satisfied on the average if there is adequate communication between "good" and "bad" regions. This leads to an effective stability criterion

$$\frac{L}{r_p} \lesssim 10 \frac{T_i}{T_e} \frac{1}{KR_i}.$$

If this condition is satisfied, any mode localized sufficiently to be unstable energetically will be effectively ion Landau-damped. Even if this condition is not satisfied, the communication between "good" and "bad" regions by the electrons will drastically reduce the growth rate, since now an energetically possible mode must have many Fourier components and the electron thermal speed is so large that the electrons can interact with only one such component. Strong shear is, of course, by itself capable of stabilizing the universal instability.

The theoretical arguments in favor of negative V" confinement, as opposed to shear-stabilized confinement, appear then to be strong but not conclusive in the sense that they show higher potentially stable β 's, a great amelioration of resistive instabilities, and a strong stabilizing effect on the universal instability, even though shear stabilization at high temperatures has not been disproved theoretically. Probably the strongest argument is still the intuitive one that a deep potential energy well against interchange must prove beneficial.

III. STAGNATION-POINT SOLUTIONS

A. Periodic Multipole Structures

The basic consideration in designing a negative -V"- stable system is that along any given field line the favorable curvatures should outweigh the unfavorable curvatures. The weighting process is made specific, for example, in Eq. (3).

In our earliest multipole solution [7], there was no shear or rotational transform, and the weighting was accomplished simply by controlling the magnetic field strength on axis. Lenard [13] demonstrated that the introduction of suitable rotational transform could cause magnetic-field lines to "linger" in regions of favorable curvature, thus improving the characteristics of the confinement configuration.

We now proceed to carry this idea to its logical conclusion by actually creating stagnation points in regions of favorable mean curvature: the outermost flux surface of the confinement region is covered by a magnetic-field line that is almost always in the vicinity of the stagnation point. Beyond this surface (the separatrix), the magnetic field lines are open and could in practice lead the diffusing plasma to a pumping region, as in the divertor [14].

In the present discussion we will assume that the toroidal curvature is negligibly weak. We treat a linear periodic system of scalar magnetic potential [15]

$$x = z + \sum_{\ell} \left(\frac{2}{k} \right)^{\ell} g_{a\ell} \cos kz I_{\ell}(kr) \cos \ell(\theta + \omega t) + \sum_m g_{bm} \frac{r^m}{m} \sin m(\theta + \omega t) \quad (14)$$

The z-term gives a uniform B_z -field, which we will assume to be much stronger than the superimposed multipole fields, measured by the various constants g . We

assume that $(kr)^2 \gg (hr)^2 \ll 1$. The rapidly fluctuating "corrugating field" associated with the g_{al} -term (period $2\pi/k$) has no net effect on the gross shape of the magnetic flux surfaces (period $2\pi/h$). The gross "shaping field" is given by the g_{bn} -term, which on the other hand will be seen to make little contribution to V' . It is the corrugating field that controls V' , and causes a favorable contribution from the region near the stagnation point. From the smallness of hr it also follows that we can neglect h in the radial dependence of the g_{al} terms, and that we can restrict ourselves to the lowest power of r in each of the g_{bm} terms.

We begin with the simple case $g_{bm} = 0$ for $m \neq n$. The mean positions of the magnetic-field lines are given by $r \approx \bar{R}$ and $n(\theta + kz) \approx \psi$, where we have neglected the small rapid oscillation due to the g_{al} terms in Eq. (14). The flux integral is

$$\bar{R}^2 + \frac{2g_{bn}}{h} \bar{R}^n \cos \psi = R_1^2 + \frac{2g_{bn}}{h} R_1^n \quad (15)$$

The flux-surfaces are labeled by the constant R_1 (the position of maximum \bar{R} , which occurs at $\psi = 0$). We assume that g_{bn}/h is negative. Then there is a stagnation point ($d \cos \psi / dR = 0$) at $\psi = 0$ and

$$\bar{R} = R_s = \left(\frac{h}{-ng_{bn}} \right)^{1/n-2} \quad (16)$$

Let R_{s2} be the position of minimum \bar{R} (at $\psi = \pi$) for the flux-surface passing through R_s (the separatrix). The distortion of this surface is then measured by

$$\left(\frac{R_s}{R_{s2}} \right)^2 = Q^2 = \frac{1 + \frac{2}{n} Q^{2-n}}{1 - \frac{2}{n}} \quad (17)$$

For $n = 2$, the stagnation point lies at infinity; but for $n > 2$, Q is less than $(n+2/n-2)^{1/2}$, so that a large distortion is never required. For $n = 3$, we have $Q = 2$.

The quantity V' is evaluated most conveniently in terms of

$$\int dz/B_z = \int dx/B_x$$

Let z_T be the point at which our linear periodic field-configuration would be joined to the $z = 0$ point if we were to make a torus. Then one finds [11]

$$V' = \frac{z_T}{z_p} \int_0^{z_p} dz/B_z \quad (18)$$

The integral is taken along magnetic field over an interval z_p such that B_z passes through a complete period as seen along the magnetic field line. (As we approach the separatrix, z_p goes to infinity.)

Integrating out the rapid oscillation with respect to kz , we obtain

$$V' = \frac{z_T}{z_p} \int_0^{z_p} dx \left[1 + \frac{k^2}{2} \sum_{l,l'} \left(\frac{2}{k} \right)^{l+l'} g_{al} g_{al'} \left\{ (I_{l,l'}^+ + I_{l,l'}^-) \cos \frac{l}{n} \psi \cos \frac{l'}{n} \psi \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{ll'}{(k\bar{R})^2} I_{l,l'}^- \sin \frac{l}{n} \psi \sin \frac{l'}{n} \psi \right\} - hg_{bn} \bar{R}^n \cos \psi \right] \quad (19)$$

We can arrange to make the unfavorable g_{bn} -term small by using $k^2 \gg h^2$. Using Eq. (19), Eq. (15), and the equation

$$\frac{d\bar{\psi}}{dz} = h + ng_{bn} \bar{R}^{n-2} \cos \bar{\psi} \quad (20)$$

we have evaluated the potential V' analytically in limiting cases, and also numerically.

We see from Eq. (19) that the $\ell = \ell'$ terms will be positive (i.e., destabilizing) while favorable terms may arise from the interaction between the cross-terms $\ell \neq \ell'$, provided that $\bar{\psi}$ has an appropriate variation with z . This depends on the choice of g_{bn} , and requires $n = \ell - \ell'$.

We can derive an indication concerning a favorable choice of the ℓ 's from the behavior near the axis. The $\ell = \ell'$ contribution from the smallest ℓ ($\ell_<$) will dominate there unless either $\ell_< = 0$, in which case $I_0' = 0$; or $\ell_< = 1$, in which case I_1' is constant and does not affect V'' . In Ref. [7] (no rotational transform) we used $\ell_< = 0$, and then found that favorable V'' could be obtained only for an additional $\ell = 2$ or $\ell \geq 10$ component. With the present stagnation-point method, the choice of g_{al} 's is less restricted, and much smaller Q 's can be used as well.

The simplest shaping fields g_{bn} are given by $n = 2$ or 3 . The g_{b2} field by itself has no stagnation point (since $hR \ll 1$), but it may easily be modified by a small octupole component, measured by $v = -g_{b4}R_s^2/h = 1 + g_{b2}/h$. We will consider the following cases:

I $n = 3$; $\ell = 0, 3$

II $n = 2, 4$; $\ell = 0, 2$

III $n = 2, 4$; $\ell = 1, 3$

which are illustrated in the corresponding figures. The quantity $\Delta V'/V'(0) \equiv V'(R_s)/V'(0) - 1$ has been computed numerically from Eq. (19) as a function of $X_1 = R_1/R_s$. The small unfavorable contribution δ to $\Delta V'/V'(0)$, which arises from the g_b -term in Eq. (19), is also given. The parameter $\kappa = kR_s$ measures the "fatness" of the flux tube; and the parameter g_{b2} or g_{a3} has been chosen to minimize $V'(R_s)$. The value of $V'(R_s)$ in Figs. 1, 2 and 3 is indicated by the arrows at $X_1 = 1$. At this point V'' has a characteristic logarithmic singularity. The maximum distortion Q for $v = .1$ is 6.2, and for $v = .4$ is 2.8.

Figure 1 illustrates how the behavior near R_s can salvage a case that would have been unstable by the method of Ref. [7]. Figure 2 gives a case where negative V'' can be obtained everywhere out to R_s . Figure 3 makes use of the $\ell = 1$ and 3 combination discovered by Johnson [16], and obtains $V'' < 0$ for somewhat lower Q (larger v) than the case of Fig. 2.

Our initial assumption, that the multipole fields should be weak compared to the uniform field, say of order $\epsilon < 1$, means that $I_0 g_{a0} \sim \epsilon$ or $I_1 g_{al} \sim \epsilon$. (From this one can verify at once that if κ is of order unity the g_a -terms can have only a weak effect on the field-line position.) The "wells" in V' are of order ϵ^2/k^2 . The desired smallness of the δ -contribution is insured if we require $h^2/k^2 \ll \epsilon^2$.

Assuming, as we have, that the toroidal curvature is weak, we then find approximately for communication over the "long period" $2\pi/h$,

$$\frac{r_p R}{L^2} \approx \frac{Q^{\frac{1}{2}}}{2(Q-1)} \sim 1 \quad (21)$$

which is satisfactory. (For the "short period" $2\pi/k$, the situation is even less critical.) On flux surfaces approaching R_s , the favorable contribution to V''

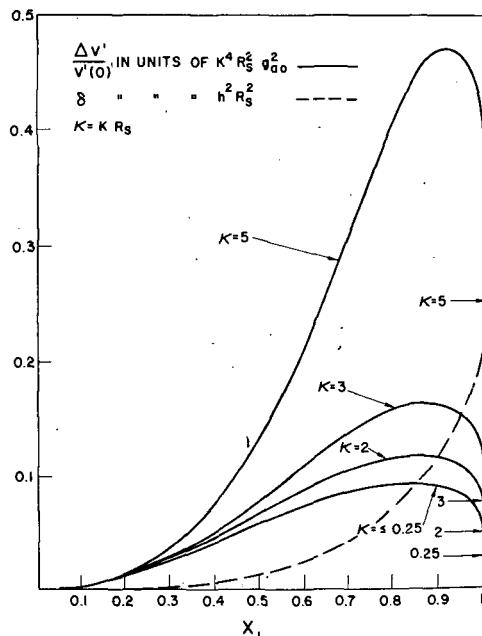


FIG. 1. Periodic multipole case, for g_{b3} flux surface with g_{a0} and g_{a3} corrugating field. Arrows at right give value of $\Delta V'/V'(0)$ at stagnation point, for various values of X_1 .

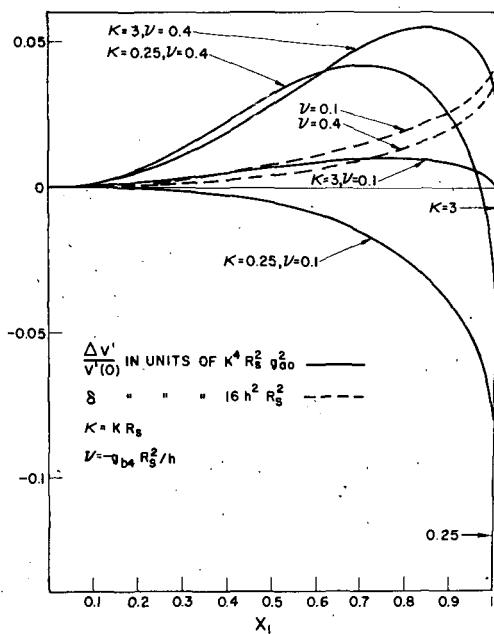


FIG. 2. Periodic multipole case, for g_{b2} and g_{b4} flux surface, with g_{a0} and g_{a2} corrugating field.

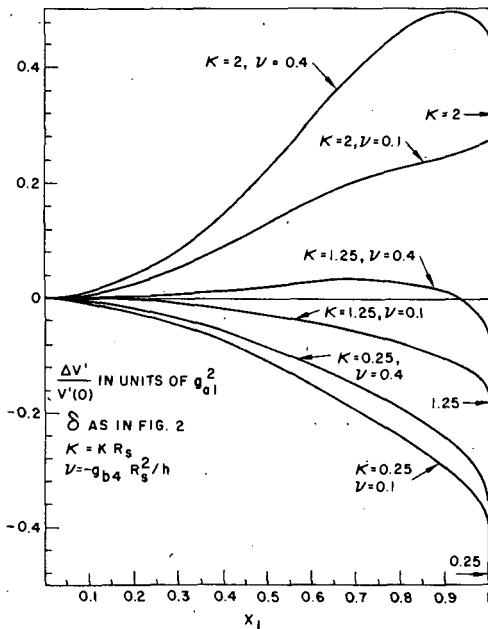


FIG. 3. Periodic multipole case, for g_{b2} and g_{b4} flux surface, with g_{a1} and g_{a3} corrugating field.

becomes infinite relative to the unfavorable contribution, which means, as may be seen from Eq. (4), that the limiting β will be determined by a mode completely localized in the unfavorable region. Thus $\beta \approx r_p R_c / L^2$ where the parameters refer to the unfavorable region.

B. Helical Flux Tube

In the preceding section, a rapidly oscillating "corrugating field" was used to create regions of favorable mean curvature. An alternative approach is simply to curve the magnetic flux tube as a whole; then the small-major-radius side of the flux tube has favorable curvature, and if we place the stagnation point there, a favorable net V' will result. This general type of stabilization was first discussed by Yoshikawa [17]. We apply it here to a helical flux tube wound about a rigid current-carrying conductor [11].

The magnetic scalar potential is

$$x = z - 2R_1 I_1(kr) \sin(\theta + kz) + Ak\theta \quad (22)$$

There is a uniform B_z -field on which is superimposed a helical $\ell = 1$ field and the field of the current $kA/2$ flowing on the rigid conductor at $r = 0$. The conductor is accessible for current-input and mechanical support, so that it need not "float." Correspondingly, the potential x is unique (see Section II). Again we neglect the toroidal curvature.

A useful property of the configuration is that the flux integral for the field defined by Eq. (22) can be obtained analytically without any approximations:

$$\frac{4R}{g} R_1 I_1(kR) \cos \phi = \frac{4R}{g} R_1 I_1(kR_1) + R^2 - R_1^2 + 2A \log \frac{R}{R_1} \quad (23)$$

The flux-surfaces are labeled by the constant R_1 . The helical magnetic axis lies at $\psi = \theta + kz = 0$, $R_1 = R_v$. The radius R_v is found from Eq. (23) at the particular nulls of

$$\Gamma(R_1) \equiv R_g \frac{d \cos \psi}{dR} \Big|_{R_1} \quad (24)$$

at which $d\Gamma/dR_1 > 0$. We now assume $R_g > 0$ and distinguish between two basic cases, depending on the sign of A.

(I) For A positive, but sufficiently small so that there are three nulls of Γ (instead of one), there can be a set of closed, nested flux-surfaces $R_s \leq R_1 \leq R_v$, which envelop the magnetic axis, but do not envelop the central conductor (see Fig. 4). The stagnation point $\psi = 0$, $R_1 = R_s$ is located at the smallest null of Γ , where $d\Gamma/dR_1 < 0$. The magnetic axis lies at the second null; and a second stagnation point R'_s lies at the third null (where $d\Gamma/dR_1 < 0$ again). The closed flux surface through R_s intersects the $\psi = 0$ line again at R_{s2} , (which is a second root of Eq. (23) for $\psi = 0$, $R_1 = R_s$).

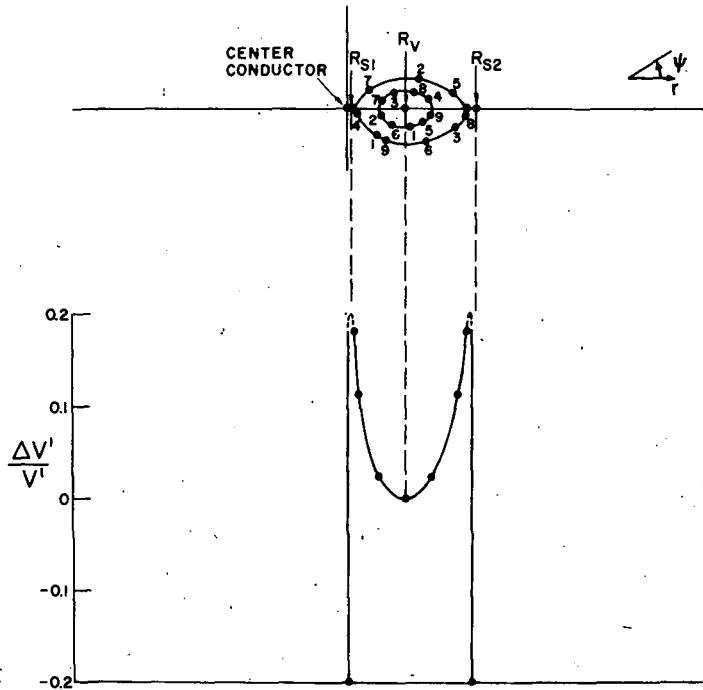


FIG. 4a. Typical flux surfaces for helical flux tubes with numbered consecutive fieldline intersections, going clockwise. The V' distribution is given. Case A > 0, with $k^2 A = 0.02$, $kR_g = 0.42$.

The quantity $\Delta V'/V'(R_v) \equiv V'(R_1)/V'(R_v) - 1$ is easy to evaluate when R_1 is a stagnation point, since it corresponds to the fractional difference in B_z between the points $\psi = 0$, $r = R_v$, and $\psi = 0$, $r = R_s$ or R'_s . For $\psi = 0$, dB_z/dr is negative. Hence we want the confinement region to be terminated by $R_s (< R_v)$ instead of by $R'_s (> R_v)$. For this purpose, we must require $R'_s > R_{s2}$.

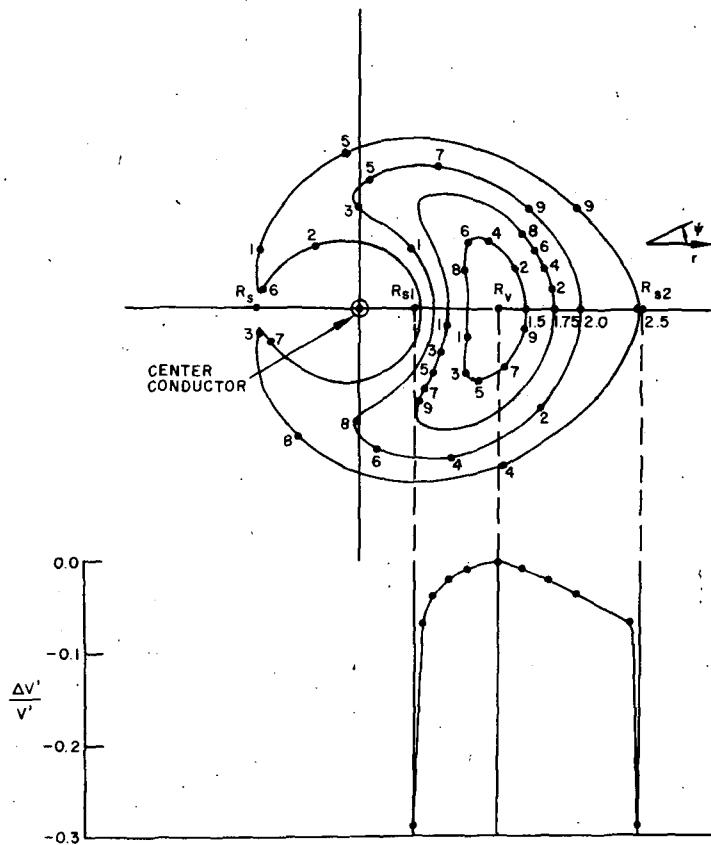


FIG. 4b. Typical flux surfaces for helical flux tubes with numbered consecutive fieldline intersections, going clockwise. The V' distribution is given. Case $A < 0$, with $k^2 A = -0.1$, $kR_g = 0.135$.

A simple limiting case is obtained for $kR_g \ll 1$, where we find

$$\Gamma(R_1) = \frac{A - R_1(R_g - R_1)}{R_1^2} \quad (25)$$

Then we have

$$R_s = \frac{R_g - (R_g^2 - 4A)^{1/2}}{2} \quad (26)$$

$$R_v = R_g - R_s \quad (27)$$

The extraneous stagnation point R_s' has receded to infinity. For small A (the deepest "well") we have

$$R_{s2} = 2R_g - R_s \quad (28)$$

and

$$\frac{\Delta V'(R_s)}{V'(R_v)} = - (kR_g)^2 \quad (29)$$

For finite kR_g , a maximum "well" ($-\Delta V'/V'(R_v)$) of .8 is found at $k^2 A \sim 0$, $kR_g = .4$, $kR_s \sim 0$, $kR_v = .5$, $kR_{s2} = 1.4$.

(II) For A negative, the magnetic axis still lies at $\psi = 0$, $R = R_v$, with R_v at the null of Γ at which $d\Gamma/dR_1 > 0$; and the extraneous stagnation point R'_s still lies at a second null, where $d\Gamma/dR_1 < 0$. The desired stagnation point R_s is now located at $\psi = \pi$. The outer flux surface of the containment region (separatrix) which is terminated by R_s at $\psi = \pm \pi$ (see Fig. 4) passes through the $\psi = 0$ line at R_{s1} ($< R_v$) and R_{s2} ($> R_v$). Equation (17) provides the relationship between R_s , R_{s1} , and R_{s2} . The stagnation point R_s is located at the null of $\Gamma(R_s)$. (Here $R_1 = R_{s1}$ is to be used in evaluating $d\cos\psi/dR$ from Eq. (23).) Since E_z is always smaller for $\psi = \pi$ than for $\psi = 0$, the quantity $\Delta V'(R_s)/V'(R_v)$ is always negative. We still require $R_{s2} < R_s$. Access to the center conductor can still be maintained in practice through a narrow region about $\psi = 0$, since the confined plasma need not extend everywhere to the separatrix.

In the limit $kR_g \ll 1$, we find

$$\Gamma(R_s) = \frac{R_s(R_s + R_g)}{R_s^2} + A \quad (30)$$

$$R_s = \frac{(R_g^2 - 4A)^{1/2} - R_g}{2} \quad (31)$$

$$R_v = R_g + R_s \quad (32)$$

$$\frac{\Delta V'(R_s)}{V'(R_v)} = -k^2 R_g (R_v + R_s) \quad (33)$$

and R'_s has receded to infinity.

For finite kR_g , a maximum "well" of .3 is found at $k^2 A = 1$, $kR_g = .14$, $kR_s = 0.9$, $kR_v = 1.2$, $kR_{s2} = 2.6$. By introducing higher multipole components of the field the well-depth can be increased to about 0.6.

For either type of helix, we have

$$\frac{r_p R_c}{L^2} \sim 1 \quad (34)$$

independent of kR_g . Case II ($A < 0$) seems more practical than Case I ($A > 0$), since in the latter case the favorable V'' property is weaker and is encountered only near the separatrix.

The method of computation for Fig. 4 is the same as that employed in Section IIIC, and is discussed there in detail.

C. Toroidal Flux Tube

The simple toroidal stellarator with helical multipole windings can by itself have negative V'' . Let ρ be the radius measured from the major axis of the torus. Let ϕ be the angle about this axis and η the coordinate along it. We will treat a configuration of large major radius R_T , with scalar potential

$$x = z + \frac{g}{\ell} r^\ell \sin(\ell\theta + kz) - \frac{g(\ell+1)}{4\ell R_T} r^\ell \sin[(\ell-1)\theta + kz] \quad (35)$$

where $\phi = z/R_T$, $\rho = R_T + r\cos\theta$, and $\eta = r\sin\theta$. We discuss the case $gr^{\ell-1} \ll 1$, $kr \ll 1$, $r/R_T \ll 1$. The second term on the right arises from the toroidal-geometry corrections in Laplace's equation.

Solving for the field-lines, one finds an average θ -dependence on z

$$\bar{\theta} = - \frac{(\ell-1)g^2 R^{2\ell-4}}{k} z \quad (36)$$

which provides rotational transform when $\ell > 1$, and shear-stabilization when $\ell > 2$. [14] The mean radial position is $r = \bar{R}$, and the oscillation about \bar{R} is measured by

$$\left(\frac{R_{\max}}{R_{\min}} \right)^2 \equiv Q^2 = \frac{1 + \frac{2g_{bl}}{k} R_{\min}^{\ell-2}}{1 - \frac{2g_{bl}}{k} R_{\max}^{\ell-2}} \approx 1 + \frac{4g_{bl}}{k} \bar{R}^{\ell-2} \quad (37)$$

when g is small. For $\Delta V'/V'(0) \equiv V'(\bar{R})/V'(0)-1$ we find when $\ell > 1$

$$\frac{\Delta V'}{V'(0)} = g^2 \bar{R}^{2\ell-2} - \frac{6\ell-1}{2(\ell-1)} \frac{\bar{R}^2}{R_T^2} \quad (38)$$

Thus V'' will be negative if the second term on the right predominates.

The difficulty with this simple solution is that L (the communication distance over $\Delta\theta = \pi$) tends to be very large. From Eq. (36) we see that

$$L = \frac{k\pi}{(\ell-1)g^2 R^{2\ell-4}} \quad (39)$$

the quantity $gR^{\ell-1}$ is limited both by the requirement that V'' be negative (Eq. 38) and by the condition that Q should not be excessive. For the case $\ell = 2$, we have actually $Q \rightarrow \infty$ as $2g/k \rightarrow 1$. The two requirements on g are about equally stringent when $m = kR_T \approx 5$, the most favorable case. Even here we find, using the maximum allowable g

$$\frac{r R_c}{L^2} < .11 \frac{\bar{R}}{R_T} \ll 1 \quad (40)$$

The difficulty can be resolved by using an additional field to alter Eq. (38); then $V'' < 0$ can be satisfied without necessarily requiring a large L . Taylor [18] has treated the $\ell = 3$ case with an additional uniform field along the major axis of the torus. We will discuss here the $\ell = 2$ case, with an additional poloidal field designed to induce a stagnation point on the small-major-radius side of the confinement flux-tube.

We use here a "realistic" method of computation where the differential equation for a single field line is solved, and the line is then followed N times around the torus until it traces out a flux surface (see Fig. 5). This method automatically demonstrates the existence of the flux surface and gives a precise measure of rotational transform and shear. To obtain V'' we use

$$V' = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int dt/B \quad (41)$$

Figure 6 shows how this calculation of V' typically converges as a function of N .

The basic magnetic-field configuration consists of $B_\phi = 10/\rho$ plus the field of four helical wires on a toroidal surface of minor radius R_a and major radius R_T , which will be taken as 1 and 10 in our illustrations. Thus $B_\phi \approx 1$. (An example with such large R_T/R_a is not nearly optimal from the point of view of either V' or L , but is appropriate for direct verification of the weak-torus predictions of Eqs. (36) - (40).) The pitch of the wires is characterized by $m = kR_T$. They carry currents $\pm I_h$ which can be related approximately to Eq. (35) by $g \approx 6 I_h$.

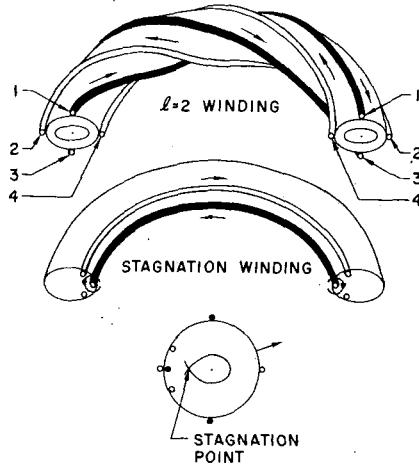
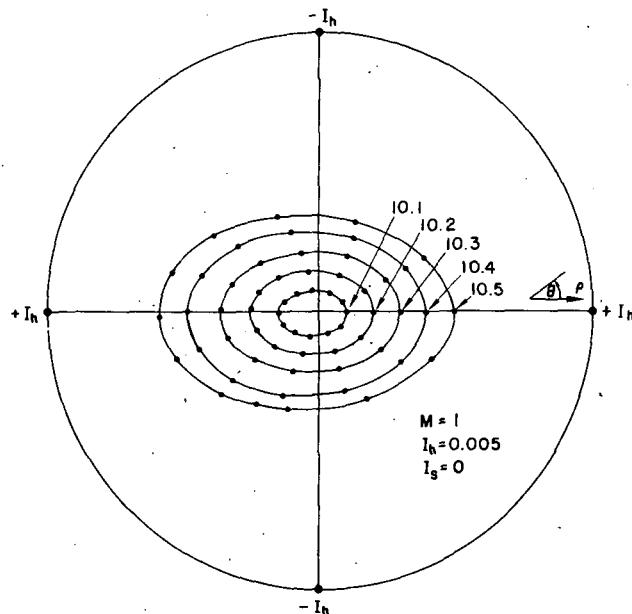


FIG. 5a. Toroidal windings.

FIG. 5b. Flux surfaces and consecutive field-line intersections, going counterclockwise, with $\phi = 0$ plane, for toroidal flux-tube case 1, with $m = 1$ and without stagnation field.

On the R_a -surface there are also three toroidal wires (see Fig. 7) separated by a variable angle θ_s which is taken as $\pi/6$ in our illustrations, carrying currents I_s , $-2I_s$, and I_s respectively. The associated poloidal field induces the stagnation point. The magnetic field due to the helical and stagnation wires is calculated by means of the Biot-Savart Law. A FORTRAN program is used, and the field-line positions are graphed directly by the computer.

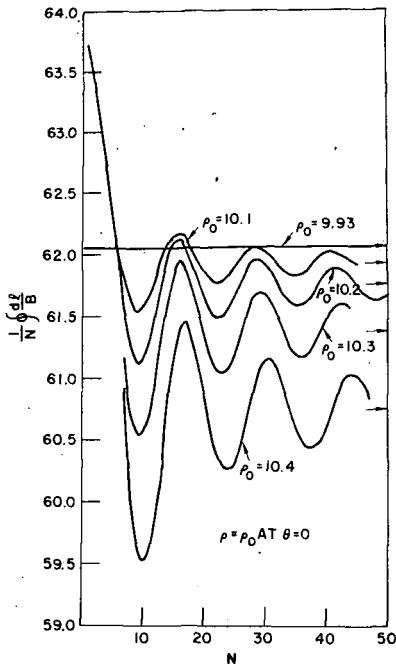


FIG. 6. $(1/N) \int dl/B$ as a function of the number N of field-line transits around the major circumference, for toroidal flux tube case 2. Arrows at right indicate limits as $N \rightarrow \infty$.

Figure 5 corresponds to $m = 1$, $I_h = 0.005$, $I_s = 0$. We show the intersections of five flux surfaces with the $\phi = 0$ plane (characterized by the position of the helical wires). On each flux surface, the successive intersections of a field line are shown on its first transit around the minor circumference. The intersections start at $\theta = 0$ and move counter-clockwise.

Figure 7 shows the effect of adding $I_s = 0.0005$. The desired stagnation point is induced. The slowing down of the rotational transform is conspicuous, particularly near the stagnation point. Slightly beyond the outermost surface shown in Fig. 7 the field lines go to the wall. A second intersection of the flux surfaces, with the $\phi = \pi/2$ plane (characterized by a $\pi/2$ rotation of the helical wires relative to Fig. 7), is shown in Fig. 8.

Figure 9, case 1, corresponds to Fig. 5 and confirms the favorable V' indicated by Eq. (38). (In Fig. 9 the magnetic axes lie at slightly different major radii a for different cases, and V' has not been normalized.) Case 2 corresponds to Fig. 7 and illustrates how the stagnation winding increases the favorable effect. A reverse I_s of the same strength approximately cancels the favorable effect, giving $V' \approx 0$.

For both cases 1 and 2 we require about 6 circuits around the major circumference to link the regions of favorable and unfavorable curvature. Thus we have only $r_p R_c / L^2 \sim 2 \cdot 10^{-2}$. This situation can be improved by increasing the rotational transform (Eq. 36) even if we hold constant the Q (Eq. 37).

In Fig. 10, we show the flux surfaces for case 3, corresponding to $m = 5$, $I_h = 0.025$. The distance L is now five times shorter, so that $r_p R_c / L^2 \sim 5 \cdot 10^{-4}$. On the other hand, as predicted in Eq. (38), the favorable V' property is now nearly canceled by the g^2 term. Using the stagnation winding with $I_s = 0.0025$, we obtain Fig. 11 and case 4 in Fig. 9. The stagnation-point method restores the favorable V' , as expected.

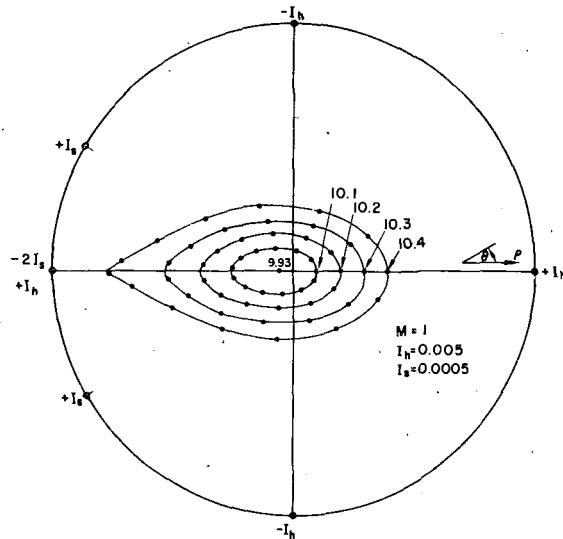
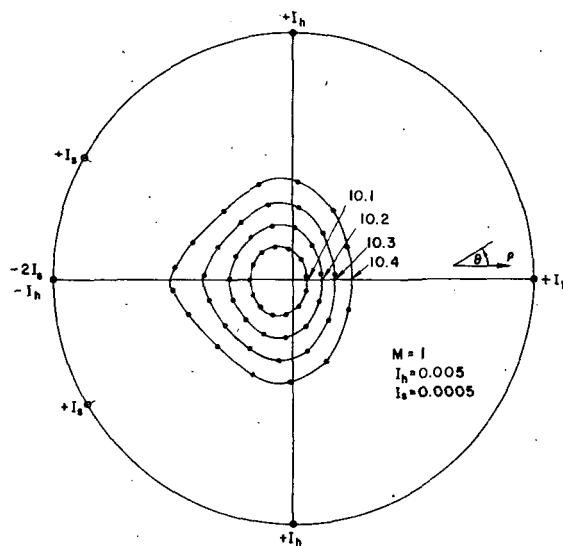
FIG. 7. Flux surfaces in $\phi = 0$ plane for case 2, with $m = 1$ and stagnation field.FIG. 8. Flux surfaces in $\phi = \pi/2$ plane for case 2, with $m = 1$ and stagnation field.

Figure 12 (case 5, in Fig. 9) shows how a further increase in I_s reduces the confinement region. Changing the angle θ_s controls the degree of localization of the favorable "V" property near the separatrix. Case 6 in Fig. 9 is obtained for $\theta_s = \pi/4$, $m = 5$, $I_h = .025$, $I_s = 0.0025$.

By reducing the aspect ratio $R_p:R_a$ from its present 10:1, and further increasing the rotational transform, both deeper wells and larger $r_p R_c / l^2$ can evidently be obtained. The relevant computations are in process.

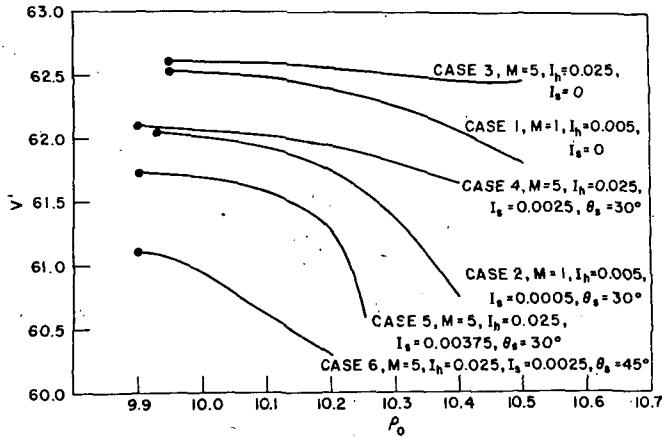


FIG. 9. V' as a function of ρ for various toroidal flux-tube cases. See text.

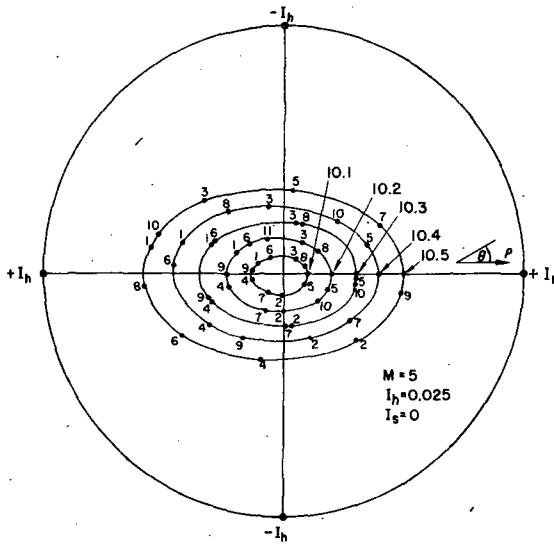
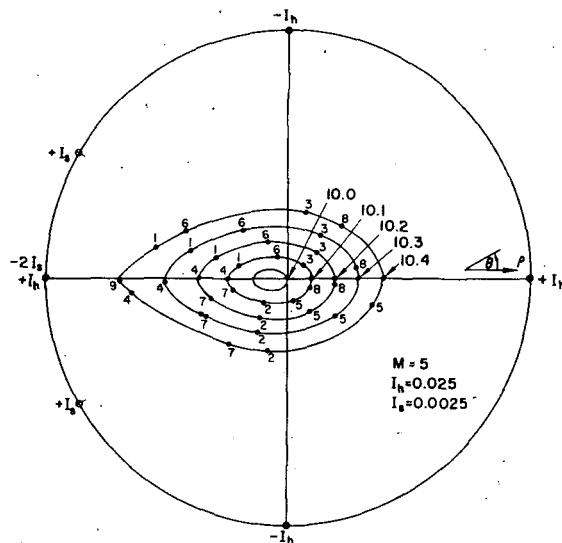
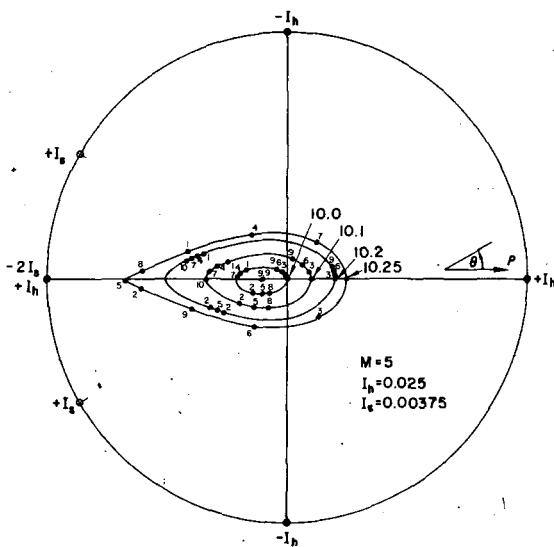


FIG. 10. Flux surfaces in $\phi = 0$ plane for case 3, with $m = 5$ and without stagnation field. Consecutive field-line intersections are numbered.

An experimental study of this type of configuration can be made conveniently on the Leviton [2], as converted [17] for negative- V'' stability, by means of a stagnation winding (see Eq. 3C). Somewhat stronger stabilization can, of course, be achieved by multiple floating rings (Eq. 3A), which is historically the first approach [19,20], to minimum-average- B stabilization.

ACKNOWLEDGMENTS

We would like to thank R. D. Kinman of Livermore Computation Division, and Wendell Horton of UCSD for their work on the numerical calculations.

FIG. 11. Flux surface in $\Phi = 0$ plane for case 4 with $m=5$ and stagnation field.FIG. 12. Flux surfaces in $\Phi = 0$ plane for case 5, with $m=5$ and strong stagnation field.

REFERENCES

- [1] ROSENBLUTH, M. N., and POST, R. F., "Loss Cone Instabilities" - paper rejected for this Conference.

- [2] BIRDSALL, D. H., et al., 2nd Conf. Plasma Phys. and Nuclear Fusion, Paper CN-21/90, Culham (1965).
- [3] FURTH, H. P., KILLEEN, J., and ROSENBLUTH, M. N., Phys. Fluids 6, 459 (1963).
- [4] COPPI, B., et al., 2nd Conf. Plasma Phys. and Nuclear Fusion, Paper CN-21/105, Culham (1965). We will refer to this as II.
- [5] GALEEV, A. A., MOISEEV, S. S., and SAGDEEV, R. Z., Journal of Nucl. Energy C, 6, 645 (1964).
- [6] HARTMAN, C. W., 7th Int. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Belgrad, Yugoslavia (1965).
- [7] FURTH, H. P., and ROSENBLUTH, M. N., Phys. Fluids 7, 764 (1964).
- [8] FOWLER, T., and GUEST, G., 2nd Conf. on Plasma Phys. and Nuclear Fusion, Paper CN-21/99, Culham (1965).
- [9] KRALL, N. A. and ROSENBLUTH, M. N., Phys. Fluids 8, 1004 (1965).
- [10] BERNSTEIN, I., FRIEMAN, E. A., KRUSKAL, M. D., and KULSRUD, R., Proc. Roy. Soc. A 244, 17 (1958).
- [11] FURTH, H. P., International Centre for Theoretical Physics, Seminar on Plasma Physics, Trieste (1964).
- [12] KULSRUD, R., (private communication).
- [13] LENARD, A., Phys. Fluids 7, 1875 (1964).
- [14] SPITZER, JR., L., 2nd U. N. Conf. Peaceful Uses 32, 181 (1958).
- [15] GREENE, J. M., and JOHNSON, J. L., Phys. Fluids 4, 875 (1961).
- [16] JOHNSON, J., Phys. Fluids 7, 2015 (1964). Cases II and III without stagnation points are considered here.
- [17] YOSHIKAWA, S., (private communication).
- [18] TAYLOR, J. B., Phys. Fluids 8, 1203 (1965).
- [19] TUCK, J. L., Nature 187, 863 (1960).
- [20] OHKAWA, T., and KERST, D. W., Phys. Rev. Letters 7, 41 (1961).

This work was supported in part under a joint General Atomic-Texas Atomic Energy Research Foundation program on controlled thermonuclear reactions, and in part by the United States Atomic Energy Commission at the University of California.

DISCUSSION

A. A. WARE: Are you sure that your model for analysing a negative-V" system is correct? You have taken an average field curvature, which is stabilizing, with a superimposed periodic curvature. In fact, in most negative V" systems with closed lines of force, if the curvature were averaged along a field line without any weighting, it would be found to be destabilizing. Stability occurs at $\beta = 0$ only because the curvature is weighted

with ξ_n^2 , where ξ_n is the component of $\vec{\xi}$ that is parallel to $\vec{\nabla} p$. ξ_n has to be proportional to the spacing between adjacent magnetic surfaces, which is larger in the regions of stable curvature.

Dr. F. Haas and myself have found, for a simple toroidal negative-V'' system, that the most unstable mode with β finite has approximately equal amplitudes in the stable and unstable regions, so that the average curvature driving the instability is then destabilizing. This is contrary to the usual picture put forward, that the ballooning mode will be concentrated in the unstable regions.

M.N. ROSENBLUTH: In solving these problems we did solve the correct eigenvalue problem, so presumably the amplitude adjusts itself. I think you are right in saying that in many cases of interest the displacements are not very different in the two regions.

H. GRAD: The reason why the precise stability criteria at finite β seem to be more stable than expected is probably because the expectation is based on the inaccurate low- β criterion that there be a magnetic well, $\delta p \delta U > 0$ (also quoted by Kulsrud¹). The more accurate low- β scalar formula for interchange stability has been given by Kadomtsev², and for a mirror machine by myself.³ A crude justification for the more exact formula has even been advanced by Rosenbluth and Longmire.⁴

¹ These proceedings (CN-21/113).

² Plasma physics and the problem of thermonuclear reactions, LEONTOVICH, M. A., Ed., 4, Pergamon Press (1960).

³ Physics of Fluids 7 (1964) 1283.

⁴ Ann. Phys., 1 (1957) 120.

STABILITY OF NEGATIVE V" SYSTEMS

R. M. KULSRUD
PRINCETON UNIVERSITY,
PRINCETON, N.J., UNITED STATES OF AMERICA

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

STABILITY OF NEGATIVE-V" SYSTEMS. Negative-V" systems are more intrinsically stable than shear-stabilized systems in that they are completely stable to the pure interchange instability. However, they are unstable to a ballooning mode instability which is essentially a tied interchange localized to a part of a line of force which has adverse curvature. For infinite conductivity this mode leads to a critical value β_c of β , the ratio of plasma to magnetic pressures, below which it is stable. This critical value is given by an approximate expression that involves: the relative variation $\nabla U/U$ of $U = \int d\ell/B$, where the integration is over the length L of the region of adverse curvature; and L . The variation is that from the axis to the boundary of the plasma at radius a . In its simplest form this formula is $\beta_c = g(U/\Delta U)(\pi^2 a^2 / L^2)$, where g is a constant of order one. This formula has been justified by a correct stability analysis for the negative-V" systems of Johnson.

If the resistance of the plasma is nonzero, then the tying of the interchange by the regions of favorable curvature is relaxed and the ballooning mode becomes a resistive-ballooning mode. This mode is always unstable and for $\beta < \beta_c$ its growth rate is approximately $\sigma_R = m^2 / \beta_c \tau_{\text{class}}$ where m is the azimuthal mode number and τ_{class} is the classical diffusion time. If the negative-V" systems also have a sheared magnetic field, then σ_R is reduced for large m . Also, it is expected that σ_R is limited by finite gyration radius effects for large m . On the basis of these considerations it is speculated that the maximum effective value of m is about 10. Thus, β_c becomes a figure of merit for the resistive-ballooning mode and must be comparable with one for a successful confinement system. Hence large $\Delta U/U$ or large L are unfavorable to stable confinement.

STABILITE DANS LES DISPOSITIFS A V" NEGATIF. Les dispositifs à V" négatif ont une stabilité intrinsèque plus grande que les dispositifs stabilisés par croisement de lignes de champ, car ils ne sont pas sujets à l'instabilité d'interchange pure. Toutefois, ils peuvent présenter une instabilité en mode de ballonnement qui est essentiellement un interchange limité qui est localisé sur une partie de ligne de force ayant une courbure défavorable. Lorsque la conductivité est infinie, ce mode fournit une valeur critique β_c de β qui est le rapport de la pression de plasma à la pression magnétique, en dessous de laquelle le plasma est stable. Une expression approchée qui comporte la variation relative $\Delta U/U$ de $U = \int d\ell/B$, où l'intégration est faite sur la longueur L de la région de courbure opposée, et cette longueur L elle-même fournissent cette valeur de β_c . La variation est calculée depuis l'axe du plasma jusqu'à la limite pour un rayon a . Sous sa forme la plus simple, β_c s'exprime par la formule $g(U/\Delta U)(\pi^2 a^2 / L^2)$, où g est une constante de l'ordre de l'unité. Une analyse correcte de la stabilité pour les dispositifs à V" négatif de Johnson a permis de justifier cette relation.

Lorsque la résistance du plasma n'est pas nulle, la tendance à une limitation de l'interchange par les régions de courbure favorable est atténuée et le mode de ballonnement devient résistif. Ce mode est toujours instable et, pour $\beta < \beta_c$, son taux de croissance est de $\sigma_R = m^2 / \beta_c \tau_{\text{class}}$, où m est le nombre de mode azimuthal et τ_{class} est le temps de diffusion classique. Lorsque les dispositifs à V" négatif possèdent également un champ magnétique à lignes croisées, la valeur de σ_R diminue pour des valeurs élevées de m . Les effets causés par le rayon de giration fini pour des valeurs élevées de m limitent probablement celle de σ_R . En se fondant sur ces considérations, l'auteur estime que la valeur effective maximum de m est environ de 10. Par conséquent, β_c fournit une valeur caractéristique du mode de ballonnement résistif et doit être de l'ordre de grandeur de l'unité pour un bon dispositif de confinement. Par conséquent, des valeurs élevées de $\Delta U/U$ ou de L ne favorisent pas un confinement stable.

УСТОЙЧИВОСТЬ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ V". Отрицательным системам V" присуща большая устойчивость, чем широко-стабилизированным системам, в которых они абсолютно устойчивы к чистой обменной неустойчивости. Однако они неустойчивы к баллонному моду неустойчивости, который по существу является перестановкой локализованной в части силовой линии, имеющей неблагоприятное искривление. Для бесконечной электропроводности этот

мод ведет к критической величине $\beta = \beta_c$ – отношению давления плазмы к давлению магнитного поля, ниже которой она устойчива. Эта величина β_c определяется приближенным выражением, которое включает в себя относительное приращение $\nabla U/U$ от $U = \int dl/B$, где интегрирование ведется вдоль длины L области неблагоприятного искривления, и L . Приращение берется от оси до границы плазмы радиуса a . В самой простой форме эта формула выглядит как $\beta_c = g(U/\Delta U)(\pi^2 a^2/L^2)$, где g – константа порядка единицы. Эта формула подтверждена точным анализом устойчивости систем с отрицательным V'' Джонсона.

Если сопротивление плазмы не равно нулю, ослабляется связь перестановок с областями благоприятного искривления, и баллонный мод становятся баллонным модом с сопротивлением. Этот мод всегда неустойчив и для $\beta < \beta_c$ скорость его роста примерно равна $\sigma_R = m^2/\beta_c \tau_{\text{класс}}$, где m – азимутальное число и $\tau_{\text{класс}}$ – время классической диффузии. Если системы с отрицательным V'' имеют также "широкое" магнитное поле, величина σ_R уменьшается для большого m . Следует ожидать также, что σ_R для большого m ограничено влиянием конечного радиуса гирации. На основе этих заключений предполагается, что максимально эффективная величина m составляет около 10. Таким образом, β_c становится мерилом качества для баллонного мода с сопротивлением и должно быть сравнимо со значением, необходимым для успешно удерживающих систем. Следовательно, большие величины $\Delta U/U$ или большое L неблагоприятны для устойчивого удерживания.

ESTABILIDAD EN LOS DISPOSITIVOS CON V'' NEGATIVA: Los dispositivos de V'' negativa poseen una estabilidad intrínseca más grande que los sistemas estabilizados por cizallamiento, pues son totalmente insensibles a la inestabilidad producida por el intercambio puro. Con todo, son susceptibles a un tipo de inestabilidad por «inflación», que consiste esencialmente en un intercambio restringido que se localiza en una parte de una línea de fuerza con curvatura desfavorable. Cuando la conductividad es infinita, este modo conduce a un valor crítico β_c de β (relación entre la presión del plasma y la presión magnética); por debajo del cual, el plasma es estable. Este valor de β_c se da en la memoria mediante una expresión aproximada donde intervienen L y la variación relativa $\Delta U/U$ de $U = \int dl/B$, extendiéndose la integración a toda la longitud L de la región de curvatura desfavorable. La variación se calcula desde el eje hasta la capa límite del plasma, de radio a . En su forma más simple, esta fórmula se convierte en $\beta_c = g(U/\Delta U)(\pi^2 a^2/L^2)$, siendo g una constante de orden unitario. Esta fórmula se ha justificado mediante el análisis correcto de la estabilidad, aplicado a los dispositivos de V'' negativa de Johnson.

Si la resistencia del plasma no es nula, la tendencia a una limitación del intercambio por las regiones de curvatura favorable se atenúa y el modo de inflación se convierte en resistivo. Este modo es siempre inestable y, para $\beta < \beta_c$, su índice de crecimiento es aproximadamente $\sigma_R = m^2/\beta_c \tau_{\text{class}}$, donde m es el número de modo azimutal y τ_{class} es el tiempo de difusión clásica. Si los dispositivos de V'' negativa poseen igualmente un campo magnético cizallado, el valor de σ_R disminuye para valores grandes de m . Asimismo, se supone que para valores elevados de m σ_R está limitada por los efectos del radio de giro finito. Sobre la base de estas consideraciones, el autor estima que el valor efectivo máximo de m es aproximadamente 10. Así, β_c se convierte en un valor característico para el modo de inflación resistiva y debe ser de orden unitario para un sistema de confinamiento eficaz. Por consiguiente, los valores elevados de $\Delta U/U$ o de L no favorecen el confinamiento estable.

A. INTRODUCTION

Magnetic devices for confining hot plasma are almost all unstable to some extent to the interchange instability. This is an instability which effectively interchanges two magnetic tubes of force of equal flux as well as the plasma contained in them. If such an interchange can be carried out, it will be unstable if, and only if, the volume containing lower pressure plasma is larger [1]. Since for a sufficiently small β plasma, where β is the ratio of plasma pressure to magnetic pressure, the magnetic field energy is essentially unperturbed, this gives a necessary and sufficient stability condition at low β for the interchange instability on the basis of zero-resistivity equations. For a closed device such as a torus, the volume per flux is given by

$$U = \int dl/B \quad (1)$$

where the integral is taken along a magnetic line of force. (If the line closes on itself, the integration path is simply the closed line of force. If the line doesn't close on itself but instead ergodically covers a magnetic surface, one should replace the line integral by the limit $(l/n) \int dl/B$ taken over a length of the line n times around the torus as n goes to infinity. This limit is $dV/d\psi$ where V is the volume and ψ the flux inside a magnetic surface. Since only relative variations of U are important, these definitions are not critical.) In terms of U the criterion for stability against the interchange is simply

$$\delta U \delta p > 0 . \quad (2)$$

For nonclosed lines the criterion is $(dp/d\psi) d^2V/d\psi^2 = p' V'' > 0$.

Since most simple confinement schemes fail to satisfy criterion (2), the method employed up till recently to obtain stability against the interchange was to prevent it from occurring by shearing the lines of force. Thus a pure interchange could not occur without perturbing the lines of force, which leads to a stabilizing action. It was shown that in the stellarator one could achieve sizable β 's which were stable if one assumed that the plasma was described sufficiently well by equations assuming zero resistivity [2]. This was felt to be a satisfactory assumption because the resistive time scale was of the order of the classical diffusion time scale,

$$\tau_{\text{class}} = 4\pi a^2/\beta\eta \quad (3)$$

where a is the radius of the plasma, and η the resistivity, and it was felt that instabilities on such a slow time scale would be unimportant. However, it was shown by Furth, Killeen, and Rosenbluth [3] that such an expectation was unjustified and that the interchange could take place on such a small length scale that resistance would be important on seriously short time scales. Thus, the results of Ref. [2] were thrown in doubt and one could not be sure that sheared magnetic fields would give a sufficient stability.

However, shortly afterward it was shown by Furth and Rosenbluth [4] that one could find closed systems for which criterion (2) for stability against the interchange was satisfied, and thus the other line of attack against it could be pursued. Still, the first systems of Rosenbluth and Furth were rather complicated and therefore it was of interest that Lenard [5] and Johnson [6] were able to achieve a significant simplification by considering systems with nonclosed lines of force. These systems are referred to as negative V'' systems. (It should be mentioned that so far these systems are not closed in any physical sense, but are all straight systems with the closure obtained mathematically by identifying the two ends mathematically as in Ref. [2].) Building on these systems Furth and Rosenbluth [7] were able to find systems of greater simplicity while the simplest of all so far was achieved by Taylor [8] and independently by Yoshikawa [9]. The last system is actually a torus and is physically closed.

The closed systems are stable if U is a maximum on the line of maximum pressure, the magnetic axis. If U is regarded as a harmonic average of B , i.e., $U = L/B$, then the latter statement is equivalent to B being minimum on the magnetic axis. This condition is analogous to the condition for an open ended system such as a mirror machine of the Ioffe type, namely, that B be a minimum at the center of the machine [10]. It is the

very encouraging experimental results on long confinement in such systems that have stirred such great interest in the corresponding closed systems although no successful test in a toroidal system has yet been carried out. However, in toroidal systems it is only the averaged B , \bar{B} , which is a minimum while B may be locally a maximum or a minimum, when the comparison is made between the magnetic axis and a neighboring line. It is clear on general grounds that the average can only represent the stability situation if β is small enough, since larger plasma pressure can distort the lines so that the interchange can be larger in the region where B is a local maximum making the interchange unstable. Such a mode is known as the "ballooning mode". One obtains a critical β for stability similar to Walen's criterion [11]. It turns out that the system of Taylor and Yoshikawa on this basis is only stable for rather low β since it consists of regions of rather pronounced maximum and minimum B rather far apart which enhances the decoupling of the various parts of the lines of force and weakens the averaging effect.

The averaging effect is also reduced by finite resistivity giving rise to the so-called "resistive ballooning mode" which occurs at values of β below the critical value for the ballooning mode. For this mode the displacement of the plasma is essentially the same as in the ordinary ballooning mode but the displacement of the magnetic lines of force is smaller by β/β_c so that the forces remain in balance. Since the magnetic field lines must diffuse through the plasma, the time of this diffusion gives the growth rate of the instability σ_R , namely, $\sigma_R = m^2/\beta_c \tau_{\text{class}}$ where m is the angular mode number, i.e., the perturbation varies as $\exp im\theta$. However, since the resistive ballooning mode grows rather slowly it may be possible for the time τ which it takes the plasma to move from the adverse regions of maximum B to the favorable regions of minimum B to be small compared to $1/\sigma_R$ thus restoring the averaged criteria in Eq. (2). In fact, it is found that if $\sigma_R \tau \ll 1$, the resistive ballooning mode disappears, while the above result is valid when $\sigma_R \tau \gg 1$.*

It is the purpose of this paper to analyze the systems of Johnson [6] and Lenard [5] for stability against the interchange instability and show that the above remarks are valid when applied to these systems. It will be seen that the results derived for these specific systems have a more general applicability. In section B the normal mode equations are derived for the interchange in this system including resistivity. In section C these equations are analyzed in the limit of large m . These results are applied to three cases: (a) zero resistivity for which a critical β , β_c is given, (b) finite resistivity with $\beta < \beta_c$ and flow along lines is neglected, $\sigma_R \tau \gg 1$, and (c) finite resistivity with $\beta < \beta_c$ and flow along the lines is taken as infinitely fast. In each case an ordinary eigenvalue differential equation is derived; for case (a) the eigenvalue is β_c , for case (b) it is σ_R , while for case (c) no eigenvalue exists. In section D these eigenvalues are estimated approximately by a Raleigh-Ritz technique and the different results are compared.

* See Note added in proof.

B. THE NORMAL MODE EQUATIONS

The Johnson negative V" system can be expressed as a uniform magnetic field \underline{B}_o plus a small vacuum field

$$\underline{B} = \underline{B}_o + B_o \nabla \phi \quad (4)$$

where \underline{B}_o is in the z direction and, for instance,

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{\epsilon_1}{h+\gamma} I_1 [(h+\gamma)r] \sin(u - hz) + \frac{\epsilon_3}{h+3\gamma} I_3 [(h+3\gamma)r] \sin(3u - hz) \\ & + \delta_2 \gamma r^2 \sin 2u, \quad u = \theta - \gamma z \end{aligned} \quad (5)$$

where ϵ_1 and ϵ_3 are small first order quantities and γ is a second order quantity. The first two fields have a finite period $2\pi/h$ in z plus a slow secular twist at rate γ , while the second field has a quadrupole nature with the same rate of twist γ . The ϵ_1 and ϵ_3 terms represent the stabilizing field while the last term essentially determines the magnetic surfaces. These latter are given for small hr to lowest order by

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{\gamma r^2}{2} (1 - 2\Delta \cos 2u) \\ \Delta &= \frac{\delta_2 + h\epsilon_1 \epsilon_3 / 32\gamma}{1 - h\epsilon_1^2 / 8\gamma} \end{aligned} \quad (6)$$

while the minimum \bar{B} character is indicated by the formula

$$\frac{\delta U}{U} = \frac{h^2 a^2}{8(1 - 4\Delta)^{2/1/2}} \left(2\epsilon_1^2 + \Delta \epsilon_1 \epsilon_3 + \frac{32\gamma^2 \delta_2^2}{h^2} \right), \quad (7)$$

also valid for small hr, where $\delta U = U(a) - U(o)$, and a is the circularized radius of the surfaces of Eq. (6). The surfaces of Eq. (6) are ellipses with ratio of major to minor axis of $[(1 + 2\Delta)/(1 - 2\Delta)]^{1/2}$ where by Eq. (6), Δ is of finite order. The motion of a line of force in the r, u plane is given by

$$\frac{dr}{dz} = + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial u}, \quad \frac{du}{dz} = - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad (8)$$

as shown in Appendix I.

It is clear from Eq. (7) that ϵ_1 and ϵ_3 can be chosen to make δU negative and since $p = p(\Psi)$ is monotonically decreasing in Ψ , criterion (2) can be satisfied. The system is to be identified over a length equal to an integral multiple of $2\pi/\gamma$. The expression given in Eq. (5) for ϕ is only one of a possible number of such systems. $\sin(u - hz)$, etc., could be replaced by $\sin u \sin hz$ to obtain a "standing wave" rather than the rotating one. Also the Bessel functions could be replaced by others of order zero and two to obtain the Lenard system with similar expressions for Ψ and $\delta U/U$. Our stability analysis will not depend very much on which such system we consider.

We wish to derive the normal mode fluid equations for a perturbation about the above system. These are for an unstable perturbation $\delta \underline{B}$ of \underline{B} , and displacement ξ of the plasma with growth rate σ

$$(\nabla \times \delta \underline{B}) \times \underline{B} + \underline{j} \times \delta \underline{B} + \nabla(\xi \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \xi) = \rho \sigma^2 \xi, \quad (9)$$

$$\delta \underline{B} = \underline{Q} - \frac{\eta c}{4\pi\sigma} \nabla \times (\nabla \times \delta \underline{B}). \quad (10)$$

Here \underline{j} is the diamagnetic current, p the scalar plasma pressure, ρ the density, and $\underline{Q} = \nabla \times (\xi \times \underline{B})$. In order to solve these equations we must carry out an expansion of the equilibrium quantities and perturbed quantities in the small parameter ϵ ; where ϵ_1 and ϵ_3 are of order ϵ , and p, \underline{j} , and γ are of order ϵ^2 . This procedure is quite closely related to that in Ref. [2].

In order to find an unstable mode we are led to choose $\xi^{(0)}$ and $\xi^{(1)}$ to make

$$\underline{Q}^{(0)} = 0, \quad (11)$$

$$\underline{Q}^{(1)} = 0, \quad (12)$$

while $\delta \underline{B}$ is of second order. (Superscripts indicate the order in the expansion.) It will turn out that for $\eta \neq 0$ and $\beta < \beta_c$, σ is proportional to η , while for $\eta = 0$ we set $\sigma = 0$ to get a critical β . Therefore we can drop the inertial term in Eq. (9) and obtain in view of (11) and (12)

$$B_o \delta B_z^{(2)} = \xi^0 \cdot \nabla p^{(2)} + \gamma p \nabla \cdot \xi^0 = \xi^0 \cdot \nabla p + \Gamma \quad (13)$$

where $\Gamma = \gamma p^{(2)} \partial \xi_z^0 / \partial z$. To third order Eq. (9) may be satisfied by choosing $\delta \underline{B}^{(3)}$. In order to be able to choose $\delta \underline{B}^{(4)}$ to satisfy the r and θ components of Eq. (9) to fourth order it is easy to see we must satisfy

$$\begin{aligned} e_z \cdot \nabla \times \langle (\nabla \times \delta \underline{B}^{(3)}) \times \underline{B}^{(1)} + (\nabla \times \delta \underline{B}^{(2)}) \times \underline{B}^{(2)} + (\nabla \times \delta \underline{B}^{(2)}) \times \underline{B}^0 \\ + \underline{j}^{(2)} \times \delta \underline{B}^{(2)} \rangle = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

where the brackets denote an average over the short period $2\pi/h$ (disregarding here the long period variation in z of period $2\pi/\gamma$), $\delta \underline{B}^{(3)}$ is to be obtained from Eq. (9) to third order and the third term is actually of fourth order because ∇ has a term $\gamma e_z \partial / \partial \gamma z$ which raises the order of a quantity by two. By elimination of $\delta \underline{B}^{(3)}$ we obtain

$$\nabla \times (\delta B_z^{(2)} e_z) \cdot \nabla f + \frac{\partial}{\partial z} [e_z \cdot \nabla \times \delta \underline{B}_1^{(2)}]_L = 0. \quad (15)$$

Here f is related to U in Eq. (1) by

$$U = \int \frac{dl}{B} = \int \frac{f(r, u)}{B_o} dz \quad (16)$$

where r, u are taken to follow the motion of the line to lowest order as given by Eqs. (8) and (6), the subscript L indicates the z derivative is to be taken along a line of force, and the subscript 1 indicates that part of $\delta \underline{B}$ perpendicular to \underline{B}_0 . For the case of the fields of Eqs. (4) and (5)

$$\begin{aligned} f &= \text{const.} + \frac{r^2}{2} (s + t \cos 2u), \\ s &= \frac{1}{2} \epsilon_1^2, \quad t = \frac{1}{8} \epsilon_1 \epsilon_3. \end{aligned} \quad (17)$$

The details of the derivation of Eq. (15) are given in Appendix II. We abbreviate $\nabla \times \delta \underline{B}^{(2)}$ by \underline{R} and write Eq. (15) as

$$\underline{R}_1 \cdot \nabla f + \left(\frac{\partial R_z}{\partial z} \right)_L = 0. \quad (18)$$

The first term of (18) is obviously related to the forces driving the interchange while the second term is connected with the line tying of the main \underline{B}_0 field.

The part of Eq. (9) parallel to \underline{B} to fourth order is obtained by taking the inner product of (9) with \underline{B} and then proceeding to fourth order. One gets after a little vector manipulation

$$\underline{B}^0 \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial z} \right)_L - \delta \underline{B}^{(2)} \cdot \nabla p^{(2)} + \underline{Q}^{(2)} \cdot \nabla p^{(2)} = 0. \quad (19)$$

Equation (10) to second order gives

$$\delta \underline{B}_1^{(2)} = \langle \underline{Q}_1^{(2)} \rangle - \frac{\eta c \nabla \times (R_z e_z)}{4\pi\sigma}. \quad (20)$$

The remainder of this equation serves to determine $\xi_1^{(2)}$ which we don't need. $\langle \underline{Q}^{(2)} \rangle$ involves ξ_1^0 and $\xi_1^{(1)}$. By using Eq. (11) we can solve for $\xi_1^{(1)}$ in terms of ξ_1^0 from Eq. (12). Let

$$\xi_1^0 = \nabla \times (x e_z) \quad (21)$$

as we may in virtue of Eq. (11). We obtain simply

$$\underline{Q}_1 = \underline{B}^0 \nabla \times \left(\left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_L e_z \right). \quad (22)$$

Our complete system of normal mode equations is thus given by Eqs. (13) for $\delta B_z^{(2)}$, (19) for Γ , (18) for R_z or $\delta \underline{B}$, and (20) for x through definition (22). It is also possible to introduce

$$\delta \underline{B}_1^{(2)} = \nabla \times (\underline{e}_z \xi) \quad (23)$$

since $\delta \underline{B}_1^{(2)}$ is divergence free. The independent variables are r, u , and γz . The h_z behavior is averaged out through (8). These form a rather complicated system of partial differential equations. In the next section we shall pass to the large m limit and reduce them to ordinary differential equations in the three limits of the introduction.

C. THE LARGE m LIMIT

It is clear from our normal mode equations that the perturbation will tend to follow lines of force. In order to take advantage of this we introduce new coordinates Ψ , v , and z , where

$$v = \int_0^u \frac{du}{1 - 2\Delta \cos 2u} + \gamma z \quad (24)$$

in place of r , u , and z so that in virtue of Eqs. (6) and (8) a line of force is given for small hr by $\Psi = \text{const}$, $v = \text{const}$. Thus $(\partial/\partial z)_L$ can be replaced by $\partial/\partial z$. We restrict our discussion from now on to small hr .

We anticipate that for large m modes the v dependence of perturbed quantities will be large compared to the r or Ψ dependence, which will in turn be large compared to the z dependence. Accordingly we drop all Ψ and z derivatives as small compared to v derivatives. For example,

$$\begin{aligned} \underline{\xi} &= -\underline{e}_z \times \nabla x \\ &= -\underline{e}_z \times [x_r \nabla v + x_\Psi \nabla \Psi] \approx \frac{\underline{e}_r}{r} \frac{x_v}{1 - 2\Delta \cos 2u} \end{aligned} \quad (25)$$

where subscripts indicate partial derivatives. We have dropped the $\underline{e}_z \times \nabla \Psi$ term as small. However

$$\underline{\xi} \cdot \nabla \Psi = \gamma x_v \quad (26)$$

exactly.

We may combine Eqs. (19) and (20) to obtain

$$B^0 \frac{\partial \Gamma}{\partial z} + \lambda \gamma \frac{\partial R_z}{\partial v} p' = 0 \quad (27)$$

where p' denotes the Ψ derivative of $p(\Psi)$ and $\lambda = \eta c / 4\pi\sigma$. We consider p' constant. Also, from Eq. (13)

$$B^0 \delta B_z = \gamma p' x_v + \Gamma \quad (28)$$

Now dottiing Eq. (20) with $\nabla \Psi$ and using Eq. (22) yields

$$\delta B_{\perp} \cdot \nabla \Psi = \gamma B_o x_{vz} - \lambda \gamma \frac{\partial R_z}{\partial v} \quad (29)$$

while from (23)

$$\delta B_{\perp} \cdot \nabla \Psi = \gamma \zeta_v \quad (30)$$

Combining (27) and (28) gives

$$\frac{\partial}{\partial z} (\delta B_z) = \left(x_{vz} \gamma B_o - \lambda \gamma \frac{\partial R_z}{\partial v} \right) \frac{p'}{B_o^2} \quad (31)$$

while elimination of $\delta B \cdot \nabla \Psi$ from (29) and (30) gives

$$\zeta_v = B^0 \chi_{vz} - \lambda \frac{\partial R_z}{\partial v} \quad (32)$$

so from these last two equations

$$\frac{\partial}{\partial z} (\delta B_z) = \frac{\gamma \zeta_v p'}{B_0^2} \quad (33)$$

a result independent of the large m limit. The last normal mode equation (18) can be written in the large m limit with the help of Eq. (17) and the definition of R_z in terms of δB_z as

$$\frac{\partial}{\partial v} (\delta B_z) \left(\frac{s+t \cos 2u}{1-2\Delta \cos 2u} \right) + \frac{\partial R_z}{\partial z} \approx 0 \quad (34)$$

From the definition of R_z we have

$$R_z = -\nabla^2 \zeta = -(\zeta_{rr} + \frac{1}{r} \zeta_r + \frac{1}{r^2} \zeta_{uu})$$

$$\approx -\frac{\zeta_{vv}}{r^2 (1-2\Delta \cos 2u)^2} = -\frac{B_0^2}{2\Psi p' (1-2\Delta \cos 2u)} \frac{\partial^2 (\delta B_z)}{\partial z \partial v} \quad (35)$$

where we have used Eq. (33) and the definition of Ψ Eq. (6). Thus if we set $\partial \delta B_z / \partial v = y$, Eq. (34) becomes

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{1-2\Delta \cos 2u} \frac{\partial y}{\partial z} \right) - \frac{2\Psi p'}{B_0^2} \left(\frac{s+t \cos 2u}{1-2\Delta \cos 2u} \right) y = 0 \quad (36)$$

We may treat Eq. (36) as an ordinary differential equation in z since all Ψ derivatives are lower order in our $1/m$ expansion.

We now consider the three cases mentioned in the introductory section.

Case a.

First set $\eta = 0$. Since we have dropped the inertial term, which corresponds to setting $\sigma = 0$, we are at the neutrally stable situation which determines the critical value of β for stability, β_c . To find β_c we consider Eq. (36) for each value of Ψ . It represents an ordinary differential equation along a line of force and y must return to itself when the line of force returns on itself. In order to secure this we replace the independent variable z by u where by Eqs. (6) and (8)

$$\frac{du}{dz} = -\gamma (1-2\Delta \cos 2u) \quad (37)$$

along a line. We find

$$\frac{d^2 y}{du^2} - \frac{2\Psi p'}{\gamma^2 B_0^2} \frac{(s + t \cos 2u)}{(1 - 2\Delta \cos 2u)^2} y = 0 \quad (38)$$

Now if we demand y be periodic in u , we will satisfy our periodicity condition. It is clear that because of the Ψ coefficient in the first term we cannot make y periodic on every radius. This defect is due to the neglect of the lower order derivatives in v . We expect if we solve (38) with periodic conditions for a particular value of Ψ , to obtain a good estimate of β_c , and we choose that Ψ corresponding to the outside of the plasma say Ψ_0 , for this value $2p'\Psi_0/B_0^2 = -\beta$ (p' is constant) and Eq. (38) becomes

$$\frac{d^2 y}{du^2} + \beta g(u)y = 0 \quad (39)$$

where.

$$g = \frac{1}{\gamma^2} \frac{s + t \cos 2u}{(1 - 2\Delta \cos 2u)^2} = \frac{2}{\gamma \Psi} \frac{f}{(1 - 2\Delta \cos 2u)} \quad (40)$$

The relation between U and g is thus

$$U = \text{const} + \frac{\Psi}{2B_0} \int g du \quad (41)$$

Equation (39) is the eigenvalue equation for β_c for the ballooning mode discussed in the introduction. Estimates for β_c are given in the next section.

Case b.

Now let $\eta \neq 0$. We must assume $\beta < \beta_c$ since otherwise the plasma is unstable in the infinite conductivity case. We consider two limiting situations as discussed in the introduction. First let us assume $\sigma_R \tau \gg 1$, i.e., the instability grows so fast the matter cannot move freely along the lines. For this case we can neglect the force along the lines and drop Eq. (19) and set $\Gamma = \gamma p \partial \xi_z^0 / \partial z = 0$ since ξ_z^0 represents the motion along the lines. (This result can be obtained more formally by replacing the zero in Eq. (19) by $\rho \sigma^2 \xi_z^0$ and passing to the $\sigma_R \tau$ large limit by making ρ large. ξ_z^0 will then be found to be so small that the Γ term in Eq. (13) will make a negligible change in δB_z .) In this limit Eqs. (27) and (31) - (33) are not valid.

We may now obtain the reduced normal mode equation from Eq. (34) by substituting for δB_z from Eq. (28) and solving Eq. (20) for R_z in terms of X from Eq. (29). However, one further simplifying assumption will be made. If $\beta \ll \beta_c$ where β_c is obtained from the infinite conductivity theory, it can be shown that the $\delta B \cdot \nabla \Psi$ term in (29) is negligible. Thus we have

$$\underline{R}_1 = -\frac{e}{r} \frac{\frac{m^2 \gamma p'}{r B_0}}{(1 - 2\Delta \cos 2u)} \frac{X}{\underline{\delta B} \cdot \nabla \Psi} \quad (42)$$

where we have set $x_{vv} = -m^2 x$ where m is an effective mode number for the v dependence; and

$$R_z = \frac{1}{\lambda} x_z . \quad (43)$$

The normal mode equation (taken on the outer surface of the plasma as discussed above) becomes

$$x_{zz} + \frac{m^2 \lambda \beta \gamma}{2 \Psi_0} \frac{(s+t \cos 2u)}{(1-2\Delta \cos 2u)} x = 0 . \quad (44)$$

This gives an eigenvalue λ or the frequency σ_R . The normal mode of Eq. (44) is the resistive ballooning mode.

Case c.

Now let us consider the limiting case $\sigma_R \tau \ll 1$ and $\eta \neq 0$. Again we take $\beta < \beta_c$. This case corresponds to neglecting the inertia term in Eqs. (9), (19), and (27), and is equivalent to assuming that ξ_z^0 can be large enough to keep the force along the lines zero without the corresponding inertia forces being significant. (One arrives at this limit by including the inertial term $\rho \sigma^2 \xi_z^0$ in Eq. (19) and letting ρ approach zero. One estimates this term by first neglecting it and solving for Γ and then ξ_z^0 , and one finds that this term makes only a negligible correction in Γ if $\sigma_R \tau \ll 1$.) On this assumption one finds that all the equations are the same as in the $\eta = 0$ case, up to Eq. (39), so that Eq. (39) must be satisfied for this case. However, since the lowest eigenvalue for Eq. (39) is β_c we can have no periodic solution for β less than β_c in this limiting case. It appears that none of the approximations made when carried to higher order will alleviate this situation. Thus there is no resistive instability in this limiting situation, viz., high m ; $\beta < \beta_c$, and $\sigma_R \tau$ small. The physical explanation for the disappearance of this mode is easily seen to be that given in the Introduction. It would seem that there is some critical value of $\sigma_R \tau$ below which the resistive instability of the first limiting case becomes stable. This latter result has not yet been established.*

We have arrived at the normal mode equations for the first two cases, and have shown none exists in the third case, under a considerable number of assumptions not all of which are essential to carry out the calculation. These have been chosen to arrive at the simplest equation which will exhibit the essential physical effects which are not necessarily applicable only to the Johnson systems. This seems reasonable since it is expected that such negative V" systems will change considerably in the future and these changes will depend more on the simpler physical results.

D. THE RESULTS

We wish to estimate the critical β for an infinite conductivity ballooning mode which one obtains from Eq. (39) and the growth rate of the resistive ballooning mode in the $\sigma_R \tau \gg 1$ limit which one obtains from Eq. (44).

* See Note added in proof.

Consider the resistive ballooning mode first. Equation (44) can best be compared with Eq. (39) by introducing u as the independent variable in place of z . One obtains

$$\frac{d}{du} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dx}{du} \right) + \frac{m^2 \lambda \beta}{4\Psi_0} y^2 g x = 0 \quad (45)$$

If we replace r^2 by an \bar{r}^2 this equation becomes the same as Eq. (39) which determines β_c and we have approximately from Eqs. (45) and (39)

$$\sigma_R = \frac{\beta}{\beta_c} \frac{\eta_c}{4\pi\bar{r}^2} m^2 = \frac{m^2}{\beta_c \tau_{\text{class}}} \quad (46)$$

for the growth rate of the resistive ballooning mode. This result is reasonable since $m^2 \eta c / 4\pi\bar{r}^2$ is the decay time for a magnetic field through a distance \bar{r}/m . This decay must be sufficiently slow to allow the field lines to lag behind the plasma by the factor β/β_c (the ratio of the plasma force to the magnetic force if the lines were displaced as much as the plasma). Balancing the two terms we get the extra β/β_c factor in (46).

We estimate β_c for Eq. (39) by writing it in Raleigh form, since it is self-adjoint, as

$$\beta = \min \frac{\int y_u^2 du}{\int gy^2 du} \quad (47)$$

If δU is positive we can make β arbitrarily small by choosing y nearly a constant and Eq. (47) has no positive minimum so we can conclude the system is unstable for any β . However, if δU is negative then (47) always has a minimum positive value. The numerator of (47) represents the tying effect of the magnetic field which arises if y is not a constant, while the denominator represents the average energy gained by an interchange. The minimizing value will tend to be large where g is positive, the adverse region, and small where g is negative, the favorable region, to the extent allowed by the numerator. If the negative parts of g predominate significantly over the positive parts we see from (39) that the eigenfunction is much smaller in the regions of negative g so that one can obtain a good estimate of β by setting

$$y = \begin{cases} y_0 \cos 2u & |u| < \pi/4 \\ 0 & |u| > \pi/4 \end{cases} \quad (48)$$

We find

$$\beta_c \approx \frac{\pi}{\alpha} \frac{\Psi}{B^0 \delta U_{\text{bad}}} \quad (49)$$

where we set $y^2 = \alpha y_0^2$ in the denominator of (46) and δU_{bad} is the contribution to δU from the region $|u| < \pi/4$ which is roughly the $g < 0$ region of u (the unfavorable region). Setting $U_{bad} = L/B_0$ where

$$L = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{du}{1 - 2\Delta \cos 2u} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{r^2}{2\Psi} du = \frac{\pi}{2} \frac{r^2}{2\Psi} \quad (50)$$

is the length of the latter region, we get'

$$\beta_c \approx \frac{\pi^2}{2L^2} \frac{a^2}{(\delta U/U)_{bad}} \quad (51)$$

where we have set $\alpha = 1/2$ and $a^2 = r^2$. Equation (51), insofar as it applies in general, indicates what is desirable in a minimum \bar{B} system for which one wishes a large β . The part of the "well depth" in the adverse region $(\delta U/U)_{bad}$ should not be too large and the adverse sections should not have too large a length L so that the average effect of the whole system can be forced to apply by line tying. This formula indicates that the systems of Taylor and perhaps some of those of Furth which suffer from rather large L and $(\delta U/U)_{bad}$ are stable only for rather small β . Numerical estimates indicate that the system of Johnson which has a "well depth" of less than a percent and a relatively small value of L can be stable for values of β of order one. However, the Taylor system is certainly valuable for testing the minimum \bar{B} system experimentally at the low value of β usually used in toroidal systems.

In conclusion, the β_c obtained from Eq. (47) and given approximately in Eq. (51) gives the value of β above which the minimum \bar{B} system is unstable to the ballooning mode even for $\eta = 0$. For $\beta < \beta_c$ the system is stable for zero resistivity, but for nonzero resistivity unstable to a resistive ballooning mode with growth rate σ_R given by (46) if the $\sigma_R \tau$ is very large, where τ is the time for an ion to go the length L of the adverse section. If $\sigma_R \tau$ is very small, the resistive ballooning mode is stable.

(Added in proof.) In case (c) it is shown only that if $\beta < \beta_c$ and $\sigma \tau \ll 1$, then no mode exists. However, for $\sigma_R \tau \ll 1$ it is not necessarily the case that σ is of order σ_R , one can conclude only that in this case σ is not of order σ_R . This case has been examined in more detail by Furth et al., who showed that the sound wave produces an overstability with $\text{Im } \sigma \gg \sigma_R$. Thus the fact stated in the text that the sound wave stabilizes the resistive drift mode is not correct.

APPENDIX I

We wish to integrate the equation for a line of force of the field given by Eqs. (4) and (5) to lowest order by averaging the small oscillation given by the h_z dependence in (5). Consider a general field of type

$$\underline{B} = B^0 \underline{e}_z + B^0 \nabla \phi^1 + \nabla \times (A^{(2)} \underline{e}_z) \quad (I-1)$$

where ϕ^1 has an h^2 sinusoidal dependence, i.e.,

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = - h^2 \phi \quad (I-2)$$

the vector potential is second order, and ϕ and A are functions of r and u plus the h^2 dependence of ϕ . Then introducing cartesian coordinates in r, u, z space, we can write for the motion of the line

$$\frac{dx}{dz} = \frac{B_x}{B_z} - \gamma y \quad (I-3)$$

Writing $x = x_0 (\gamma z) + x_1 + \dots$, we have

$$\frac{dx}{dz} = \frac{B_x}{B_o} + \frac{x_1}{B_o} \frac{\partial B_x^1}{\partial x} + \frac{y_1}{B_o} \frac{\partial B_x^1}{\partial y} - \frac{B_x^1 B_z^1}{B_o^2} - \gamma y \quad (I-4)$$

$$\frac{dx_1}{dz} = \frac{B_x^1}{B_o}, \quad \frac{dy_1}{dz} = \frac{B_y^1}{B_o} \quad (I-5)$$

where everything is evaluated at x_o, y_o . Writing $x_1 = -(1/h^2) d^2 x_1/dz^2$, etc., substituting in Eq. (I-4), making use of (I-5), and averaging over h^2 , we have

$$\langle \frac{dx}{dz} \rangle = \frac{dx_o}{dz} = \frac{1}{B_o} \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{h^2 B_o^2} \langle \frac{\partial B_x^1}{\partial z} \frac{\partial B_x^1}{\partial x} + \frac{\partial B_y^1}{\partial z} \frac{\partial B_x^1}{\partial y} + \frac{\partial B_x^1}{\partial z} \frac{\partial B_z^1}{\partial z} \rangle - \gamma y_o \quad (I-6)$$

Combining the first and last terms by $\nabla \cdot \underline{B}^1 = 0$ and introducing (I-1), we obtain

$$\frac{dx_o}{dz} = \frac{\partial}{\partial y} \left[- \frac{1}{h^2} \langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \frac{\partial \phi}{\partial x} \rangle + \frac{A}{B_o} + \frac{\gamma}{2} (x_o^2 + y_o^2) \right] = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (I-7)$$

and similarly

$$\frac{dy_o}{dz} = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (I-8)$$

the latter equation being obtained simply by interchanging x and y and integrating by parts. In cylindrical r, u coordinates Ψ is simply

$$\Psi = - \frac{1}{h^2 r} \langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial z} \frac{\partial \phi}{\partial r} \rangle + \frac{A}{B_o} + \frac{\gamma r^2}{z} \quad (I-9)$$

Applying this to Eq. (5) with $A = 2\gamma \delta r^2 \sin 2u$ one easily obtains Eqs. (6) and (8). One also easily obtains the rotational transform from

$$\int_0^{\Delta u} \frac{du}{\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}} = \Delta z, \quad \iota = \lim \left(\frac{\Delta u}{\Delta z} + \gamma \right) \quad (I-10)$$

Many of the results of Ref. [2] may be easily obtained this way.

APPENDIX II

Let us write in Eq. (14)

$$\underline{e}_z \cdot \nabla \times \langle (\nabla \times \delta \underline{B}^{(3)}) \times \underline{B}^{(1)} \rangle = - \frac{1}{h^2 B^0} \nabla \times \langle (\nabla \times (B^0 \cdot \nabla) \delta \underline{B}^{(3)}) \times \frac{\partial \underline{B}^1}{\partial z} \rangle \quad (II-1)$$

as in Appendix I since \underline{B}^1 and $\delta \underline{B}^{(3)}$ are sinusoidal in hz . Now from Eq. (9) to third order

$$\underline{B}^0 \cdot \nabla (\delta \underline{B}^{(3)}) = - \nabla (\delta \underline{B}^{(3)} \cdot \underline{B}^0) - \underline{R} \times \underline{B}^1 - \nabla (\xi \cdot \nabla p + \Gamma)^{(3)} \quad (II-2)$$

where $\underline{R} = \nabla \times \delta \underline{B}^{(2)}$ and expression (II-1) becomes

$$- \frac{1}{h^2 B^0} \underline{e}_z \cdot \nabla \times \langle [\nabla \times (\underline{R} \times \frac{\partial \underline{B}^1}{\partial z})] \times \underline{B}^1 \rangle \quad (II-3)$$

After some vector algebra and integrations by parts this can be reduced to

$$- \frac{1}{h^2 B^0} \underline{R} \cdot \nabla \langle \underline{B}^1 \cdot \nabla \frac{\partial \underline{B}^1}{\partial z} \rangle + \frac{1}{h^2 B^0} \underline{B}^1 \cdot \nabla \left(\frac{\partial \underline{B}^1}{\partial z} \right) \cdot \nabla R_z \quad (II-4)$$

Now since \underline{B}^1 is a vacuum field sinusoidal in hz it follows readily (in cartesian coordinates) that

$$\langle \underline{B}^1 \cdot \nabla \frac{\partial \underline{B}^1}{\partial z} \rangle = - h^2 \langle B_x^{(1)2} + B_y^{(1)2} + B_z^{(1)2} \rangle = - h^2 B^0 f \quad (II-5)$$

Also

$$U = \int \frac{dl}{B} = \int \frac{dz}{B_z} \quad (II-6)$$

where the integral is along the line of force and by using the results of Appendix I we can express this to second order as

$$U = \text{const} + \int \frac{\langle B^{(1)2} \rangle}{B^3} = \text{const} + \int \frac{f}{B^0} \quad (II-7)$$

which is Eq. (16).

Consider the second term in (II-4). It is easily shown that

$$\frac{1}{h^2 B^0} \cdot \underline{\underline{B}}^1 \cdot \nabla \cdot \frac{\partial \underline{\underline{B}}^1}{\partial z} = - \underline{\underline{e}}_z \times \nabla \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \right) \quad (\text{II-8})$$

which occurs in the definition of Ψ , Eq. (I-7) of Appendix I. The second term in Ψ comes from the term $\underline{\underline{e}}_z \times \nabla \times \langle \underline{\underline{R}} \times \underline{\underline{B}}^{(2)} \rangle$ of Eq. (14) if we drop the diamagnetic part of $\underline{\underline{B}}^{(2)}$, and combining the latter with the second term of (II-4), we get

$$- \underline{\underline{e}}_z \times \nabla \Psi' \cdot \nabla R_z \quad (\text{II-9})$$

where Ψ' is Ψ without the $1/2 \gamma r^2$ term so $-\underline{\underline{e}}_z \times \nabla \Psi'$ gives the motion of a line of force. The diamagnetic part of the second term of (14) cancels the last term and the third term gives $\underline{\underline{B}}^0 \cdot \nabla R_z$. We substitute (II-5) into the first term of (II-4) to get the first term of (15). We add the nondiamagnetic part of the second term of (14) to the second term of (II-4) to get expression (II-9), and when we add the fourth term of (14), viz., $\underline{\underline{B}}^0 \cdot \nabla R_z$ this becomes the second term of (15). The rest of the terms in Eq. (14) cancel.

REFERENCES

- [1] BERNSTEIN, I. B., FRIEMAN, E. A., KRUSKAL, M. D., and KULSRUD, R. M., Proc. Roy. Soc. A 244, 17 (1958); LONGMIRE, C. I. and ROSENBLUTH, M. N., Ann. Phys. 1, 120 (1957).
- [2] JOHNSON, J. L., OBERMAN, C. R., KULSRUD, R. M., and FRIEMAN, E. A., Phys. Fluids 1, 281 (1958).
- [3] FURTH, H. P., KILLEEN, J., and ROSENBLUTH, M. N., Phys. Fluids 6, 459 (1963).
- [4] FURTH, H. P. and ROSENBLUTH, M. N., Phys. Fluids 7, 764 (1964).
- [5] LENARD, A., Phys. Fluids 7, 1875 (1964).
- [6] JOHNSON, J. L., Phys. Fluids 7, 2015 (1964).
- [7] FURTH, H. P. and ROSENBLUTH, M. N., Bull. Am. Phys. Soc. 10, 198 (1965).
- [8] TAYLOR, J. B., Phys. Fluids 8, 1203 (1965).
- [9] YOSHIKAWA, S., private communication.
- [10] GOTTT, Y. B., IOFFE, M. S., and TELKOVSKY, V. C., Nucl. Fusion Suppl. 3, 1045 (1962); TAYLOR, J. B., Phys. Fluids 7, 767 (1964).

- [11] COWLING, T. G., "The Sun", Ch. 8, pp. 564-570 (G. P. Kuiper, Ed.), University of Chicago Press (1953).
- [12] FURTH, H.P., ROSENBLUTH, M.N., and COPPI, B., paper CN21/106 this conference.

Work accomplished under the auspices of the U.S. Atomic Energy Commission.

DISCUSSION

N.A. KRALL: Have you considered the effect of adding a small amount of shear in your calculation?

R.M. KULSRUD: The shear in the actual Johnson system was relatively small. In a typical case the transform angle varies from 70° on the axis to 55° on the boundary of the plasma. Because the shear is small and, in my expansion, zero to lowest order it did not occur in the calculation. For this reason I felt it could be neglected. Moreover, I do not think such small shears have much effect at higher temperatures.

B. COPPI: I believe that, if it is possible to extend the results we obtained for an idealized one-dimensional configuration, a small amount of shear near the axis would alter considerably the stability analysis, which is obtained in the complete absence of shear, and give a definite improvement.



HELICAL FIELDS POSSESSING MEAN MAGNETIC WELLS

B. McNAMARA, K.J. WHITEMAN AND J.B. TAYLOR
UNITED KINGDOM ATOMIC ENERGY AUTHORITY
THE CULHAM LABORATORY,
ABINGDON, BERKS., ENGLAND

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

HELICAL FIELDS POSSESSING MEAN MAGNETIC WELLS. Recently Furth and Rosenbluth pointed out that a particular magnetic field having helical symmetry could provide a mean magnetic well, that is provide regions in which $\int d\ell/B$ decreases away from a magnetic axis (or equivalently a region in which V'' is negative). In this paper we examine helical fields in general and the circumstances in which they may exhibit the negative V'' property. This investigation is made possible by the use of the stream function formalism which provides a simple picture of the field geometry. The existence of negative V'' is related to the topology of the magnetic surfaces which in turn is connected with the positions of the stationary points of the stream function ψ .

Detailed calculations are given of the shape of the flux surfaces and of the shape of the magnetic well (the variation of $\int d\ell/B$ across it) for several examples of helical fields. These include the Furth-Rosenbluth configuration and a new configuration which provides a mean magnetic well without the necessity for a central conductor. A survey is also made of the magnetic well properties of these two classes of helical field in terms of two simple criteria: (1) the ratio Q of the field strength on the axis and on the separatrix (which provides an estimate of the overall well depth); and (2) the value of V'' on the magnetic axis (which provides a measure of the "curvature" of the well). This latter quantity is calculated analytically by using a general expression for the value of V'' on an arbitrary magnetic axis. It is pointed out that Q alone does not provide a realistic indication of the well shape.

CHAMPS HELICOÏDAUX A PUITS MAGNÉTIQUES MOYENS. Récemment, Furth et Rosenbluth ont fait observer qu'un champ magnétique particulier à symétrie hélicoïdale peut fournir un puits magnétique moyen, c'est-à-dire des régions dans lesquelles $\int d\ell/B$ décroît à partir d'un axe magnétique (ou, ce qui revient au même, une région dans laquelle V'' est négatif). Dans ce mémoire, les auteurs étudient les champs hélicoïdaux en général ainsi que les conditions dans lesquelles V'' peut prendre des valeurs négatives. L'emploi du formalisme des fonctions à courant, qui donnent une image simple de la configuration du champ, a permis de faire cette étude. L'existence d'un V'' négatif est associée à la topologie des surfaces magnétiques, laquelle est liée aux positions des points stationnaires de la fonction de courant ψ .

Les auteurs présentent des calculs détaillés de la forme des surfaces de flux et de la forme du puits magnétique (variations de $\int d\ell/B$ à travers le puits) pour plusieurs exemples de champs hélicoïdaux. Ces exemples comprennent la configuration de Furth-Rosenbluth ainsi qu'une nouvelle configuration qui fournit un puits magnétique moyen sans conducteur central. Les auteurs discutent aussi les propriétés de puits magnétique que possèdent ces deux classes de champs hélicoïdaux, en fonction de deux critères simples: a) le rapport Q des intensités du champ sur l'axe et sur la séparatrice (ce qui fournit une estimation de la profondeur globale du puits); b) la valeur de V'' sur l'axe magnétique (ce qui fournit une mesure de la «courbure» du puits). Cette dernière quantité est calculée analytiquement à l'aide d'une expression générale pour la valeur de V'' sur un axe magnétique arbitraire. Les auteurs font observer que Q seul ne donne pas d'indications suffisantes sur la forme réelle du puits.

ВИНТОВЫЕ ПОЛЯ, ОБЛАДАЮЩИЕ УСРЕДНЕННЫМИ МАГНИТНЫМИ ЯМАМИ. Фурт и Розенблют недавно указали, что определенное магнитное поле, имеющее винтовую симметрию, может дать усредненную магнитную яму, т.е. дать области, в которых $\int d\ell/B$ уменьшается в сторону от магнитной оси (или, что эквивалентно, области, в которой V'' является отрицательным). Исследовались винтовые поля в общих чертах, а также обстоятельства, при которых они могут обнаруживать свойство отрицательного V'' .

Это исследование оказалось возможным благодаря использованию формализма функции потока, что дает простую картину геометрии поля. Наличие отрицательного V'' связано с

топологией магнитных поверхностей, которая, в свою очередь, связана с положениями стационарных точек функции потока.

Даются подробные расчеты формы поверхностей потока и формы магнитной ямы (вариация $\int dl/B$ в поперек него) для ряда примеров винтовых полей. Сюда включаются конфигурация Фурта-Розенблута и новая конфигурация, обеспечивающая усредненную магнитную яму без центрального проводника. Исследованы также свойства магнитной ямы этих двух классов винтового поля с использованием двух простых критериев – (i) отношения Q силы поля на оси и на сепаратриссе, (что дает оценку общей глубины ямы) и (ii) величину V'' на магнитной оси (что дает меру "кривизны" ямы). Эта последняя величина рассчитывается аналитически с использованием общего выражения для V'' на произвольной магнитной оси. Подчеркнуто, что одно Q не дает реальных указаний относительно формы ямы.

CAMPOS HELICOIDALES CON POZOS MAGNETICOS MEDIOS: Es fecha reciente, Furth y Rosenbluth señalaron que determinado campo magnético con simetría helicoidal podía crear un pozo magnético medio, es decir, regiones en las cuales $\int dl/B$ disminuye a medida que aumenta la distancia a un eje magnético (o bien, en términos equivalentes, una región en la que V'' es negativa). En esta memoria, los autores estudian los campos helicoidales en general, así como las circunstancias en las cuales V'' puede adoptar valores negativos. Esta investigación resulta posible mediante el uso de la función de corriente que da una imagen sencilla de la configuración del campo. La existencia de una V'' negativa se relaciona con la topología de las superficies magnéticas y ésta, a su vez, con las posiciones de los puntos estacionarios correspondientes a la función de corriente.

En la memoria se presentan cálculos detallados de la forma de las superficies de flujo y del pozo magnético (la variación de $\int dl/B$ a través del mismo) para varios ejemplos de campos helicoidales. Entre ellos se incluyen la configuración de Furth-Rosenbluth y una nueva configuración que origina un pozo magnético medio sin necesidad de un conductor central. Se pasa revista también a la propiedad de generar pozos magnéticos que tienen estas dos clases de campo helicoidal, usando para ello dos criterios simples: 1) la relación Q entre la intensidad del campo en el eje y en la separatrix (lo que permite evaluar la profundidad total del pozo), y 2) el valor de V'' en el eje magnético (que constituye una medida de la «curvatura» del pozo). Esta última magnitud se calcula analíticamente empleando una expresión general que proporciona el valor de V'' en un eje magnético arbitrario. Los autores señalan que por sí solo Q no da indicaciones suficientes sobre la forma real del pozo.

1. Introduction

Recently Furth and Rosenbluth pointed out [1] that a magnetic field having helical symmetry could provide a mean magnetic well, that is provide regions in which $\int \frac{dl}{B}$ decreases away from a magnetic axis (or equivalently where $\frac{d^2V}{dF^2}$ is negative, V being the volume and F the flux associated with a magnetic surface enclosing the axis). The particular helical system they considered was made up of a uniform field, the field due to various helical wires and that due to a central current carrying conductor.

In this paper we examine helical fields in general and the circumstances in which they may provide negative V'' . In section 2 we first describe a stream function formulation of helical fields which provides a simple yet general picture of the field geometry. In sections 3 and 4 we discuss qualitatively the form of the magnetic surfaces and the formation of mean

magnetic wells. Section 5 is devoted to numerical calculations of the magnetic surfaces and the variation of $V' = \int \frac{d\ell}{B}$.

In section 6 we introduce a new type of helical, negative V'' field which does not require a central conductor and present calculations of magnetic surfaces and of the variation of V' for this class of field.

In section 7 we discuss the evaluation of V'' on the magnetic axis. This is calculated by using a general expression for V'' on an arbitrary magnetic axis and later specialising to the helical system. Finally in section 8 we give a general survey of the magnetic wells possible in the two classes of helical field.

2. Helically Symmetric Fields

In a helically symmetric configuration all quantities are functions only of r and $\xi \equiv \theta - kz$ (where r, θ, z are cylindrical coordinates and k is a constant related to the pitch). As a result of this symmetry;

$$\text{div } \mathbf{B} \equiv \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial}{\partial \xi} (B_\theta - krB_z) \quad (2.1)$$

indicating that the magnetic field \mathbf{B} can be expressed in terms of a stream function ψ :

$$r B_r = \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad r B_\theta = B_\theta - krB_z = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.2)$$

(ψ is the flux in the (r, ξ) plane and is also related to the vector potential:- $\psi = krA_\theta + A_z$). Since $\text{div } j = 0$ one can also introduce a current stream function, I , in terms of which j is given by:-

$$r j_r = \frac{\partial I}{\partial \xi}, \quad j_\theta - krj_z = -\frac{\partial I}{\partial r} \quad (2.3)$$

Then the relation $j = \text{curl } \mathbf{B}$ gives

$$I = B_z + krB_\theta \quad (2.4)$$

For vacuum fields it follows from (2.3) that I is a constant. In terms of these stream functions the equation for vacuum field, $j = 0$, reduces to:-

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{1 + k^2 r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = \frac{2kI}{(1 + k^2 r^2)^2} \quad (2.5)$$

and the general magnetic stream function for a helical field can therefore be written

$$\psi(r, \zeta) = A \log r + \frac{Br^2}{2} + \sum A_n r \left\{ \begin{array}{l} I_n^{(knr)} \\ K_n^{(knr)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \cos n \zeta \\ \sin n \zeta \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

where I_n and K_n are Bessel functions of imaginary argument, and the (constant) current stream function is given by

$$k I = B - k^2 A \quad (2.7)$$

The z-component of the magnetic field can be written

$$B_z = \frac{I + kr \frac{\partial \psi}{\partial r}}{(1 + k^2 r^2)} \quad (2.8)$$

so that at points where $\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$ the axial field is proportional to $(1 + k^2 r^2)^{-1}$. Since

$$v' = \int \frac{dr}{B} = \int \frac{dz}{B_z} \quad (2.9)$$

we will later be able to use (2.8) to infer the existence of a mean magnetic well merely by examining the location of the zeros of $\frac{\partial \psi}{\partial r}$.

We note in passing that Furth and Rosenbluth presented their results in terms of the scalar potential ϕ where $B = \nabla \phi$ and

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = 0 \quad (2.10)$$

The general helically symmetric solution of this is

$$\phi = Cz + D\theta + \sum D_n \left\{ \begin{array}{l} I_n^{(knr)} \\ K_n^{(knr)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sin n \zeta \\ -\cos n \zeta \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

and recalling that $B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$ etc., one finds that

$$C = \frac{B}{k}, \quad D = -A, \quad D_n = \frac{-A_n}{k} \quad (2.12)$$

These coefficients have an obvious interpretation; C measures the strength of the uniform z-component of the field, D is proportional to the current in the central conductor and D_n are the strengths of the various helical multipole fields.

3. Magnetic Flux Surfaces

If we consider only the field produced by a current carrying rod at $r = 0$ together with a uniform field in the axial direction then the stream function would be simply

$$\psi_0 = A \log r + \frac{Br^2}{2} \quad (3.1)$$

and for the moment we will consider $A < 0$, $B > 0$. The flux surfaces $\psi_0 =$ constant are simply concentric circular cylinders; furthermore the z-component of the field is uniform and so from (2.9) $V'' \equiv 0$. A negative value for V'' can be achieved through a change in the topology of the magnetic flux surfaces brought about [2] as a result of the addition of small helical multipole field components.

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \cos n \zeta$$

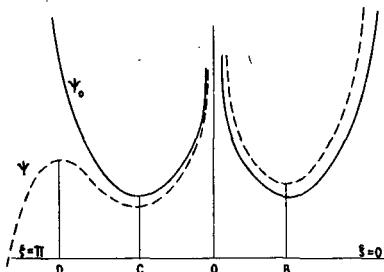
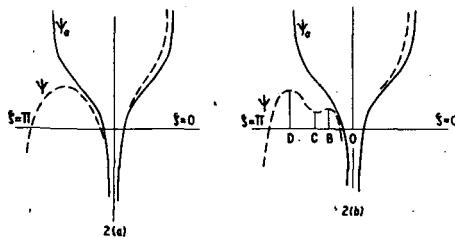
This change in topology occurs wherever $\frac{\partial \psi_0}{\partial r} = 0$ and $\psi_1(r) \neq 0$.

For instance, the effect of adding a small helical component to (3.1) so that

$$\psi = A \log r + \frac{Br^2}{2} + A_1 r I_1'(kr) \cos \zeta \quad (3.2)$$

is illustrated in figure 1, which shows the radial variation of ψ in the directions $\zeta = 0, \pi$. The solid line shows the variation of ψ_0 while the broken line shows the variation of the total ψ including the helical term. At the point B, where $\psi' = 0$ along the direction $\zeta = 0$, the helical contribution is positive and $\psi > \psi_0$. At the corresponding point C in the direction $\zeta = \pi$, where ψ' is also zero, the helical contribution is negative $\psi < \psi_0$. For large values of r the helical term ($r I_1'(kr) \cos \zeta$) predominates and the overall variation of ψ is as shown in figure 1.

The change in topology produced by the addition of even a small helical contribution is now apparent. Without the helical contribution ψ ($\equiv \psi_0$) has the same value at B and C which therefore lie on the same (circular) flux surface but as soon as the helical contribution is added the point C becomes an isolated minimum; nearby flux contours are closed around C and do not encircle the axis to link up with B. The points B and D are now saddle

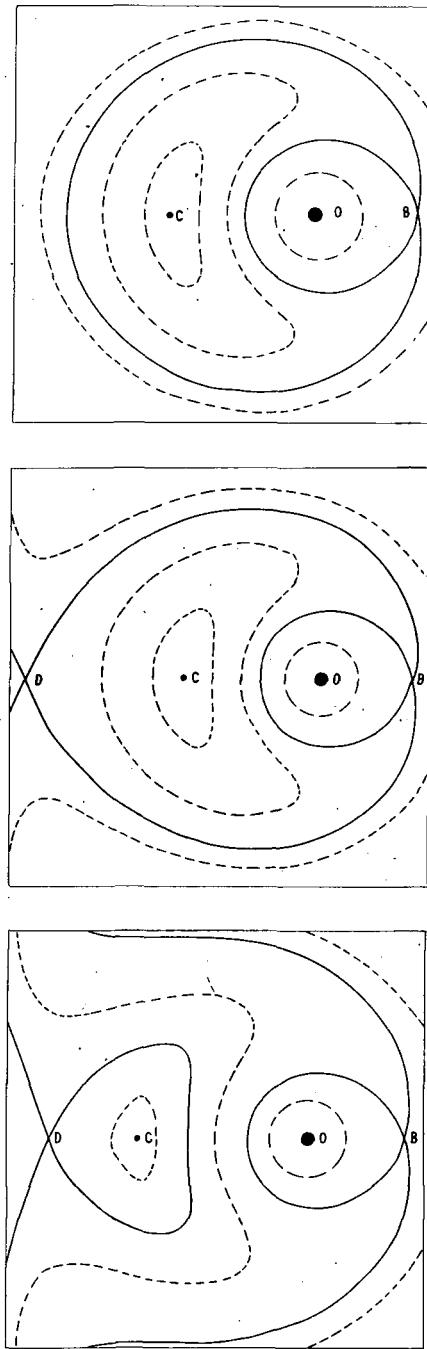
FIG. 1. Variation of ψ with r ; $A < 0, B > 0$ FIG. 2. Variation of ψ with r ; $A > 0, B > 0$

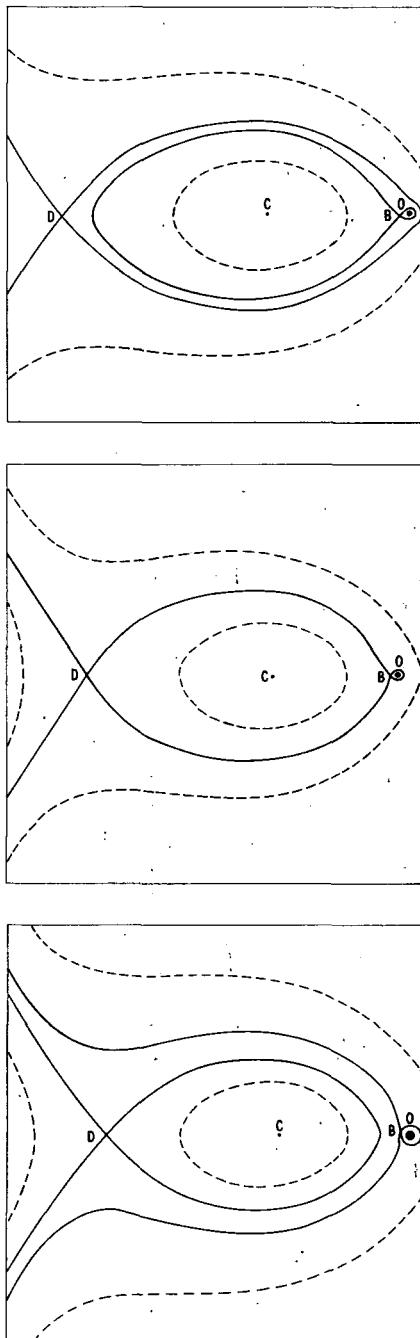
points of ψ and the flux surfaces are as shown in figure 3(a). However figure 3(a) is not the only possible flux surface shape, even with $A < 0, B > 0$. Depending on whether the value of ψ at the point D (of figure 1) is greater than, equal to, or less than its value at the point B, one obtains the flux surfaces shown in figures 3a, 3b, 3c respectively.

Turning now to the regime $A > 0, B > 0$ we find a somewhat different situation. In this case ψ_0 no longer has a stationary point so that the addition of the helical contribution does not generally result in minima or saddle points like B,C,D. Instead the typical behaviour is as shown in figure 2a. For certain values of the parameters, however, the situation shown in figure 2b can arise. This occurs when there is a range over which kr is small so that $r I_1(kr)$ is proportional to r and yet A_1 is large so that the helical term is comparable to $A \log r$ and $Br^2/2$. The stream function is then approximately

$$\psi \sim A \log r + \frac{Br^2}{2} + \frac{1}{2} A_1 r \cos \xi$$

which has a minimum, as at C, and a saddle point at B. As before the helical

FIG. 3. Flux surface shapes; $A < 0, B > 0$

FIG. 4. Flux surface shapes; $A > 0$, $B > 0$

term predominates at large r , so a second saddle point arises at D. Depending on whether the value of ψ at B is less than, equal to, or greater than its value at D, the flux surfaces have the shapes shown in figures 4a, 4b, 4c respectively.

Naturally the simultaneous use of several helical multipole terms can give rise to more complex behaviour, including the formation of multiple minima, i.e. multiple magnetic axes. However these more complex flux surfaces can be interpreted in the same manner as the simpler ones discussed above.

4. Magnetic Wells in Helical Fields

Our present interest in helical fields stems from the fact that they may be a means of creating a "mean magnetic well", that is a system in which the field strength, appropriately averaged over the magnetic surfaces, increases as one moves away from the central axis. This property is expressed mathematically either by the statement that $\int \frac{d\ell}{B}$ or the equivalent quantity $\frac{dV}{dF}$, decreases as one moves away from the axis. In general it is not possible, even in a helical field, to express V' in a simple form. However, as Furth and Rosenbluth pointed out, on certain limiting surfaces $\int \frac{d\ell}{B}$ can be found very simply. These limiting surfaces are the magnetic axis and the separatrix, that is the surface through one of the saddle points of ψ . At the axis $\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$ and so from (2.8).

$$\frac{B_z}{r_A} = \frac{I}{1 + k^2 r_A^2} \quad (4.1)$$

where r_A is the radius of the (helical) axis and

$$\left(\int \frac{d\ell}{B} \right)_{axis} = \frac{L}{I} (1 + k^2 r_A^2) \quad (4.2)$$

where L is the length of the helical period ($= \frac{2\pi}{k}$). At a saddle point of ψ a similar argument applies and

$$\left(\int \frac{d\ell}{B} \right)_{saddle} = \frac{L}{I} (1 + k^2 r_S^2) \quad (4.3)$$

where r_S is the radius at which the saddle point occurs. Since $\int \frac{d\ell}{B}$ is a surface quantity it is the same for all lines on the separatrix and the ratio of $\int \frac{d\ell}{B}$ on the axis to its value on the separatrix is therefore

$$Q = \left(\frac{1 + k^2 r_A^2}{1 + k^2 r_S^2} \right) \quad (4.4)$$

and is greater than unity whenever $r_A > r_S$. Without further calculation it is impossible to tell whether $\int \frac{d\ell}{B}$ varies monotonically between the axis and the separatrix, indeed it often does not, but if $Q > 1$ there must at least be regions in which $\int \frac{d\ell}{B}$ increases outwards.

Examination of the flux surfaces and location of the stationary point of Ψ therefore gives an indication of whether a magnetic well exists. For example in figure 4a it is immediately obvious that $r_A > r_S$ and so $Q > 1$. In figure 3a it is not immediately obvious that $r_A > r_S$ but examination of figure 1 shows that the effect of the helical contribution (broken line) must be to displace C outwards and B inwards compared to the symmetrical positions they have when $\Psi = \Psi_0$.

Another quantity determining the existence of a well is the value of V'' at the magnetic axis; a negative value for V'' denotes the presence of a well and its magnitude is a measure of the "curvature" of the well. However the calculation of V'' , which is best carried out using the formula for V'' about an arbitrary axis, is more lengthy than the determination of Q and so will be deferred until section 7, after we have examined some typical wells in more detail.

5. Numerical Computations of well with central rod

Although the determination of the ratio Q , discussed above, and the calculation of $V''(0)$, to be discussed in section 7, give useful indications of the magnetic well, the well shape can often be rather complex and sensitive to small changes in the stream function Ψ . It is important, therefore, to examine a few wells in detail by means of numerical computation. It is convenient first to scale the independent variables to a length R_o by writing $r = R R_o$, $z = Z R_o$, $k = K/R_o$, then (2.6) becomes

$$\psi = A \log R + A \log R_o + \frac{BR_o^2 R^2}{2} + \sum A_n R R_o I_n' (nKR) \cos n\zeta \quad (5.1)$$

As long as $|A| \neq 0$ we can divide by $|A|$ and obtain

$$\Psi_{\pm} = (\frac{\psi}{|A|} - \log R_o) = \pm \log R + \frac{R^2}{2} \frac{BR_o^2}{|A|} + \sum \frac{A_n R}{|A|} R I_n' (nKR) \cos n\zeta \quad (5.2)$$

the \pm before $\log R$ giving the two possible directions of the current in the central rod. We can choose R_o to be any scaling length and we select it to make the coefficient of $\frac{R^2}{2}$ equal to unity. Writing $\bar{A}_n = A_n R_o / |A|$ we obtain

$$\Psi_{\pm} = \pm \log R + \frac{R^2}{2} + \sum \bar{A}_n R I_n' (nKR) \cos n\zeta \quad (5.3)$$

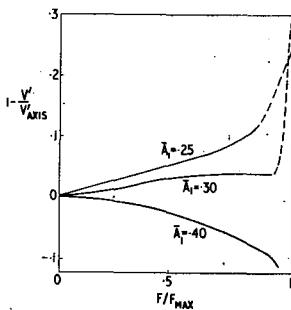
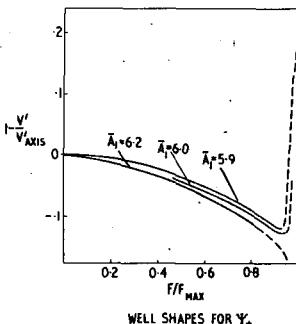
with Ψ_{\pm} depending therefore only on the parameters K and \bar{A}_n .

Results of the calculation for the particular case where only $\bar{A}_1 \neq 0$ have already been shown in figures 3 and 4. The parameter values, and the axis/separatrix field ratio Q are:

TABLE I

Figure	Sign of $\log R$	\bar{A}_1	K	Q
3a	-	0.25	0.95	1.33
3b	-	0.30	0.95	1.40
3c	-	0.40	0.95	0.53
4a	+	5.9	0.142	1.23
4b	+	6.0	0.140	1.24
4c	+	6.2	0.135	.51

The quantity Q gives a crude, (and as we shall see later sometimes misleading,) measure of the mean magnetic well. To get a clearer picture one must evaluate $\frac{dV}{dF} = \int \frac{d\ell}{B}$ as a function of the flux surface ψ . To do this the volume V and flux F were computed by direct numerical integration and are shown in figure 5, for the case Ψ_+ and figure 6 for Ψ_- . Note that we have plotted $(1 - \frac{V'}{V(0)})$ along the vertical axis so that a magnetic well, $V'' < 0$, does have the appearance of a potential well.

FIG. 5. Well shapes for ψ_- .FIG. 6. Well shapes for ψ_+ .

In both figure 5 and 6 a striking feature is that almost all the overall change in V' (which is measured by Q) occurs in the immediate vicinity of the separatrix; the change here was so rapid that the numerical technique used to evaluate V' was unable to follow it accurately. Furthermore in figure 6 it will be seen that V'' is positive over most of the range and the existence of a mean magnetic well is due entirely to the large change which occurs in the immediate vicinity of the separatrix.

As the value of \bar{A}_1 is changed the behaviour of V' over the inner region varies smoothly but in the outer layer near the separatrix rapid variations occur, particularly as \bar{A}_1 passes through the critical value for which there is a change in the topology of the magnetic surfaces. At this point Q changes discontinuously from a value greater than unity to a value less than unity. In fact it will be shown in section 8 that the largest values of Q occur just as the well is about to disappear in this way. This is because these large

values of Q are due entirely to the anomalous behaviour of V' in the neighbourhood of the separatrix.

It is apparent, therefore, that while Q may be a measure of the overall depth of the well it gives no indication of its shape which departs drastically from the simple parabolic well which one may be tempted to assume. Clearly then one must interpret Q with great caution.

6. Magnetic Wells without central rod

In the work of Furth and Rosenbluth, and in the examples discussed so far in this paper, the current in the central rod plays an essential role. Indeed in the original arguments of Furth and Rosenbluth the creation of a stagnation point and the formation of the separatrix are attributed to the field of this central rod. From a practical viewpoint this rod is inconvenient and it is of interest to enquire whether one can create helical negative V'' systems without the need for the central conductor, i.e. with $A = 0$ in equation (2.6).

We have seen in the earlier sections that the formation of a negative V'' well is related to the existence and location of minima and saddle points in Ψ . Our object then is to construct a function Ψ of the form

$$\Psi = \frac{Br^2}{2} + \sum A_n r I'_n(nkr) \cos n\xi \quad (6.1)$$

which has a minimum and a saddle point, with the latter at a smaller radius than the former. To show that this is possible we first note, for example, that if $A_1 = 0$ and $|k A_2| > |B|$ there will be a saddle point actually at the origin! Then at larger values of r the term in A_3 will become important and if its sign is appropriately chosen can give rise to a minimum at some radius r_0 . More specifically, if we assume $kr \ll 1$ we can write

$$\Psi = \frac{Br^2}{2} + \frac{A_2 kr^2}{2} \cos 2\xi + \frac{9}{16} A_3 k^2 r^3 \cos 3\xi \quad (6.2)$$

which has a saddle point at $r = 0$ (provided $|k A_2| > |B|$) and the $\Psi = 0$ contour, the separatrix, is a closed curve if for example, $B > 0$, $A_2 < 0$, $A_3 > 0$ and

$$\cos^{-1} \left(\frac{-B}{k A_2} \right) < \frac{\pi}{3} \quad (6.3)$$

To confirm the existence of such helical negative V'' configurations in the absence of a central conductor, a further series of numerical computations was carried out.

As before the independent variables are scaled so that

$$\bar{\Psi} = R^2 - R I_2' (2KR) \cos 2\xi + \bar{A}_3 R I_3' (3KR) \cos 3\xi \quad (6.4)$$

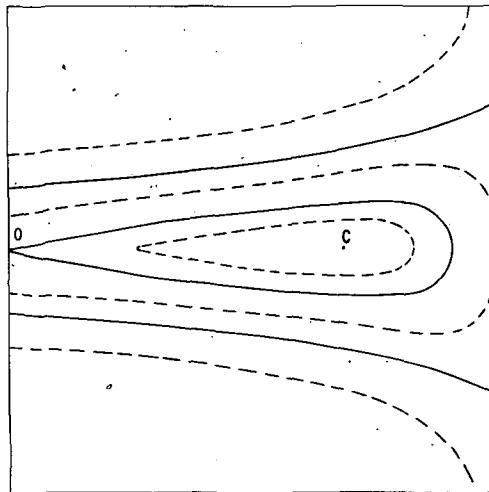
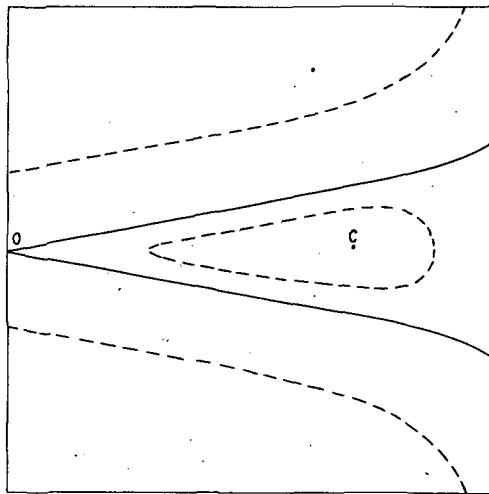
Figure 7 shows the contours for $\bar{A}_3 = 0.4$, $K = 2.3$. Another example is shown in figure 8 for $\bar{A}_3 = 0.4$, $K = 2.4$. As we have placed the saddle point at the origin, 0, the well depth, as measured by the ratio of fields at the axis and on the separatrix, is now just $Q = 1 + k^2 r_A^2$. However in the second example the separatrix does not close around the magnetic axis so that Q can not be used as a measure of the well depth.

By calculating the volume and flux associated with each surface, as before, the true well shapes have been computed and are shown in figure 9. It will again be noted that near the separatrix V' varies rapidly and is very sensitive to the value of the parameters. An interesting feature of the $K = 2.4$ curve is that a well exists and $V'' < 0$ even though the surface through the stagnation point does not close around the magnetic axis.

7. V'' on Magnetic Axis

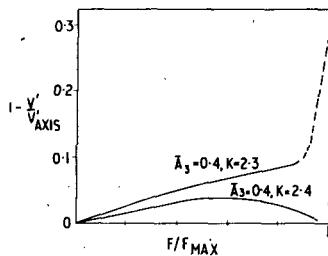
To obtain a full description of the magnetic well one must compute the volume V and flux F as functions of Ψ as we have done for several examples above. However, for an initial survey of possible helical fields some simpler method of assessment is desirable. The separatrix/axis field ratio Q is one possible "figure of merit", which can be determined simply from a knowledge of the Ψ -surfaces, and is useful as a measure of the overall 'well-depth'. Another useful parameter is the value of V'' on the magnetic axis. This gives the "curvature" of the well at its centre and can be evaluated analytically for an arbitrary magnetic axis. By considering Q and $V''(0)$ together one should get a realistic picture of the magnetic well.

For magnetic fields in hydromagnetic equilibrium with a scalar pressure an expression for $V''(0)$ has been given by Mercier^[3]. The problem of

FIG. 7. Flux surface shape for I_2 and I_3 .FIG. 8. Flux surface shape for I_2 and I_3 .

finding $V''(0)$ for an arbitrary vacuum magnetic field which possesses magnetic surfaces has also been solved^[4].

To obtain $V''(0)$ one first sets up a local coordinate system in the neighbourhood of the arbitrary magnetic axis, using the procedure developed by Mercier. If s is the distance along the magnetic axis and $\underline{X}(s)$ the position

FIG. 9. Well shapes for I_2 and I_3 .

vector of a point on it, then a general point near the axis has a position vector

$$\underline{R} = \underline{x}(s) + \underline{n}(s) \rho \cos \theta + \underline{b}(s) \rho \sin \theta \quad (7.1)$$

where \underline{n} and \underline{b} are the unit normal and binormal vectors of the axis. Coordinates ρ and θ are such that, in a plane normal to the axis, ρ is the radial distance from the axis and θ the angle between ρ and the normal. If we now expand the potential ϕ and flux function ψ in powers of ρ :

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0(s) + \rho^2 \psi_2(\theta, s) + \rho^3 \psi_3(\theta, s) \dots \\ \psi &= \rho^2 \psi_2(\theta, s) + \rho^3 \psi_3(\theta, s) \dots \end{aligned} \quad (7.2)$$

one can then show⁽⁴⁾ that V'' on the axis is given by

$$V'' = \frac{-8}{\left[\int_0^{2\pi} \phi'_0 R_1^2 d\theta \right]^2} \int_0^L ds \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ \frac{\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial s} - \frac{1}{T} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \right)}{\phi'_0} \frac{R_1^4}{4} + 2 R_1^2 R_2 \epsilon \cos \theta \right. \\ \left. + \frac{R_1^4}{4} \epsilon^2 \cos^2 \theta \right\} \quad (7.3)$$

where $T(s)$ is the radius of torsion of the axis, $\epsilon^{-1}(s)$ its radius of curvature, $R_1^2 = (\psi_2)^{-1}$, $R_2 = -\psi_3/2(\psi_2)^2$, and $\phi'_0 = d\phi_0/ds$. The quantities ϕ_n and ψ_n are related by the requirement that $\nabla \phi \cdot \nabla \psi = 0$.

For helically symmetric fields the magnetic axis is a helix having the same pitch as the field symmetry. In this case the formula for $V''(0)$ simplifies considerably for we can write

$$\psi_2 = a + b \cos(2\theta + d) = a + b \cos 2\alpha \quad (7.4)$$

where a, b and d are constants. The corresponding potential quantity ϕ_2 is then given by $\phi_0 = -x$

$$\phi_2 = \frac{bx}{2aT} \sin 2u \quad \text{where} \quad x^2 = a^2 - b^2 \quad (7.5)$$

and ψ_3 can be written:-

$$\psi_3 = \bar{p} \cos u + \bar{q} \sin u + \bar{r} \cos 3u + \bar{s} \sin 3u \quad (7.6)$$

where

$$\bar{p} = \epsilon \frac{(3a - b)}{4} \cos^d/2 \quad (7.7)$$

and

$$\bar{q} = \epsilon \frac{(3a - b)}{4} \sin^d/2 \quad (7.8)$$

On the axis V'' is then given by

$$\begin{aligned} \frac{(\phi_0')^2 V''}{L} &= \frac{b}{\pi axT^2} - \frac{3\epsilon b}{\pi x^3} \left[f(a - b) \bar{r} + g(a + b) \bar{s} \right] \\ &\quad + \frac{\epsilon^2}{4\pi x^3} \left[f^2(a - b) (4a^2 - 5ab + 3b^2) + g^2(a + b) \right. \\ &\quad \left. (4a^2 + 5ab + b^2) \right] \end{aligned} \quad (7.9)$$

where the volume is taken over one helical period of s -length L , $f \equiv \cos^d/2$, $g \equiv \sin^d/2$.

Before we can use the formula we must transform the stream function $\psi(r, \theta, z)$ (equation 2.6) from the original cylindrical coordinates (r, θ, z) to the local coordinates about the magnetic axis (ρ, θ, s) . The magnetic axis is a helix of pitch k wound on a cylinder of radius h , defined by $(\partial\psi/\partial r)_r = h = 0$. The appropriate transformation is:-

$$r \cos \theta = (h - \rho \cos(s/T)) + \gamma \rho \sin \theta \sin(s/T),$$

$$r \sin \theta = (h - \rho \cos \theta) \sin(s/T) - \gamma \rho \sin \theta \cos(s/T), \quad (7.10)$$

and $z = \gamma s + \frac{h}{T} \rho \sin \theta$

where $\gamma^{-1} = 1 + k^2 h^2$ and $T^{-1} = ky$

To carry out the transformation of (2.6) into the (ρ, θ, s) coordinates it is convenient to rewrite it in the form

$$\psi = \frac{\alpha r^2}{2} + \beta \log r + \sum_n g_n(r) r^n \cos n(\theta - kz) \quad (7.11)$$

where

$$g_n(r) \equiv \frac{A_n I'_n(r)}{r^{n-1}}$$

Then one obtains from the transformations

$$a = \frac{1}{2} (\alpha - \beta k^2)$$

$$b = a + (g_1 + 4hg_2 + 9h^2g_3 \dots) / 2\gamma h$$

$$\bar{q} = \bar{s} = 0$$

$$\bar{r} = \frac{a}{6h} (4 + k^2 h^2) + \frac{1}{h^2} \left[g_1 \frac{(8 - 5k^2 h^2)}{6} + 2hg_2 \frac{(4 - 9k^2 h^2)}{3} - \frac{39}{2} k^2 h^2 g_3 \dots \right]$$

$$- 2 \frac{d}{dr} \left[g_1 + 4 g_2 + 9 g_3 \dots \right] / 3h \dots \quad (7.12)$$

where the g 's are evaluated at $r = h$.

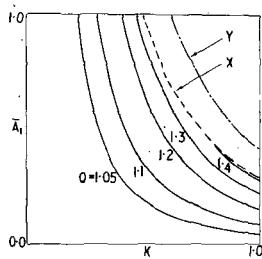
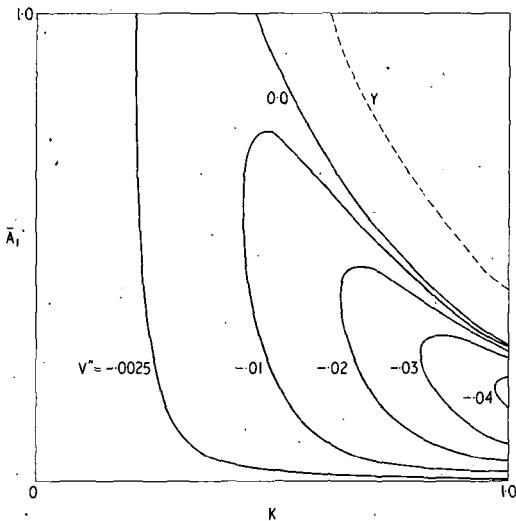
These expressions must now be inserted into (7.9) to give V'' on the axis.

However the quantity V'' of (7.9) has dimensions $(\text{length})^3 / (\text{flux})^2$. A suitable dimensionless quantity can be defined on multiplying it by $(\phi'_0)^2 r_A^2 / L$, where ϕ'_0 is the field on the axis, r_A the axis radius and L its periodic length. In the following it is this dimensionless quantity that is referred to as V'' .

8. A survey of helical, negative V'' fields

We have mentioned two criteria which may be used to gauge the existence and nature of the well in any helical field, the separatrix/axis field ratio (Q) and the value of V'' on the axis ($V''(0)$). These have been computed for a wide range of helical fields of the two types discussed in this paper.

Firstly we have the Furth Rosenbluth configuration characterised by the direction of the current in the central rod and the two parameters K and \bar{A}_1 introduced in section 5. For Ψ as defined in (5.3) Figures 10 and 11 show Q and $V''(0)$ for \bar{A}_1 and K between 0 and 1. For small K one can show that $Q \approx 1 + K^2 \bar{A}_1$ and its value increases with K and \bar{A}_1 as the line X is approached.

FIG. 10. Ψ . field; Q as a function of K and \bar{A}_1 .FIG. 11. Ψ . field; $V''(0)$ as a function of K and \bar{A}_1 .

This line corresponds to flux surface shapes as shown in Figure 3(b). Points above the line give flux surface topology like Figure 3(c) and have $Q < 1$; below the line the flux surfaces are as in Figure 3(a) and $Q > 1$. Q attains its maximum value on X ($Q = 1.41$ at $K = .98$, $\bar{A}_1 = .28$) and changes discontinuously across it. For these points near X with large Q -values the wells are of the type in which the change in V' is almost entirely confined to the neighbourhood of the separatrix. Small field changes can substantially alter the properties of such wells.

Although above X the quantity Q does not indicate a well, a magnetic axis still exists as far as line Y (of Figure 11) and one can compute $V''(0)$ in this region. Close to Y one finds $V''(0) > 0$ but further away $V''(0) < 0$.

One concludes therefore that Q and $V''(0)$ give a roughly similar picture of the well properties attaining their maximum favourable values in the same region of the (\bar{A}_1, K) plane.

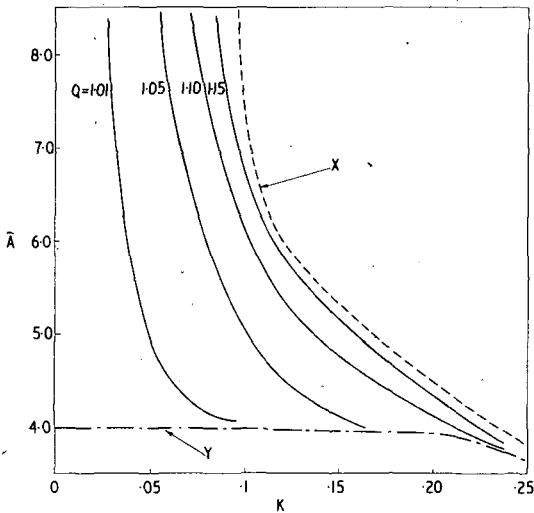
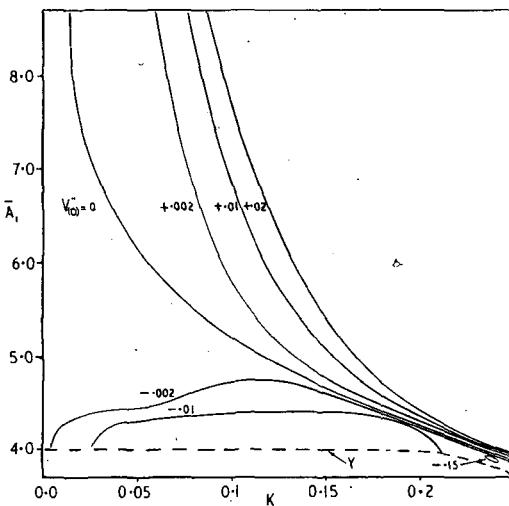
Figures 12 and 13 show Q and $V''(0)$ for Ψ_+ . For this case the parameter values for which $Q > 1$ are more severely restricted. The boundary X (of Figure 12) again marks the occurrence of a change in flux surface topology. (i.e. the point at which D of Figure 2 falls below B). The boundary Y is the line on which points B and C of Figure 2 coalesce and the minimum in Ψ disappears; along it $Q = 1$. For small $K\bar{A}_1$ one can show that

$$Q = 1 + \frac{K^2 \bar{A}_1}{8} \left[(\bar{A}_1)^2 - 16 \right]$$

Q increases with K attaining a maximum value of approximately 1.2 along most of the line X and falls discontinuously on crossing X to a value less than unity.

In the region where the overall well depth, Q , is greater than unity the value of V'' takes both positive and negative values, as shown in Figure 13. In particular the fields that have the greatest well depth measured by Q actually have large positive $V''(0)$. The reason for this difference lies in the detailed well shape shown in Figure 6. For Ψ_+ the deepest wells are not centred on the magnetic axis but occur in an annular region near the separatrix.

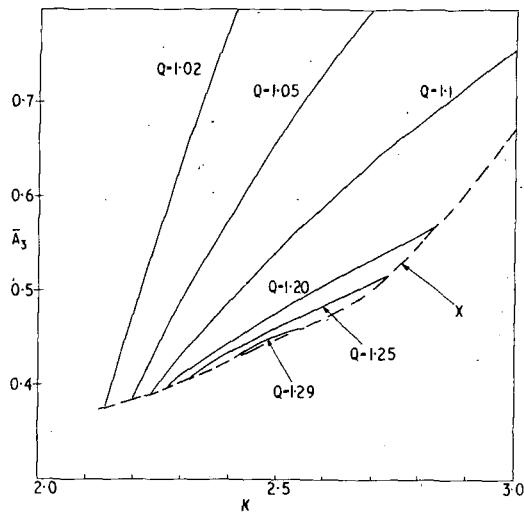
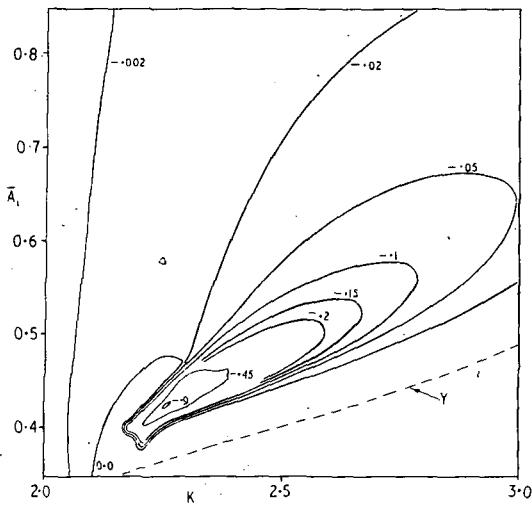
The well without a central rod discussed in section 6 depends on the parameters K and \bar{A}_3 . For this configuration Q is shown in Figure 14. The lower limit, line X , corresponds to fields for which the separatrix through the origin no longer closes about the magnetic axis. As in the other examples the maximum Q ($= 1.29$) occurs on this boundary. Figure 15 shows the values of $V''(0)$ for the same range of parameters. The lower boundary in this figure, line Y , indicates where Ψ no longer has a minimum and the magnetic axis disappears. Near Y the value of $V''(0) > 0$ but in general $V''(0) < 0$ even in some places where $Q < 1$. The behaviour of $V''(0)$ for $K < 2.3$, $\bar{A}_3 < 0.45$ is very complex, as shown in Figure 15, with neighbouring points differing substantially in magnitude and sign. Apart from this region however, the quantities Q and $V''(0)$

FIG. 12. Ψ_+ field; Q as a function of K and \bar{A}_1 .FIG. 13. Ψ_+ field; $V''(0)$ as a function of K and \bar{A}_1 .

both show the existence of wells over similar ranges of the parameters and indicate a similar position for those of greatest depth.

9. Summary

The stream function formalism provides a convenient and general method of examining helical magnetic fields and for investigating their possible negative V'' properties. Two classes of helical field have been examined in detail, the

FIG. 14. I_2, I_3 field; Q as a function of K and \bar{A}_3 .FIG. 15. I_2, I_3 field; $V''(0)$ as a function of K and \bar{A}_3 .

configuration proposed by Furth and Rosenbluth and a new configuration having the advantage that it does not require a central conductor.

The existence of negative V'' wells in helical fields is related to the topology of the magnetic surfaces which in turn is associated with the location of the stationary points of the stream function ψ and some possible forms for the magnetic surfaces have been illustrated. The exact form of the magnetic

well and the variation of $\int \frac{d\ell}{B}$ across it has been computed for several examples and an exhaustive survey of possible wells has been made in terms of two convenient 'figures of merit'; the separatrix/axis field ratio Q and the value of V" on the magnetic axis.

The use of Q alone has a serious drawback in that it attains its largest values for field configurations close to those at which the well ceases to exist at all. The explanation for this lies in the detailed shape of the well; as the overall depth of the well increases so does the steepness of the sides until the variation of $\int \frac{d\ell}{B}$ is confined almost entirely to the boundary. A further small change in the field can then destroy the well completely. For this reason the use of Q alone as a measure of the well is not recommended. For a full description of the magnetic well one must resort to numerical evaluation of V'; this can again be fairly easily carried out in any specific case in terms of the stream function ψ .

REFERENCES

- [1] Furth, H.P. and Rosenbluth, M.N., Bull. Am. Phys. Soc. 10 (1965) 198.
- [2] Whiteman, K.J. Culham Report CLM P14 (1962).
- [3] Mercier, C., Nuclear Fusion 4 (1964). 213.
- [4] Whiteman, K.J., McNamara, B. and Taylor, J.B. To be published.



ЗАМКНУТЫЕ КОНФИГУРАЦИИ С МИНИМУМОМ В

Л.С.СОЛОВЬЕВ и В.Д.ШАФРАНОВ
ИНСТИТУТ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ им.И.В.КУРЧАТОВА, МОСКВА
СССР

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

CLOSED MINIMUM-B CONFIGURATIONS. The authors study the possibility of creating closed toroidal magnetic field configurations that satisfy the stability criterion of a low-pressure plasma $V''(\psi) < 0$, where V is the volume bounded by a magnetic surface with the longitudinal flux ψ . Attention is paid mainly to configurations whose magnetic axis is a spatial curve characterized both by curvature k and by torsion (figure-eight systems of the stellarator type). Unlike the "plane" configurations (whose magnetic axis is a plane curve), the spatial configurations satisfying the minimum-B condition $V'' < 0$ are smoother. In such configurations the cross-section of the toroidal magnetic surfaces can be made constant along the length of the system and to differ little from the round cross-section. Another important property of such configurations is a finite shift of the magnetic field lines (shear), which gives the configuration a certain stability relative to the perturbations of the magnetic field, and also ensures the elimination of drift instabilities. For the creation of a minimum-B configuration, in addition to the fundamental longitudinal magnetic field, one must superpose on the magnetic axis a transverse component with multipole orders $\ell = 2$ (quadrupole field) and $\ell = 3$. The simplest representative of the spatial minimum-B configurations is an unclosed helical-axis configuration. The magnetic surfaces in the transverse section that is perpendicular to the magnetic axis in the polar system of co-ordinates are described by

$$\rho = \rho_0 - \rho_0 \epsilon (\cos 2\theta)/2 - \rho_0^2 q \cos 3\theta$$

where ρ_0 is the mean radius of the transverse section of the magnetic surface, ϵ is a dimensionless coefficient smaller than unity, q is a variable parameter having the dimension of reciprocal length, and θ is the vectorial angle made by the principal normal to the magnetic axis. The condition $V'' < 0$ is reduced to the requirement $\epsilon (5/4 + 6q/k) > 1$ that is easily fulfilled for comparatively small values of ϵ and q . Analogous conditions are obtained also for closed spatial configurations, though in this case magnetic surfaces with constant ϵ and q can be obtained only if the stabilizing fields with $\ell = 2$ and $\ell = 3$ are distributed in a special (non-uniform) way along the system.

CONFIGURATIONS FERMÉES A B MINIMUM. Les auteurs étudient la possibilité de créer des champs magnétiques à configuration toroïdale fermée, conformes aux critères relatifs à la stabilité du plasma de basse pression $V''(\psi) < 0$, où V est le volume limité par une surface magnétique à flux longitudinal ψ . Ils s'attachent surtout aux configurations dont l'axe magnétique est une courbe dans l'espace caractérisée à la fois par la courbure k et la torsion (systèmes «spatiaux» du type stellarator en forme de huit). Contrairement aux configurations «planes» (dont l'axe magnétique est une courbe plane), les configurations «spatiales» qui satisfont à la condition de B minimum $V'' < 0$ sont plus lisses. Dans ces configurations, la section des surfaces magnétiques toroïdales peut être rendue homogène le long du système et se distingue alors peu de la section circulaire. Une autre propriété importante de ces configurations est un déplacement final des lignes de force du champ magnétique (croisement), ce qui assure une certaine résistance aux perturbations de ce champ et l'élimination des instabilités de dérive. Pour obtenir des configurations à B minimum sur l'axe magnétique, il est non seulement indispensable de disposer du champ magnétique longitudinal de base, mais aussi d'appliquer une composante transversale à multipolarité $\ell = 2$ (champ quadripolaire) et $\ell = 3$. La variante la plus simple d'une configuration spatiale à B minimum est la configuration non fermée dont l'axe est hélicoïdal. Les surfaces magnétiques d'une section perpendiculaire à l'axe magnétique dans un système de coordonnées polaires se trouvent alors décrites par la formule:

$$\rho = \rho_0 - \rho_0 \epsilon (\cos 2\theta)/2 - \rho_0^2 q \cos 3\theta$$

ou ρ_0 est le rayon moyen de la section de la surface magnétique, ϵ un coefficient sans dimension inférieur à un, q le paramètre arbitraire de dimension relatif à la longueur inverse et θ l'angle azimutal mesuré à partir de la normale principale à l'axe magnétique. La condition $V'' < 0$ se réduit à l'inégalité: $\epsilon(5/4 + 6q/k) > 1$ qui est facile à satisfaire pour des valeurs de ϵ et de q relativement faibles. On trouve aussi des conditions analogues pour les configurations spatiales fermées dans lesquelles on ne peut toutefois obtenir des surfaces à paramètres ϵ et q constants que si les champs stabilisateurs à multipolarité $\ell = 2$ et $\ell = 3$ sont répartis le long du système selon un mode particulier (non homogène).

ЗАМКНУТЫЕ КОНФИГУРАЦИИ С МИНИМУМОМ В. Изучается возможность создания замкнутых тороидальных конфигураций магнитного поля, удовлетворяющих критерию устойчивости плазмы низкого давления $V''(\psi) < 0$, где V – объем, ограниченный магнитной поверхностью с продольным потоком ψ . Основное внимание уделяется конфигурациям, магнитная ось которых является пространственной кривой, характеризующейся наряду с кривизной k , а также и кручением ("пространственные" системы типа stellaratora в форме восьмерки). В отличие от "плоских" конфигураций (магнитная ось которых является плоской кривой), пространственные конфигурации, удовлетворяющие условию минимума $V'' < 0$ являются более гладкими. Сечение тороидальных магнитных поверхностей в таких конфигурациях может быть сделано однородным по длине системы и мало отличающимся от круглого. Другим важным свойством таких конфигураций является наличие конечного сдвига силовых линий магнитного поля (шир), что обеспечивает определенную устойчивость конфигурации относительно возмущений магнитного поля, а также стабилизацию дрейфовых неустойчивостей. Для создания конфигурации с минимумом V на магнитной оси необходимо кроме основного продольного магнитного поля наложить поперечную составляющую с мультипольностью $\ell = 2$ (квадрупольное поле) и $\ell = 3$. Простейшим представителем пространственных конфигураций с минимумом V является незамкнутая конфигурация с винтовой осью. Магнитные поверхности в перпендикулярном к магнитной оси сечении в полярной системе координат описываются в этом случае формулой

$$\rho = \rho_0 - \rho_0 \epsilon (\cos 2\theta) / 2 - \rho_0^2 q \cos 3\theta,$$

где ρ_0 – средний радиус сечения магнитной поверхности, ϵ – безразмерный коэффициент, меньший единицы, q – произвольный параметр размерности обратной длины, а θ – азимутальный угол, отсчитываемый от главной нормали к магнитной оси. Условие $V'' < 0$ сводится к требованию $\epsilon(5/4 + 6q/k) > 1$, легко выполнимому при сравнительно небольших значениях параметров ϵ и q . Аналогичные условия получаются и для замкнутых пространственных конфигураций, в которых, однако, магнитные поверхности с постоянными параметрами ϵ и q можно получить лишь при специальном (неоднородном) распределении стабилизирующих полей с $\ell = 2$ и $\ell = 3$ вдоль системы.

CONFIGURACIONES CERRADAS DE B MINIMO. Se estudia la posibilidad de obtener configuraciones del campo magnético, toroidales, cerradas, que satisfagan el criterio de estabilidad de un plasma de baja presión $V''(\psi) < 0$, en donde V es el volumen limitado por la superficie magnética con flujo axial ψ . Se ha prestado la mayor atención a las configuraciones cuyo eje magnético es una curva espacial, que se caracteriza, por la curvatura k , y por la torsión (sistemas especiales del tipo "stellarator", la forma de ocho). A diferencia de las configuraciones "planas" (cuyo eje magnético es una curva plana), las configuraciones especiales que satisfacen la condición de B mínimo $V'' < 0$ son más lisas. La sección de las superficies magnéticas toroidales de dichas configuraciones puede hacerse homogénea a lo largo del sistema y diferir poco de una sección circular. Otra propiedad importante de estas configuraciones es la presencia de un desplazamiento finito, de las líneas de fuerza del campo magnético (shear), que confiere determinada estabilidad a la configuración frente a las perturbaciones del campo magnético, y también una estabilización de las inestabilidades de deriva. Para obtener la configuración de B mínimo, es necesario situar en el eje magnético, además del campo magnético axial fundamental, una componente transversal con multipolaridad $\ell = 2$ (campo cuadrupolar) y $\ell = 3$. El representante más sencillo de las configuraciones especiales de B mínimo es la configuración abierta de eje helicoidal. Las superficies magnéticas, en la sección perpendicular al eje magnético en un sistema de coordenadas polares, están representadas en este caso, por la fórmula

$$\rho = \rho_0 - \rho_0 \epsilon (\cos 2\theta) / 2 - \rho_0^2 q \cos 3\theta$$

en donde ρ_0 = radio medio de la sección de la superficie magnética, ϵ = coeficiente adimensional, menor que la unidad, q = parámetro cuya dimensión es la inversa de una longitud, y θ = ángulo azimutal, contado a partir

de la normal principal al eje magnético. La condición $V'' < 0$ se expresa en la forma $\epsilon (5/4 + 6 q/k) > 1$ que se cumple con facilidad para valores relativamente pequeños de los parámetros ϵ y q . Se obtienen condiciones análogas para las configuraciones espaciales cerradas aunque en este caso las superficies magnéticas con los parámetros ϵ y q constantes se pueden obtener solamente cuando los campos estabilizadores con $\ell = 2$ y $\ell = 3$ están distribuidos de modo especial (no homogéneo) a lo largo del sistema.

В В Е Д Е Н И Е

В работах Мерсье [1], Фюрта и Розенблута [2], Ленарда [3] Джонсона [4], Фюрта [5] приведены примеры конфигураций магнитного поля, удовлетворяющих условию наличия минимума на магнитной оси усредненного образом магнитного поля \vec{B} . Это условие, являющееся критерием гидромагнитной устойчивости плазмы низкого давления, формулируется для конфигураций с непрекрученными силовыми линиями как требование убывания при переходе к наружным магнитным поверхностям функции [6]

$$U = \oint \frac{d\ell}{B} \quad (1)$$

где интеграл берется вдоль силовой линии по периоду поля. Магнитные поверхности образуются линиями, для которых $U = \text{const}$

Из теории равновесия плазмы в магнитном поле следует, что обобщением функции U на случай конфигураций магнитного поля с прокрученными силовыми линиями является производная объема V , ограниченного тороидальной магнитной поверхностью, по продольному магнитному потоку ϕ внутри этой поверхности

$$U = \frac{\delta V}{\delta \phi} = V'(\phi) \quad (2)$$

Условие минимума B (максимума U) можно записать в виде

$$V''(\phi) < 0 \quad (3)$$

Выражение для $V''(\phi)$, как мы увидим ниже, удобно для расчета не только в случае конфигураций с прокрученными силовыми линиями, но также и в случае конфигураций с замкнутыми силовыми линиями, если их рассматривать как предельный случай конфигураций со слабым прокручиванием.

Следует иметь ввиду, что критерий $V''(\phi) < 0$ нельзя считать достаточным условием устойчивости, так как он получен для плазмы исчезающее малого давления в предположении, что магнитные поверхности заданы, и не касается вопроса их устойчивости относительно

возмущений магнитного поля. Если форма магнитных поверхностей неустойчива относительно малых возмущений магнитного поля, то данная конфигурация прежде всего трудна для практического осуществления, так как требует повышенной точности в создании требуемых магнитных полей. Но даже и при достижении желаемой точности создания поля, неустойчивость магнитной конфигурации неизбежно проявится при наличии плазмы с не равным нулю давлением, так как токи в плазме приводят к определенному искажению магнитного поля. Поэтому условие (3) можно рассматривать в общем случае лишь как минимум требований, предъявляемых к конфигурациям магнитного поля, в которых предполагается создавать высокотемпературную плазму.

Целью настоящей работы является исследование конфигураций магнитного поля, удовлетворяющих этому минимуму требований и доступных практическому осуществлению. В отличие от работ [2-5] мы рассматриваем замкнутые тороидальные конфигурации магнитная ось которых, по необходимости, обладает кривизной. Пример незамкнутой конфигурации с кривизной (конфигурация с винтовой симметрией) был рассмотрен Фюртом [5]. Из частного примера, однако, трудно делать заключения о том, от каких характеристик поля зависит знак и абсолютная величина второй производной объема по потоку. Как следует из наших расчётов критерий устойчивости существенно зависит от кривизны магнитной оси. Наличие кривизны оси открывает ряд новых возможностей создания конфигураций с минимумом V .

Рассматриваемые нами конфигурации представляют собой, в общем случае, суперпозицию неоднородного на оси продольного магнитного поля $B_o(\rho)$ и мультипольных гармоник, зависящих от азимутального угла ω по закону $\cos m\omega, \sin m\omega$ с $m=2, 3, \dots$. Если ось координатной системы выбрать на магнитной оси, то выражение для продольного потока ϕ можно представить в виде разложения по степеням расстояния ρ от магнитной оси, начиная со второй. Для расчёта $V''(\phi)$ вблизи магнитной оси достаточно ограничиться учётом членов с ρ^2 и ρ^3 . Так как амплитуды мультипольных гармоник степенным образом зависят от ρ , то вклад в $V''(\phi)$ дают гармоники с небольшим номером m , а именно, как будет видно из дальнейшего, лишь гармоники с $m=2$ и $m=3$. Беря различные комбинации этих гармоник, можно получить все возможные конфигурации, удовлетворяющие необходимому условию устойчивости $V''(\phi) < 0$. Безразмерным параметром разложения по степеням ρ является отношение $2\pi\rho/\lambda$, где λ - минимальный продольный период магнитного поля. Поэтому полученные ниже формулы пригодны лишь для слабо неоднородных вдоль оси конфигураций.

Используемый нами метод расчёта был развит в работах Мерсье [I], где получено также и общее выражение для локального критерия устойчивости плазмы. Однако, критерий Мерсье, полученный с учетом давления плазмы, записан в столь общей форме, что с его помощью трудно делать конкретные заключения об устойчивости той или иной конфигурации магнитного поля. При получении выражения для $V''(\phi)$ мы с самого начала ограничиваемся вакуумными полями, что приводит к существенному упрощению как расчётов так и выводов.

МЕТОД РАСЧЁТА

Интересующие нас магнитные конфигурации представляют собой систему тороидальных магнитных поверхностей. Прямой задачей является расчёт магнитных поверхностей $\Psi(\vec{r}) = \text{const}$ по заданному магнитному полю $\vec{B}(\vec{r})$. Однако, эта прямая задача в общем случае весьма сложна. Если не касаться вопроса об устойчивости магнитных поверхностей (т.е. о влиянии возмущений поля на форму магнитных поверхностей), то для наших целей достаточно решения обратной задачи – нахождения тех полей, которые нужны для создания заданной магнитной конфигурации.

В рамках такого подхода оказывается возможным также и частичное решение задачи об устойчивости конфигурации.

Итак, будем считать, что магнитная ось нашей конфигурации является заданной замкнутой кривой, обладающей кривизной $k(s)$ и кручением $\alpha(s)$, где s длина дуги вдоль оси. Эту ось мы принимаем за ось координатной системы. В каждом нормальном к оси сечении вводятся полярные координаты ρ, ω . За координатные поверхности $\omega = \text{const}$ примем поверхности, проходящие через ось и ортогональные к поверхностям $\vartheta = \text{const}$ (рис. I). Эти поверхности в дифференциальной геометрии называются поверхностными полосами кривизны [7]. Метрика получающейся ортогональной системы координат задается квадратом элемента длины (см. I, 8)

$$d\ell^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 + [1 - k(s)\rho \sin \theta]^2 ds^2, \quad \theta = \omega - \alpha(s) \quad (4)$$

где $\alpha(s)$ – угол, который составляет главная нормаль к оси с поверхностью $\omega = 0$. Этот угол выражается интегралом от кручения оси

$$\alpha = \int_0^s \alpha(s) ds \quad (5)$$

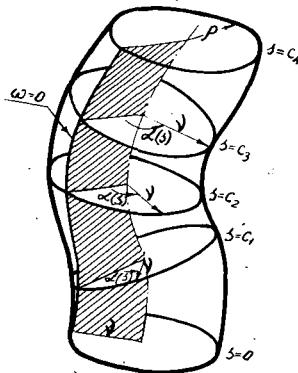


Рис.1. Координатные поверхности $\rho = \text{const}$, $\omega = 0$ и $s = \text{const}$. Угол главной нормали n с поверхностью $\omega = 0$ (заштрихованная поверхность) равен $\alpha(s) = \int_0^s k(s')ds'$.

Уравнение магнитной поверхности в рассматриваемом нами приближении можно представить в виде [1]

$$\begin{aligned} \Psi(\rho, \omega, s) = & B_0(s) \left\{ [a(s) + b(s) \cos 2u] \rho^2 + \right. \\ & \left. + a(s) [\alpha_1(s) \cos u + \alpha_2(s) \sin u + \alpha_3(s) \cos 3u + \alpha_4(s) \sin 3u] \rho^3 \right\} = \text{const} \end{aligned} \quad (6)$$

Члены, линейные по ρ , в этом выражении отсутствуют, так как точка $\rho = 0$, в согласии с нашим требованием является эллиптической особой точкой ($\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} = 0$, $\frac{\partial \Psi}{\partial \omega} = 0$) сечений магнитных поверхностей плоскостью $s = \text{const}$. Во втором приближении по ρ нормальные сечения магнитных поверхностей представляют собой эллипсы

$$\rho^2(a + b \cos 2u) = \text{const} \quad (7)$$

с эксцентризитетом

$$\varepsilon(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \quad (8)$$

(Напомним, что отношение полуосей эллипса связано с эксцентризитетом ε соотношением $\ell_1/\ell_2 = \sqrt{(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)}$). В общем случае эти эллипсы вращаются при движении вдоль оси s . Пусть малая ось эллипса составляет с главной нормалью к магнитной оси угол δ (рис. 2). Тогда

$$u = \omega - \alpha(s) + \delta(s) \quad (9)$$

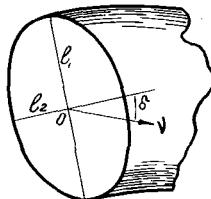


Рис.2. Ориентация эллиптического сечения магнитной поверхности относительно главной нормали v к магнитной оси.

причем $\delta(\beta)$ удовлетворяет условию

$$\delta(\beta+L) = \delta(\beta) + 2\pi n \quad (10)$$

где L - полная длина магнитной оси, n - целое число поворотов эллипса вокруг магнитной оси.

Функция $\delta(\beta)$ определяется винтовой обмоткой стабилизирующего поля и, в частности, при "равномерной" намотке равна $\delta = \delta' \beta$, где $\delta' = 2\pi n/L = \text{const}$.

Входящие в выражение для $\Psi(\rho, \omega, \beta)$ функции $a(\beta)$ и $b(\beta)$ связаны условием

$$a^2 - b^2 = c^2 = \text{const} \quad (II)$$

так что их можно выразить через одну периодическую функцию $\zeta(\beta)$. В случае $\epsilon < 1$ (эллипс) $c^2 > 0$, величины a и b можно представить в виде

$$a(\beta) = c \cosh \zeta(\beta) = \frac{c}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \quad (I2)$$

$$b(\beta) = c \sinh \zeta(\beta) = \frac{\epsilon c}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \quad (I3)$$

Члены третьего приближения в выражении для Ψ , вносящие существенный вклад в критерий устойчивости при наличии кривизны магнитной оси, несколько искают магнитные поверхности и приводят, в частности, к появлению сепаратриссы, ограничивающей систему замкнутых тороидальных магнитных поверхностей (рис. 3).

Магнитное поле, необходимое для создания магнитной конфигурации (б) определяется уравнениями

$$\vec{B} = \nabla \varphi \quad (I4)$$

$$\nabla \varphi \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (I5)$$

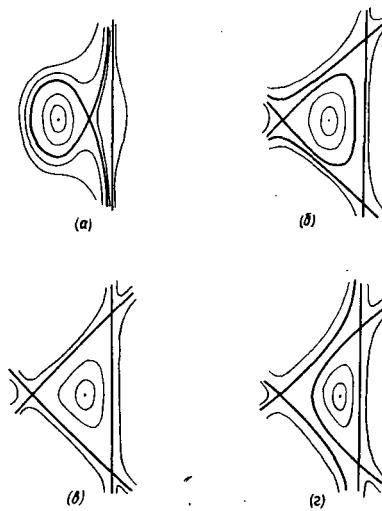


Рис.3. Сечение магнитных поверхностей в третьем приближении по ρ : а - сепаратрисса имеет одну точку; б - сепаратрисса имеет две особые точки; в - сепаратрисса имеет три особые точки.

Скалярный потенциал $\Psi(\vec{r})$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Его разложение по степеням ρ , записывается в виде

$$\Psi = \int_0^{\rho} B_0(s) ds + A(\omega, s)\rho^2 + B(\omega, s)\rho^3 + \dots \quad (16)$$

где функции $A(\omega, s)$ и $B(\omega, s)$ имеют следующую структуру

$$A(\omega, s) = -\frac{B_0'}{4} + A_1(s) \sin 2\omega s + A_2(s) \cos 2\omega s \quad (17)$$

$$B(\omega, s) = B_1(s) \cos \omega s + B_2(s) \sin \omega s + B_3(s) \cos 3\omega s + B_4(s) \sin 3\omega s \quad (18)$$

Амплитуды полей второй гармоники A_1 и A_2 связаны с параметрами магнитных поверхностей соотношениями

$$A_1 = B_0 \frac{\epsilon}{2} u' \quad (19)$$

$$A_2 = -B_0 \frac{t'}{4} \quad (20)$$

Для связи амплитуд поля B_1 , B_2 , B_3 , B_4 с параметрами поверхностей α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , получаются более громоздкие уравнения, которые мы здесь не приводим. Отметим только, что эти уравнения при заданном втором приближении (т.е. при

известных $\delta(\beta)$ и $\delta'(\beta)$) позволяют однозначно решить не только обратную, но и прямую задачу - определение поправок третьего приближения к магнитным поверхностям по заданному полю. Уравнение второго приближения (19-20) удобно использовать лишь для решения обратной задачи - определения поля, необходимого для создания заданных магнитных поверхностей. Для решения задачи о влиянии на форму магнитных поверхностей отклонений амплитуд второй гармоники поля ΔA_1 , ΔA_2 от требуемых значений A_1 , A_2 , можно воспользоваться методом возмущений, линеаризовав уравнения (19-20) по отклонениям $\Delta\zeta$, $\Delta\delta$, ΔA_1 , ΔA_2 . Как эта задача о возмущении магнитных поверхностей добавками к полю второй гармоники, так и задача о поправках третьего приближения, связанных с наличием поля первой и третьей гармоник, сводится к следующему уравнению для комплексной функции δ_m :

$$[\delta_m e^{-im\psi(\beta)}]' = F_m(\beta) e^{-im\psi(\beta)} \quad (21)$$

Здесь F_m - известная функция, связанная с амплитудами полей (например, при $m=2$: $\delta_2 = \Delta\zeta - 2i\Delta\zeta\Delta\delta$, $F_2 = -\frac{v}{B_0} [\Delta A_2 + i\omega\zeta\Delta A_1]$), штрихом обозначена производная по β . Через $\psi(\beta)$ обозначен следующий интеграл:

$$\psi(\beta) = \int_0^\beta \sqrt{1-\epsilon^2} u' ds \quad (22)$$

Заметим, что средний угол прокручивания магнитных силовых линий относительно координатной поверхности $\omega = \text{const}$ вблизи оси определяется формулой

$$\omega = \oint (\sqrt{1-\epsilon^2} u' - \delta') ds \quad (23)$$

так что, с учетом соотношения (10), получаем

$$\omega = \psi(L) - 2\pi n \quad (24)$$

Для решения уравнения (21) выделим в экспоненте линейную не-периодическую фазу

$$e^{-im\psi(\beta)} = e^{-im\omega_0\beta} e^{-im[\psi(\beta) - \omega_0\beta]} \quad (25)$$

где

$$\omega_0 = \frac{\psi(L)}{L} = \frac{\omega + 2\pi n}{L} \quad (26)$$

и разложим периодическую функцию $F_m(s) e^{-im[u(s)-x_0 s]}$ в ряд Фурье

$$F_m(s) e^{-im[u(s)-x_0 s]} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} F_{m\ell} e^{i\frac{2\pi}{L}\ell s} \quad (27)$$

$$F_{m\ell} = \frac{1}{L} \oint F_m(s) e^{im[x_0 s - u(s)] - i\frac{2\pi}{L}\ell s} \quad (28)$$

Так как исходная функция $\tilde{\mathcal{Z}}_m(s)$ должна быть периодической, ее также можно представить в виде аналогичного ряда Фурье. Определив из уравнения (21) коэффициенты разложения, получим решение [I]

$$\tilde{\mathcal{Z}}_m(s) = i e^{im[u(s)-x_0 s]} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{F_{m\ell}}{m x_0 - \frac{2\pi}{L}\ell} e^{i\frac{2\pi}{L}\ell s} \quad (29)$$

Обращение любого члена суммы в бесконечность означает отсутствие решения, т.е. неустойчивость данной конфигурации.

Из формулы (29) вытекает, что опасными для вакуумных магнитных поверхностей являются возмущения поля с гармониками, удовлетворяющими условию

$$m x_0 - \frac{2\pi}{L} \ell = 0 \quad (30)$$

Следует заметить, однако, что появление резонансных знаменателей в выражении (29) является следствием применяемого метода разложения по степеням ρ . При наличии зависимости угла прокручивания от ρ ("shear") резонансное воздействие возмущений поля проявляется в расщеплении магнитных поверхностей в окрестности замкнутых силовых линий 9. В частности, в окрестности магнитной оси может появиться m - лепестковая розетка. Таким образом, хотя магнитные поверхности и претерпевают качественное изменение, так как появляются новые системы вложенных друг в друга поверхностей, величина их искажения стремится к нулю при стремлении к нулю возмущающего поля. Можно надеяться поэтому, что возмущения с большими номерами гармоник $m \gg 1$ легко сделать не опасными за счёт уменьшения амплитуд возмущающих полей $F_{m\ell}$. Для того, чтобы избежать искажений магнитных поверхностей стабилизирующими полями, необходимо добиваться условий, при которых равенство (30) не выполнялось бы по крайней мере для небольших чисел m и n .

ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ УДЕЛЬНОГО ОБЪЕМА $V'(\phi)$
И УГЛА ПРОКРУЧИВАНИЯ $\zeta = 2\pi \int'(\phi)$

Для вычисления $V'(\phi)$ и $\int'(\phi)$ достаточно знать выражения объема δV , поперечного потока $\delta \zeta$ и продольного потока $\delta \phi$, заключенных между двумя бесконечно близкими магнитными поверхностями

$$\delta V = \oint d\delta \int dS (1 - k\rho \cos \theta) = \oint \delta \zeta (1 - \langle k\rho \cos \theta \rangle) \quad (31)$$

$$\delta \phi = \int B_s dS = \delta \zeta \langle B_s \rangle \quad (32)$$

$$\delta \zeta = \frac{1}{2\pi} \int \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \theta dV = \frac{1}{2\pi} \oint d\delta \left[\left\langle \frac{B_\omega}{\rho} (1 - k\rho \cos \theta) \right\rangle - \langle B_s \rangle \alpha'(\delta) \right] \delta \zeta \quad (33)$$

Здесь интегрирование по dS производится по площади поперечно-го сечения δS между двумя соседними магнитными поверхностями. Угловые скобки означают усреднение по этой площади. Из записанных в такой форме выражений получаются следующие удобные для расчёта формулы

$$V'(\phi) = \frac{\delta V}{\delta \phi} = \oint d\delta \frac{1 - \langle k\rho \cos \theta \rangle}{\langle B_s \rangle} \quad (34)$$

$$\zeta(\phi) = 2\pi \frac{\delta \zeta}{\delta \phi} = \oint d\delta \left\{ \frac{\left\langle \frac{B_\omega}{\rho} (1 - k\rho \cos \theta) \right\rangle}{\langle B_s \rangle} - \alpha'(\delta) \right\} \quad (35)$$

Формула (35) позволяет получить $\zeta(\phi)$ в виде разложения по степеням потока ϕ . Нулевой член этого разложения дается формулой (23). Для получения линейного по ϕ члена необходимо разложение скалярного потенциала ψ и магнитных поверхностей $\psi = \text{const}$ до четвертого порядка по степеням ρ включительно.

Для получения $V'(\phi)$ в линейном по ϕ приближении достаточно знать ψ и ψ' в третьем приближении разложения по ρ . Расчёт по формуле (34) приводит к следующему выражению удельного объема

$$V'(\phi) = \oint \frac{d\delta}{B_0} - \frac{\phi}{\pi} \oint \frac{d\delta}{B_0^2 \sqrt{1-\epsilon^2}} \left\{ \frac{k^2}{2} - \frac{3B_0'^2}{4B_0^2} - \frac{\epsilon'^2}{4} - \epsilon^2 (\delta' - \alpha')^2 - \right. \\ \left. - \epsilon \left(\frac{k^2}{2} \cos 2\delta - \frac{\epsilon' B_0'}{B_0} \right) - k \left[\frac{(2-\epsilon)\alpha_2 - 3\epsilon\alpha_3}{1+\epsilon} \cos \delta + \frac{(2+\epsilon)\alpha_2 - 3\epsilon\alpha_4}{1-\epsilon} \sin \delta \right] \right\} \quad (36)$$

Штрихом здесь обозначена производная по дуге δ . Используя полученное выражение, можно в принципе подобрать входящие в не-

го параметры магнитных поверхностей так, чтобы выполнялось условие $V''(\phi) < 0$ и затем найти соответствующие магнитные поля (заметим только, что среди функций $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ независимыми являются только две). Для практических целей больший интерес представляет проверка критерия $V''(\phi) < 0$ при заданных конкретных полях. Эта задача в ряде случаев также может быть решена.

Знание выражения $V'(\phi)$ в линейном по ϕ приближении позволяет оценить допустимое для данной системы давление плазмы. Из теории гидродинамической устойчивости [10] следует, что функция $-V(\phi)$ играет роль потенциальной энергии для плазмы низкого давления. Критическое значение параметра $\beta = 8\pi p/B^2$, при котором плазма является еще устойчивой, можно определить как величину, равную относительной глубине потенциальной ямы

$$\beta_{kp} = -\frac{V''(\phi)}{V'} \quad (37)$$

Из выражения (36) видно, что параметры третьего приближения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ входят только при наличии кривизны. Поэтому учёт кривизны открывает дополнительные возможности создания конфигураций с минимумом магнитного поля.

Кривизной можно пренебречь лишь при сравнительно небольшом продольном периоде λ магнитного поля

$$\left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \gg \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2$$

Здесь L — длина контура магнитной оси; в правой части неравенства стоит относительная модуляция магнитного поля (либо других параметров магнитной конфигурации).

В пренебрежении кривизной ($k=0, \alpha'=0$) критерий устойчивости имеет вид:

$$V''(\phi) = \frac{1}{\pi} \int \frac{d\delta}{B_0^2 \sqrt{1-\epsilon^2}} \left\{ \frac{3B_0'^2}{4B_0^2} + \frac{\zeta'^2}{\gamma} + \epsilon^2 \delta'^2 - \epsilon \frac{\zeta' B_0'}{B_0} \right\} < 0 \quad (38)$$

В подынтегральном выражении заведомо положительны все члены, кроме последнего. Поэтому стабилизация возможна только при одновременном изменении по δ продольного поля и эксцентриситета.

Случай $\delta' = 0$ был рассмотрен Фюртом и Розенблутом [2]. Учёт влияния члена с $\delta' \neq 0$ произведен в работах Мерсье [1] и Ленарда [3].

ЗАМЕЧАНИЕ О ЛОВУШКАХ С ГОФРИРОВАННЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

В гофрированных ловушках с замкнутыми силовыми линиями магнитные поверхности определяются условием $\nabla \Psi \nabla \Psi = 0$ неоднозначно. Эта неоднозначность находит свое выражение в том, что функция $\zeta(\beta)$, согласно уравнению (20) определяется при $\zeta' = 0$ через амплитуду поля A_2 с точностью до константы

$$\zeta(\beta) = -4 \int \frac{A_2}{B_0} + \zeta_0. \quad (39)$$

Предельный переход $\zeta' \rightarrow 0$ в уравнениях второго приближения является нетривиальным и фактически не позволяет определить константу ζ_0 . Для однозначного выделения семейства истинных магнитных поверхностей следует использовать условие

$$U = \oint \frac{d\ell}{B} = \text{const} \quad (40)$$

Расчет с помощью функции U приводит к тому же выражению (36) при $\delta' = \alpha' = 0$, но уже с определенным значением константы ζ_0 в выражении для $\zeta(\beta)$, что соответствует выделению нужного семейства магнитных поверхностей.

Анализ критерия устойчивости показывает, что и при наличии кривизны необходимым условием стабилизации для таких систем является одновременное изменение вдоль оси продольного поля $B_0(\beta)$ и эксцентриситета $\varepsilon(\beta)$.

Поправки третьего приближения при известном втором приближении можно определять по общим формулам (29).

Для гофрированных конфигураций с замкнутыми силовыми линиями $\chi_0 = 0$ и из формулы (29) видно, что при наличии однородного вдоль оси возмущения полей $F_{\mu_0} \neq 0$, возмущение магнитных поверхностей обращается в бесконечность. Таким образом, гофрированные магнитные поверхности с замкнутыми силовыми линиями являются неустойчивыми и по этой причине представляются малоперспективными.

ОДНОРОДНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ

В конфигурациях с прокручивающимися силовыми линиями условие $V''(\phi) < 0$ может быть удовлетворено и при постоянных B_0 и ε . Такие конфигурации мы будем называть однородными. Поскольку критерий устойчивости существенно зависит от поправок третьего приближения к Ψ , мы остановимся на них более под-

робно. Необходимые параметры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ определяются формулами

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{k}{q} (3-\varepsilon) \cos \delta + x_1 \\ \alpha_2 &= \frac{k}{q} (3+\varepsilon) \sin \delta + x_2 \\ \alpha_3 &= -\frac{k}{3} \varepsilon \cos \delta + \frac{2}{3} Q + x_3 \\ \alpha_4 &= -\frac{k}{3} \varepsilon \sin \delta + \frac{2}{3} P + x_4\end{aligned}\quad (41)$$

Величины x_1, x_2, x_3, x_4 выражаются через комплексные функции β_m , ($m=1, 3$), определяемые уравнением (21):

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{q} \frac{e^{t/2}}{1-\varepsilon^2} \operatorname{Re} [(2+\varepsilon)\beta_1 - 3\varepsilon\beta_3] \\ x_2 &= \frac{1}{q} \frac{e^{-t/2}}{1-\varepsilon^2} \operatorname{Im} [(2-\varepsilon)\beta_1 - 3\varepsilon\beta_3] \\ x_3 &= \frac{1}{q} \frac{e^{t/2}}{1-\varepsilon^2} \operatorname{Re} [\varepsilon\beta_1 - (2-\varepsilon)\beta_3] \\ x_4 &= \frac{1}{q} \frac{e^{-t/2}}{1-\varepsilon^2} \operatorname{Im} [\varepsilon\beta_1 - (2+\varepsilon)\beta_3]\end{aligned}\quad (42)$$

Входящие в правую часть уравнений (21) для β_1 и β_3 функции F_1 и F_3 выражаются формулами

$$F_1 = e^{-t/2} [(2-\varepsilon)f_1 - 3\varepsilon f_3] + i e^{t/2} [(2+\varepsilon)f_2 - 3\varepsilon f_4] \quad (43)$$

$$F_3 = e^{-t/2} [\varepsilon f_1 - (2-\varepsilon)f_3] + i e^{t/2} [\varepsilon f_2 - (2+\varepsilon)f_4]$$

где

$$\begin{aligned}f_1 &= \frac{3}{q} \varepsilon (k \cos \delta)' + \frac{2}{3} \varepsilon Q' \\ f_2 &= -\frac{3}{q} \varepsilon (k \sin \delta)' + \frac{2}{3} \varepsilon P' \\ f_3 &= \frac{7}{12} \varepsilon (k \cos \delta)' \\ f_4 &= \frac{7}{12} \varepsilon (k \sin \delta)'\end{aligned}\quad (44)$$

Штрихом обозначена производная по t .

Комплексные функции β_1 и β_3 представляют собой следующие комбинации x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$\begin{aligned}\beta_1 &= e^{-t/2} [(2-\varepsilon)x_1 - 3\varepsilon x_3] + i e^{t/2} [(2+\varepsilon)x_2 - 3\varepsilon x_4] \\ \beta_3 &= e^{-t/2} [\varepsilon x_1 - (2+\varepsilon)x_3] + i e^{t/2} [\varepsilon x_2 - (2-\varepsilon)x_4]\end{aligned}\quad (45)$$

Как видно из формулы (36) в выражение для $V(\phi)$ входит лишь $\operatorname{Re} \beta_1$ и $\operatorname{Im} \beta_1$, так что для получения критерия устойчивости плазмы достаточно найти только β_1 . Для нахождения магнитных поверхностей необходимо знать также и β_3 .

Скалярный потенциал магнитного поля однородных конфигураций представляется в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \quad (46)$$

$$\text{где } \varphi_0 = B_0 \rho + B_0 \frac{\xi}{2} u' \rho^2 \sin 2u - \frac{B_0}{g} \rho^3 \frac{\partial}{\partial \xi} [Q(3) \cos 3u + P(3) \sin 3u] \quad (47)$$

$$\varphi_1 = -\frac{B_0}{g} (k \cos \theta)' \rho^3 + \frac{B_0 \xi}{8} u' k \rho^3 \sin 4(u + \delta) \quad (48)$$

Потенциал φ_1 полностью определяется заданием магнитной оси и эксцентриситета ξ . В потенциал φ_0 входят поля второй и третьей гармоник, которые можно задавать произвольно.

Мы будем рассматривать два типа однородных конфигураций – конфигурации, ось которых является замкнутой кривой, лежащей в плоскости (конфигурации подобные рейстрековому стелларатору) и конфигурации с пространственной магнитной осью (подобные стелларатору в форме восьмерки).

ОДНОРОДНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ С КРУГОВОЙ МАГНИТНОЙ ОСЬЮ

Простейшей конфигурацией первого типа является конфигурация с круговой осью. Магнитные поверхности в такой системе образуются продольным магнитным полем при наложении поля винтовых обмоток. При этом магнитные поверхности прокручиваются вокруг круговой оси радиуса R (рис. 4). Примем скорость прокручивания постоянной

$$\delta' = \frac{2\pi}{L} n = \text{const} \quad (49)$$

В этом случае критерий устойчивости плазмы низкого давления имеет вид:

$$V''(\phi) = \frac{L}{\pi B_0^2 \sqrt{1-\epsilon^2}} \left\{ \epsilon^2 \delta'^2 - \frac{11}{2} k^2 + \frac{4k}{\epsilon} (C_1 - \epsilon C_2) \right\} \quad (50)$$

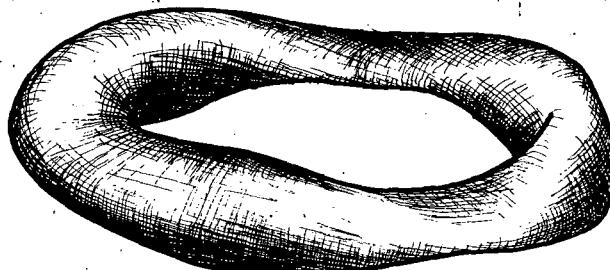


Рис. 4. Винтовая магнитная поверхность эллиптического сечения с круговой магнитной осью.

Требующееся для создания данной конфигурации магнитное поле определяется скалярным потенциалом:

$$\begin{aligned} \Phi_0 = & B_0 \beta + \frac{1}{2} B_0 \epsilon \delta' \rho^2 \sin 2(\omega + \delta' \beta) + \\ & + \frac{1}{3} B_0 \delta' \rho^3 [C_1 \sin(3\omega + 2\delta' \beta) + 2C_2 \sin(3\omega + 4\delta' \beta)] \end{aligned} \quad (51)$$

Поле второй гармоники представляет собой двухзаходное винтовое поле с периодом равным $2\pi R/h$. Поле третьей гармоники является суперпозицией двух трехзаходных винтовых полей, делающих, соответственно, $2h/3$ и $4h/3$ оборотов вокруг оси при обходе вдоль всей системы. От гармоник с другим числом обходов критерий устойчивости не зависит.

При отсутствии третьей гармоники, когда $C_1 = C_2 = 0$, поле (51) является полем двухзаходного стелларатора.

Условие устойчивости в этом случае таково

$$\epsilon^2 < \frac{11}{2} \frac{k^2}{\delta'^2} = \frac{11}{2h^2} \quad (52)$$

Стабилизация связана с конечной длиной системы (конечное h) и возможна, в принципе, также в прямой системе с "вмороженными" на торцах силовыми линиями.

Критическое для устойчивости значение параметра β в однородных системах с круговой осью согласно формулам (37), (50) определяется соотношением

$$\frac{\beta_{kp}}{k^2 \rho_0^2} = \frac{11/2 - \epsilon^2 h^2 - 4(C_1 - \epsilon C_2)/k\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \quad (53)$$

где ρ_0 — средний радиус сечения плазменного шнуря, определяемый условием $\pi \rho_0^2 B_0 = \phi$.

Эффективный радиус потенциальной ямы ρ_0 , от которого зависит её глубина, ограничен сверху поперечным размером установки либо размером сепаратрисы. При $\epsilon \rightarrow 0$ сепаратрисса имеет вид, изображенный на рис. 3 причем $k\rho_0 = 0,153$. Экстраполируя выра-

жение для $V''(\phi)$, справедливо лишь при $\rho \ll r_s$ на всю область, ограниченную сепараторисой и полагая для оценки $B_0 = r_s$, получаем при $C_1 = C_2 = 0$: $\beta_{kp} \approx 13\%$. Случай $\epsilon = 0$ не является, однако, благоприятным с точки зрения устойчивости конфигурации относительно возмущений поля, поскольку при $\epsilon \rightarrow 0$ угол прокручивания силовых линий (23)

$$\zeta = 2\pi n (1 - \sqrt{1 - \epsilon^2}) \approx \pi n \epsilon^2 / 2$$

стремится к нулю. При конечном значении ϵ ($\epsilon \sim 0,2 \div 0,6$) значение β_{kp} не превышает $1 \div 2\%$. Наличие поля третьей гармоники позволяет удовлетворить условию $V''(\phi) < 0$ при $\epsilon^2 n^2 > 11/2$. Однако это поле приводит к еще большему уменьшению размеров сепараторисы и, следовательно, к уменьшению значения β_{kp} .

ОДНОРОДНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МАГНИТНОЙ ОСЬЮ.

Рассмотрим теперь конфигурации, магнитная ось которых является пространственной кривой. Это конфигурации типа стелларатора, имеющего форму восьмерки. Без дополнительных стабилизирующих полей такие системы не удовлетворяют условию устойчивости.

При наличии одного только продольного поля $B_0 = \text{const}$ выражение для $V''(\phi)$ имеет вид

$$V''(\phi) = \frac{1}{\pi B_0^2} \oint k^2(s) ds \quad (54)$$

Однако с помощью дополнительных магнитных полей тороидальные системы с пространственной осью можно стабилизировать.

Простейшей конфигурацией с пространственной осью является конфигурация, обладающая винтовой симметрией. В этом случае магнитная ось представляет собой винтовую линию, для которой кривизна k и икручение α постоянны. Такая конфигурация образуется, в частности, внутри соленоида, ось которого является винтовой линией. При наличии одного только продольного поля нормальные сечения магнитных поверхностей имеют вид окружностей. Для стабилизации плазмы в такой системе достаточно наложить поля второй и третьей гармоник, вращающиеся вместе с главной нормалью к оси системы.

Выражение для $V''(\phi)$ имеет вид

$$V''(\phi) = \frac{L}{\pi B_0^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}} \left\{ \frac{k^2}{1 - \epsilon^2} \left[1 + 3\epsilon^2 - \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} (9 + 7\epsilon^2) \cos 2s \right] + \epsilon^2 \alpha^2 - 2k\epsilon \left(\frac{9\cos s}{1 + \epsilon} + \frac{8\sin s}{1 - \epsilon} \right) \right\} \quad (55)$$

Как видно из этой формулы стабилизация возможна только при $\epsilon \neq 0$.

Кроме того требуется наличие поля третьей гармоники (Q или Φ должны быть отличными от нуля). При этом устойчивость может быть достигнута и при малом ϵ .

Требующееся для создания рассматриваемой конфигурации магнитное поле описывается скалярным потенциалом (при $\delta=0$)

$$\Psi_0 = B_0 \beta + \frac{B_0}{2} \rho^2 \epsilon u' s_i z u + \frac{B_0}{3} Q u' s_i z u \rho^3 \quad (56)$$

Стабилизирующее поле может быть создано токами, расположенными на поверхности $\rho = \rho_m$ с поверхностью плотностью i , определяемой из условия

$$\frac{4\pi}{c} i = B_0 (\rho_m) = B_0 \rho_m \epsilon u' a_1 z u + B_0 \rho_m^2 Q u' c_1 z u \quad (57)$$

Отсюда видно, что амплитуды полей второй и третьей гармоник имеют следующие порядки величин

$$\frac{B_\omega^{(2)}}{B_0} = \epsilon \rho_m u' \sim \epsilon \rho_m / L \quad (58)$$

$$\frac{B_\omega^{(3)}}{B_0} = \rho_m^2 Q u' \sim \frac{Q}{k} (k \rho_m) \sim \frac{\rho_m}{L} \quad (59)$$

Критическое для устойчивости давление плазмы в оптимальном случае, когда ось эллипса ориентирована вдоль главной нормали к магнитной оси ($\delta=0$), определяется выражением

$$\frac{\beta_{kp}}{k^2 \rho_0^2} = \frac{2\epsilon}{(1+\epsilon)\sqrt{1-\epsilon^2}} \left[\frac{Q}{k} - \frac{\epsilon}{2}(1+\epsilon) \frac{\alpha^2}{k^2} - \frac{4-5\epsilon-7\epsilon^2}{8\epsilon} \right] \quad (60)$$

Входящий в выражение для β_{kp} параметр $k^2 \rho_0^2 \equiv k^2 \phi / \pi B$, ограничен сверху значением ϕ_{max} на сепаратриссе. В первом приближении поток ϕ связан с функцией Ψ соотношением $\phi = \lambda \Psi / \sqrt{1-\epsilon^2}$. Экстраполируя эту зависимость до сепаратриссы можно получить оценку максимального значения параметра $(k \rho_0)_{max}$. Полученная таким образом зависимость $(k \rho_0)_{max}$ от параметра Q/k при разных значениях ϵ изображена для случая $\alpha = k$ на рис. 5. Излом кривых при некотором значении Q^*/k , помеченный крестиком, соответствует перестройке сепаратриссы при $Q = Q^*$. При $Q < Q^*$ сепаратрисса имеет одну особую точку (рис. 3а), при $Q > Q^*$ – две особые точки (рис. 3б), при $Q = Q^*$ – три особые точки (рис. 3в).

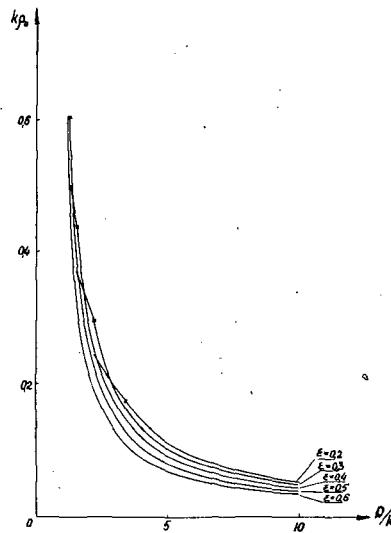


Рис.5а. Отношение максимального эффективного радиуса сечения магнитной поверхности к радиусу кривизны.

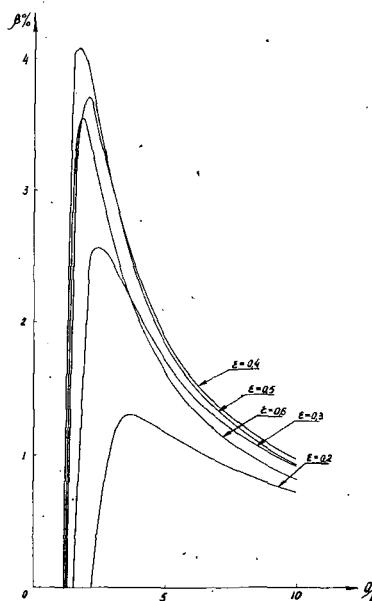


Рис.5б. Зависимость максимального значения параметра β_{kp} от параметров ϵ и Q/k , характеризующих величину амплитуд второй и третьей гармоники стабилизирующего поля.

На рис.5 показана зависимость максимального значения β_{kp} , рассчитанного по формуле (60), экстраполированной на всю область, ограниченную сепаратрисой, от параметра Q/k ,

характеризующего амплитуду поля третьей гармоники, и параметра ϵ , характеризующего амплитуду поля второй гармоники.

Из графиков видно, что оптимальными являются значения $\epsilon = 0,4$, $Q/k = 2$, при которых получается $\beta_{kp} \approx 3\%$. Амплитуды полей второй и третьей гармоник в рассматриваемом случае $\alpha = k$ составляют при $k_p = 0,2$ соответственно $B_\omega^{(2)}/B_0 = 8\%$ и $B_\omega^{(3)}/B_0 = 8\%$ от основного продольного магнитного поля.

Заметим, что критическое значение параметра β в рассматриваемой системе, определяемое из условий равновесия, составляет $\beta \sim 8\%$. Таким образом, в системах с пространственной осью условия равновесия и устойчивости оказываются согласующимися.

Рассмотренная конфигурация не является замкнутой. Однако основные выводы о возможности стабилизации с помощью второй и третьей гармоник поля сохраняются и для подобных замкнутых систем. Типичным представителем замкнутой конфигурации с пространственной осью является конфигурация поля в соленоиде, который является винтовой линией, обвивающей тор (рис. 6). В частности, при двух обходах оси вокруг тора, мы получим конфигурацию, подобную "восьмёрке" Спитцера. При большом числе обходов $N \gg 1$ такая система мало отличается от рассмотренной выше системы с винтовой симметрией. Различие состоит в том, что теперь кривизна и кручение оси слегка промодулированы по длине

$$k = k_0 + k_1 \cos \frac{2\pi}{L} N s, \quad \alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \cos \frac{2\pi}{L} N s$$

причем $k_1 \sim k_0 \frac{a}{R}$, $\alpha_1 \sim k_0 \frac{a}{R}$, где a и R малый и большой радиусы воображаемого тора, вокруг которого обвивается магнитная ось.

Поправка к $V''(\phi)$ в формуле (55) при $\epsilon \ll 1$ имеет вид:

$$\Delta V''(\phi) = \frac{3\epsilon L}{4\pi B_0^2} \left(\frac{2\pi N}{L} \right)^2 \frac{k_1^2 - k_0^2 \delta_1^2}{\left(\frac{2\pi}{L} N \right)^2 - \alpha_0^2}$$

где $\delta_1 = \frac{L}{2\pi N} \alpha_1$. Здесь принято, что $\alpha = -\alpha_0 s$, т.е. витки стабилизирующей обмотки составляют постоянный угол с магнитной осью.

Наличие в этой формуле "резонансного" знаменателя связано с наличием возмущений поля, вызванных модуляцией кривизны и кручения, в соответствии с общими выводами (29).

В рассматриваемом случае этот знаменатель в нуль не обращается, и поправка оказывается всегда малой.

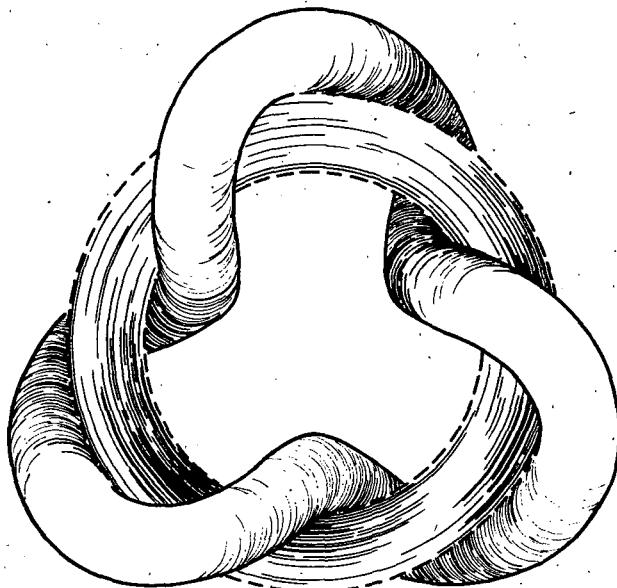


Рис.6. Замкнутая конфигурация поля в соленоиде.

Таким образом все выводы, полученные для конфигурации с винтовой симметрией сохраняют силу и для замкнутых конфигураций с $N \gg 1$. Для систем типа "восьмерки" ($N=2$) приведенные данные можно рассматривать как оценки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показана возможность создания сравнительно простыми средствами замкнутых конфигураций с "минимумом В". Наиболее перспективными представляются системы с пространственной магнитной осью. Для создания минимума B в таких системах достаточно на основную конфигурацию, создаваемую продольным магнитным полем, наложить стабилизирующее поперечное магнитное поле, содержащее вторую и третью гармоники, амплитуда которых имеет порядок 10% от основного продольного поля. Преимуществом этих систем по сравнению с системами с непрекрученными силовыми линиями, является устойчивость магнитных поверхностей, обусловленная наличием сдвига силовых линий. В отличие от конфигураций типа стелларатора (двух- или трехзаходного), свернутого в тор, в этих системах условия устойчивости плазмы и условия устойчивости магнитных поверхностей не являются противоречивыми требованиями. Это связано

с тем, что устойчивые магнитные поверхности в конфигурациях с пространственной магнитной осью существуют независимо от наличия стабилизирующих полей.

В настоящей работе $V(\phi)$ вычислена в линейном по ϕ приближении. Однако, приведенные выше формулы для функций $\Psi(\vec{r})$ и $\psi(\vec{r})$ позволяют численно вычислить интегралы, необходимые для определения $V(\phi)$ и $\lambda'(\phi)$, вплоть до сепаратриссы. Причем такой численный расчет может быть произведен для произвольной пространственной магнитной оси.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Mercier, *Nucl. Fusion* 3 (1963), 89; 4, (1964), 213
2. H.P. Furth, M.N. Rosenbluth, *Phys. Fluids* 7, (1964), 764
3. A. Leonard, *Phys. Fluids* 7, (1964), 1875
4. J.L. Johnson, *Phys. Fluids* 7, (1964), 2015
5. H. P. Furth Лекция на семинаре по физике плазмы.
Триест, октябрь, 1964 г.
6. Б.Б. Кадомцев "Гидромагнитная устойчивость плазмы", в книге:
Вопросы теории плазмы, Госатомиздат, Москва, 2 (1963).
7. В. Бляшке "Дифференциальная геометрия" ОНТИ-НКТП, СССР, 1935.
8. В.Д. Шафранов, Ядерный синтез, 4 (1964) II4, 232.
9. А.И. Морозов, Л.С. Соловьев, "Геометрия магнитного поля",
в книге: Вопросы теории плазмы, Госатомиздат, Москва, 2 (1963)
10. Б.Б. Кадомцев, ЖЭТФ, 37 (1959) I646.

DISCUSSION

R. M. KULSRUD: How did you calculate β_{stable} ?

V. D. SHAFRANOV: By means of the expression $\beta_{\text{stable}} = V''(\phi)/V'$.

R. M. KULSRUD: Is that the critical β for the ballooning mode?

V. D. SHAFRANOV: No, it is a definition.

THETA PINCHES
(Session II)



PLASMA CONTAINMENT AND STABILITY IN A MEGAJOULE THETA PINCH EXPERIMENT

H.A.B. BODIN, T.S. GREEN, A.A. NEWTON

G.B.F. NIBLETT AND J.A. REYNOLDS

UNITED KINGDOM ATOMIC ENERGY AUTHORITY

THE CULHAM LABORATORY,

ABINGDON, BERKS., ENGLAND

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

PLASMA CONTAINMENT AND STABILITY IN A MEGAJOULE THETA-PINCH EXPERIMENT. This paper describes the application of a fast megajoule capacitor bank to the study of plasma production and confinement in the theta-pinch configuration. Deuterium gas at a pressure in the range 10 to 50 mTorr is pre-ionized by a transient axial current and subsequently compressed by a sinusoidal magnetic field with a peak value of 76 kG and a half-period of 12 μ s. The single-turn coil used in the experiment is 200 cm long and 10 cm in diameter. Lateral drift of the plasma to the walls of the discharge tube has been avoided by reduction of the curvature of confining lines of magnetic force using a parallel strip transmission line between the coil and collector. The origin of a low-amplitude circular motion of the plasma about the central equilibrium axis, the so-called wobble phenomenon, is discussed.

The general properties of the discharge have been analysed by comparing the measured values of electron temperature, plasma diamagnetism, radial density distribution and neutron yield with numerical predictions using the Hain-Roberts hydromagnetic code. The rate of axial plasma loss has been determined by means of a wide variety of techniques. These include optical interferometry to measure the total number of trapped particles, an analysis of continuum emission in the visible spectrum to give the line density as a function of axial position, and miniature piezo-electric pressure probes to estimate the size of the loss aperture. The results show that the plasma is subject to magnetic field diffusion in the early stages and to cooling of the electrons either by impurity radiation or by thermal conduction along the field lines. The consequent depression of the plasma β to a value about 0.5 at peak field enlarges the magnetic apertures at the ends of the coil and thus leads to axial escape of plasma. The main problems for the future are therefore the development of a pre-heat system to give a higher temperature plasma at a β of near unity, and the reduction of the rate of electron energy loss.

CONFINEMENT ET STABILITÉ DU PLASMA DANS UN DISPOSITIF A STRCTION AZIMUTALE DE UN MEGAJOULE. Des expériences sur la production de plasmas à haute température ont été effectuées au moyen de la batterie de condensateurs rapides d'un mégajoule. Avec une bobine de 200 cm de longueur et 10 cm de diamètre, la batterie produit un champ de 76 kG avec une demi-période de 12 μ s. On utilise du deutérium gazeux à des pressions initiales de l'ordre de 10 à 50 mTorr, qui est préchauffé par un courant axial transitoire. Pour éviter la dérive latérale du plasma vers les parois du tube à décharge en quartz, on réduit la courbure des lignes de force magnétique qui confinent le plasma au moyen d'une ligne de transmission à barres parallèles reliant la bobine au collecteur. Les auteurs étudient l'origine d'un mouvement circulaire de faible amplitude du plasma autour de l'axe d'équilibre central, phénomène dit de « vobulation ».

Ils analysent les caractéristiques générales de la décharge en comparant les valeurs mesurées de la température des électrons, du diamagnétisme du plasma, de la distribution radiale de la densité et du rendement en neutrons aux valeurs que l'on peut obtenir par des calculs hydromagnétiques numériques effectués à l'aide du programme de Hain-Roberts. Des techniques très diverses sont actuellement appliquées pour mesurer le taux des pertes de plasma dans la direction axiale en présence de champs magnétiques parallèles piégés et inverses piégés. Ce sont notamment l'interférométrie optique qui permet de déterminer le nombre total des particules piégées, une analyse de l'émission dans le domaine continu du spectre visible, qui fournit la densité des raies en fonction de la position axiale et l'utilisation de sondes à pression piézo-électriques de dimensions réduites, permettant de mesurer les dimensions de l'ouverture des pertes. Les résultats obtenus sont comparés à une forme modifiée du programme hydromagnétique destiné à l'étude des propriétés du plasma dans la

direction axiale. Les résultats montrent que le plasma peut subir une diffusion du champ magnétique au stade initial et un refroidissement des électrons, soit par rayonnement dû aux impuretés, soit par conduction thermique le long des lignes de champ. La diminution résultante de la valeur β du plasma jusqu'à environ 0,5 pour la valeur maximale du champ agrandit les ouvertures magnétiques aux extrémités de la bobine et par conséquent provoque une fuite du plasma le long de l'axe. Les principaux problèmes à résoudre sont donc: 1. la mise au point d'une méthode de préchauffage capable de donner un plasma plus chaud pour une valeur de β voisine de l'unité; 2. la diminution de la vitesse de perte d'énergie des électrons.

УДЕРЖАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ЭКСПЕРИМЕНТА С МЕГАДЖОУЛЕВЫМ ТЕТА-ПИНЧЕМ. При проведении последних экспериментов по получению высокотемпературной плазмы на тетатроне была использована быстрая мегаджоулевая батарея конденсаторов. Однозаходная катушка, длиной 200 см и диаметром 10 см, создает поле интенсивностью 76 кг с полупериодом 12 мксек. Дейтериевый газ используется при начальных давлениях в диапазоне 10–50 милитор, и предварительно ионизируется аксиальным током. Последующее смещение плазмы к стенкам кварцевой разрядной трубы устраняется в результате уменьшения изгиба удерживающих магнитных силовых линий с использованием линии параллельного полосного пропускания между катушкой и коллектором. Будет обсужден вопрос о происхождении кругового движения плазмы с малой амплитудой вокруг центральной оси равновесия, так называемого явления "качания".

Общие особенности разряда анализировались путем сравнения измеренных значений температуры электронов, диамагнетизма плазмы, радиального распределения плотности и выхода нейтронов со значениями, предсказанными численными гидромагнитными расчетами с использованием кода Гайна-Робертса.

В настоящее время с помощью самых разнообразных методов проводится измерение скорости аксиальной потери плазмы в присутствии захваченных параллельного и обратного магнитных полей. Эти методы включают методы оптической интерферометрии для определения общего числа захваченных частиц, анализ сплошного испускания в видимом спектре с целью определения плотности линий как функции положения в отношении оси и использование миниатюрных пьезоэлектрических зондов для измерения размера апертуры при потерях.

Результаты показывают, что плазма подвержена диффузии магнитного поля на ранних стадиях и охлаждении электронов либо радиацией примесей, либо тепловой проводимостью вдоль линий поля. Последующее уменьшение величины β плазмы до значения около 0,5 при пиковом поле увеличивает магнитные апертуры на концах катушки и таким образом ведет к осевым потерям плазмы. Следовательно, главными проблемами на будущее остаются разработка системы предварительного нагрева для придания плазме более высокой температуры при β около единицы и уменьшение скорости потери энергии электронов.

CONFINAMIENTO Y ESTABILIDAD DEL PLASMA EN UN EXPERIMENTO DE ESTRICCIÓN AZIMUTAL DE 1 MJ. La memoria describe la aplicación de una batería de condensadores rápidos, de 1 MJ, para estudiar la producción y el confinamiento de plasma en la configuración de estricción azimutal. Mediante una corriente axial transitoria, se preioniza deuterio gaseoso a una presión comprendida entre 10 y 50 mTorr, que se comprime seguidamente por medio de un campo magnético sinusoidal de 76 kG de intensidad máxima y semiperíodo de 12 μ s. En el experimento se utiliza una bobina de devanado sencillo, de 200 m de longitud y 10 cm de diámetro. Se ha evitado la deriva lateral del plasma hacia las paredes del tubo de descarga, reduciendo la curvatura de las líneas de fuerza magnética de confinamiento por medio de una línea de transmisión de bandas paralelas entre la bobina y el colector. Se examina el origen de un movimiento circular del plasma de pequeña amplitud, alrededor del eje de equilibrio central.

Se han analizado las propiedades generales de la descarga, comparando los valores medidos de la temperatura electrónica, el diamagnetismo del plasma, la distribución radial de la densidad y la producción de neutrones, con cálculos numéricos basados en la clave hidromagnética Hain-Roberts. La velocidad de pérdida axial de plasma se ha determinado por una gran variedad de técnicas: las principales son la interferometría óptica para evaluar el número total de partículas capturadas, un análisis de la emisión en la zona continua del espectro visible para obtener la densidad de líneas en función de la posición axial, y el empleo de microondas piezoelectrinas de presión para medir el tamaño de la abertura de pérdidas. Los resultados muestran que el plasma sufre difusión del campo magnético en las fases iniciales y enfriamiento de los electrones por irradiación debida a impurezas o por conducción térmica a lo largo de las líneas de fuerza. Como consecuencia, el valor β del plasma desciende a 0,5 aproximadamente, a la densidad magnética máxima, con lo que se agrandan las aberturas magnéticas de los extremos de la bobina, originando así el escape axial del plasma.

Los principales problemas aún pendientes de solución se refieren al perfeccionamiento de un dispositivo de precalentamiento que permita obtener un plasma de temperatura más elevada con un valor β próximo a la unidad, y a la reducción de la velocidad de pérdida de energía de los electrones.

1. Introduction

During the last few years the theta pinch has received intensive investigation as a means of producing high temperature plasma relevant to the study of controlled thermonuclear reactions. In these experiments a cylindrical column of deuterium plasma at initial densities in the range 10^{15} to 10^{16} ions/c.c. is heated and confined by a fast-rising axial magnetic field developed by discharging a high-voltage low-inductance capacitor bank into a single-turn coil. Recent studies in various countries and over a wide range of discharge conditions have established the basic characteristics of this experimental configuration⁽¹⁻⁶⁾.

The present paper describes the initial series of experiments with a new fast capacitor bank storing a megajoule of energy at 40 kV. Such an energy source can heat 10^{19} particles to temperatures of the order of a kilovolt using coils whose length is very much longer than their diameter so that conditions at the mid-plane of the coil can be studied separately from effects due to the finite length of the system. The aim of the present experiments is to study the density, temperature, radial distribution and gross stability of the plasma produced in this machine. Particular attention has been paid to the rate of decay of the plasma both by loss of energy from the electrons and by axial flow from the ends of the coil.

2. Experimental Facilities

2.1 Coil and Capacitor System

The single-turn coil chosen for the experiments was 200 cm long and 10 cm in diameter and was used without mirrors. Fig.1 lists the parameters of the megajoule bank when used with this coil. The short-circuit bank inductance was 5.7 nanohenries compared with the vacuum coil inductance of 5.0 nanohenries; thus about half the peak voltage appears across the coil to give a maximum electric field of 550 volts/cm. The peak current is 12 megamps, the corresponding magnetic field 76 kG and the half-period 12 μ s.

The bank inductance was minimised by employing 448 parallel circuits separately switched by spark gaps at atmospheric pressure which are triggered by eight sub-master gaps themselves fired by a common master spark gap. Two additional condenser banks are used, one to supply the bias magnetic field and the other the pre-ionization current.

VOLTAGE	V	40	kilovolts
CAPACITY	C	1344	microfarads
ENERGY	E	1.07	megajoules
NO. OF TRIGGER GENERATORS		8	
NO. OF MAIN SPARK GAPS		448	
BANK INDUCTANCE	L _B	2.9	nanohenries
COLLECTOR INDUCTANCE	L _{Coll}	2.8	nanohenries
COIL INDUCTANCE	L _C	5.0	nanohenries
TOTAL INDUCTANCE	L _T	10.7	nanohenries
TOTAL RESISTANCE	R	0.63	milliohms
CIRCUIT Q		4.5	
HALF PERIOD	$\tau/2$	11.9	microseconds
PEAK CURRENT	I _P	12.1	megamps
PEAK MAGNETIC FIELD	H _P	76	kilogauss
PEAK ELECTRIC FIELD	E _P	550	volts per cm.

FIG. 1. Electrical characteristics of the Megajoule capacitor bank

The bias field reaches a peak value of up to $\pm 5\text{kG}$ in $60\ \mu\text{s}$ and the pre-ionization system gives a transient square-wave current pulse of 20 kiloamps lasting for $4\ \mu\text{s}$. The three banks can be discharged at any pre-determined time.

Fig.2 is a diagram of the complete circuit. The dotted line shows the passive crowbar facility which is currently being installed and which will be operating by autumn 1965. It consists of 32 solid dielectric switches placed across the collector to short-circuit the coil and collector at peak current. This circuit converts the normal sine wave output to a unidirectional current pulse lasting for $35\ \mu\text{s}$.

2.2 Pre-Ionized Plasma

The gas is pre-ionized using a transient axial current between electrodes situated well beyond the ends of the coil. This method has the advantage that there is no electrical coupling with the single-turn coil, breakdown occurs at pressures as low as 5 mTorr of deuterium, and the discharge is relatively free from impurities except in the immediate vicinity of the electrodes. Figs.3 and 4 show the measured electron density in the pre-ionization discharge as a function of time with and without applied bias field over the pressure range 10–50 mTorr. The main bank is normally fired $10\ \mu\text{s}$ after the pre-ionization bank when the electron density is 20–30% of its initial value. The measured electron temperature at this time is 2 eV. Measurements on impurity lines show that contamination is negligible save in the vicinity of the electrodes but the addition of 0.1% of oxygen to the filling gas renders the oxygen lines easily distinguishable.

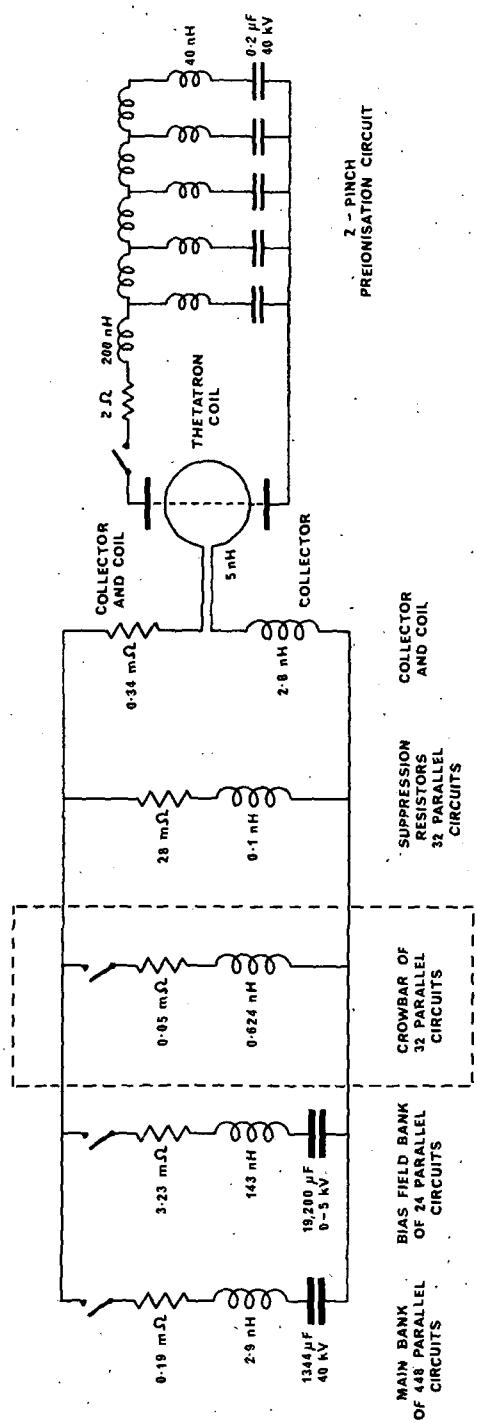


FIG. 2. Fast Megajoule bank circuit including passive crowbar

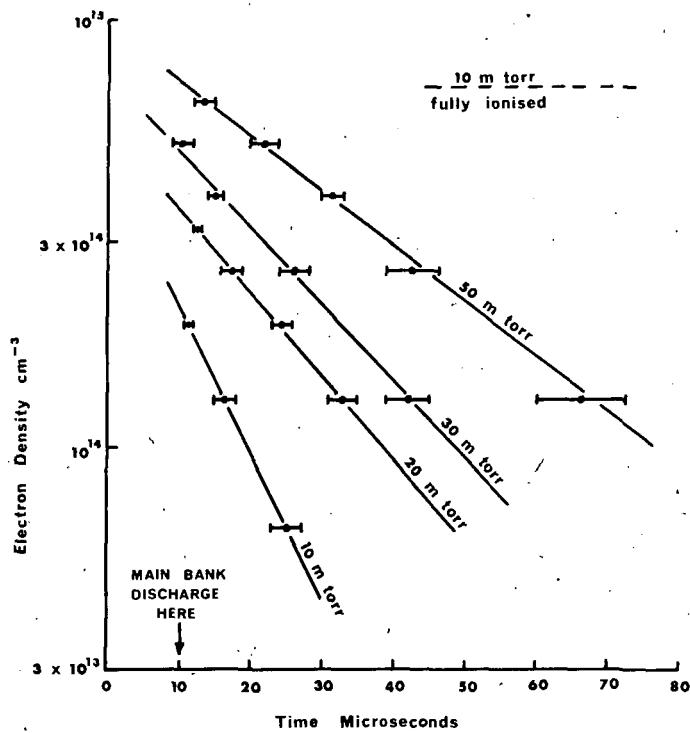


FIG. 3. Electron density in the preionization for various initial pressures of deuterium

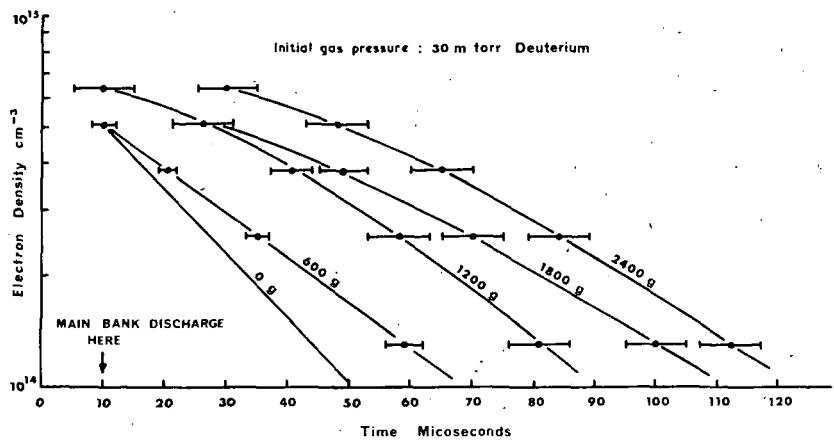


FIG. 4. Electron density in the preionization afterglow in the presence of axial magnetic field. The quoted field strength refers to 20 μs . The field falls to zero at 150 μs .

2.3 Collector Design

The magnetic field produced by the main coil must be axially symmetric within close limits if sideways plasma drift is to be avoided and various techniques for controlling the field shape have been demonstrated experimentally⁽⁷⁻⁹⁾. The main difficulty in practice is the shape of the collector; if this is much wider at the cable side than at the coil side the magnetic field will be bent in such a way as to drive the plasma towards the collector. This has been overcome by terminating the coil with a short extension or tab as shown in Fig.5. Probe measurements on the full-scale coil show that at peak field the gradient in the radial direction is less than 10 gauss/cm. An inductive lens has been incorporated in the tab structure to vary the curvature of the magnetic field as discussed in Ref.(7). As a result of these design features the equilibrium position of the plasma remains on the axis of the coil throughout the complete half-cycle.

3. General Plasma Properties

The basic physical properties of the compressed plasma are surveyed in this section. The measurements were made using the bank at 36 kV with a corresponding peak magnetic field of 68 kG and with no bias field. Three values of initial deuterium pressure were employed - 12, 20 and 30 mTorr - and the measurements reported are selected to give representative examples of plasma properties over this pressure range. The discharge tube was of transparent quartz with an internal bore of 8.0 cm and wall thickness 0.5 cm.

Numerical solution of the one-dimensional hydromagnetic equations using the programme developed by Hain and Roberts⁽¹⁰⁾ has proved particularly valuable for comparison with the experimental results. This code has recently been extended to include partially-ionized plasma⁽¹¹⁾ and energy loss by radiation from small quantities of impurities⁽¹²⁾. At the time of writing these developments could not both be included in the same programme. The effect of impurities and of partial ionization have therefore been separately determined and composite curves drawn to show the combined result.

3.1 Implosion Phase

High speed streak photographs and balanced magnetic loop signals⁽¹³⁾ show that at initial pressures between 30 and 12 mTorr the time to the first minimum in the plasma diameter varies from 0.45 to 0.30 μ s corresponding to mean velocities in the range 8 to 12 cms/ μ s.

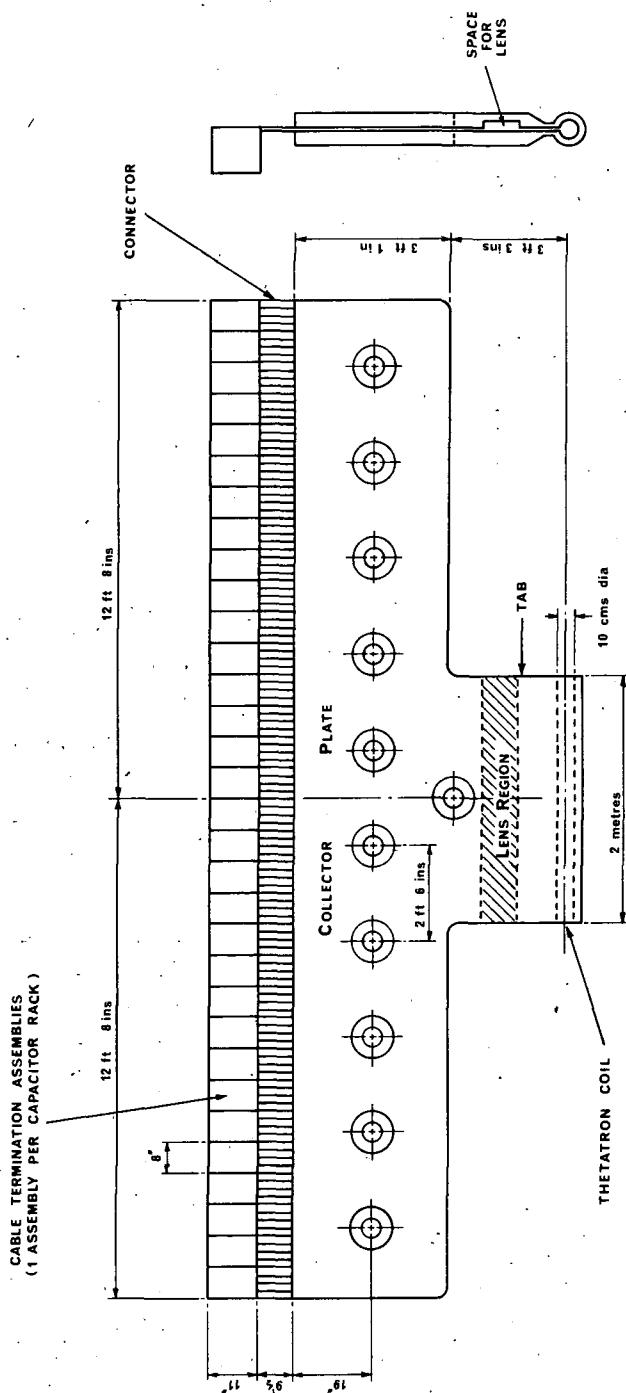


FIG. 5. Scale drawing of collector system

The balanced magnetic loop is particularly valuable for studying the plasma implosion and subsequent radial oscillations since it possesses an excellent frequency response and can readily be used for absolute measurement of the plasma diamagnetism at various axial positions. Fig.6 compares the diamagnetic signal in the mid-plane of the 2-metre coil with values computed from the Hain-Roberts code. Agreement is good at all initial pressures suggesting that the computer programme faithfully represents both the dynamic and damping processes in the early stages of the discharge. A more detailed study of the compression phase is in course of publication⁽¹⁴⁾.

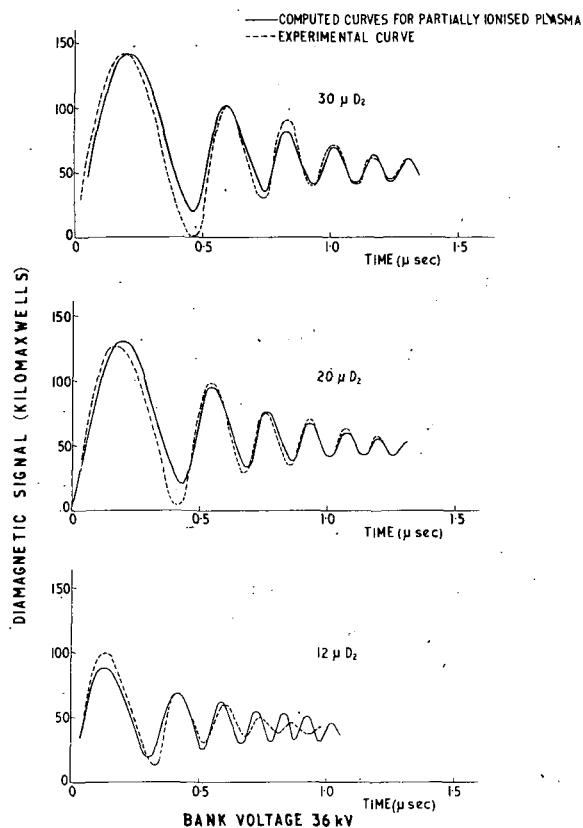


FIG. 6 Plasma diamagnetism at early times

The efficiency of gas collection is determined from the frequency of radial oscillations^(15,16). The period τ is given by

$$\tau = \frac{4\pi}{g} \sqrt{\frac{M}{B^2}}$$

where M is the plasma mass per unit length, B is the external field and g is a numerical factor weakly dependent on the radial plasma distribution and taken to be 2.2 in the present experiment. The results of this measurement (see Fig.7) show that gas collection is complete over the pressure range 10 - 30 mTorr.

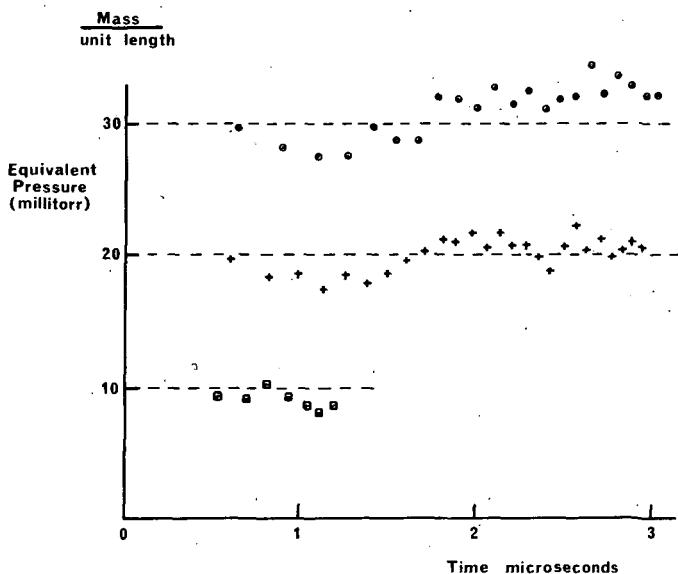


FIG. 7. Mass per unit length determined from radial hydromagnetic oscillations at various initial deuterium pressures

3.2 Plasma Diameter

The plasma diameter measured photographically at the coil mid-plane is plotted in Fig.8 together with the diameter obtained using the Hain-Roberts programme. The assignment of a plasma diameter is necessarily somewhat arbitrary but nevertheless the trend is unmistakable. For the first two micro-seconds agreement is good but thereafter the curves diverge, the theoretical diameter reaching a minimum at peak field whereas the experimental curve shows a continuously diminishing plasma diameter.

The theoretical and experimental curves coincide up to peak field if a suitable radiation loss is included in the programme but beyond $6 \mu s$ the curves cannot be made to coincide no matter what radiation loss is assumed. This disagreement is attributed to axial loss of plasma which, as will be seen later, sets in at the mid-plane after about six micro-seconds.

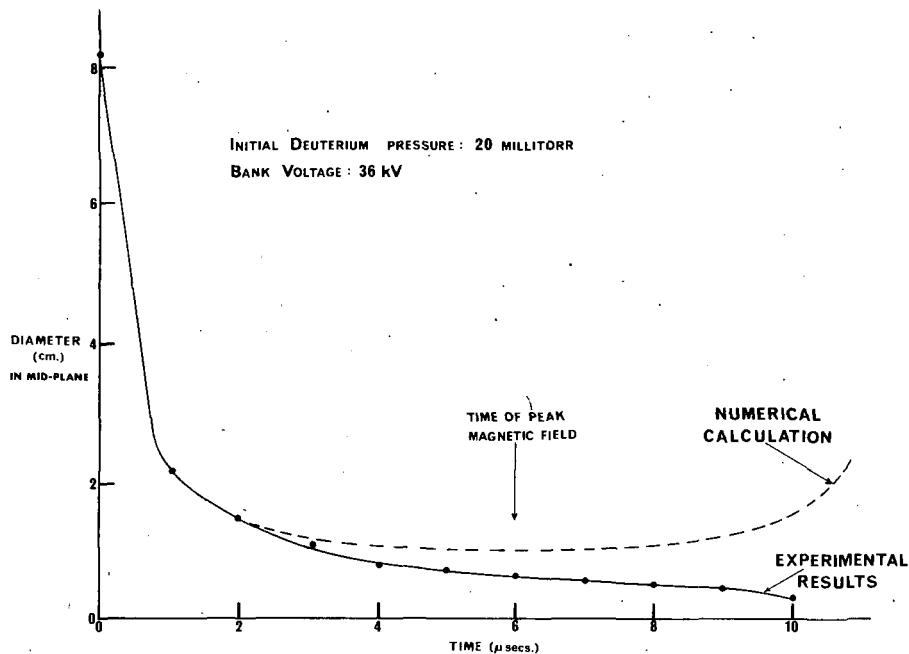


FIG. 8. Variation of plasma diameter in mid-plane with time

A similar discrepancy is exhibited by the theoretical and experimental plasma diamagnetism. The diamagnetic signals at the mid-plane, 25 cms from the mid-plane and 25 cms from the end of the coil are compared with the numerical values in Fig.9. Again the results coincide up to two microseconds but thereafter the diamagnetic signal from the double magnetic loop falls below the predicted value. The discrepancy is greater the nearer the measuring point is to the end of the coil, in agreement with the hypothesis that end losses are in part responsible.

3.3 Electron Temperature

The mean electron temperature has been determined from the soft X-ray emission using the now standard absorption technique in which the transmission through various thicknesses of foil is compared with the theoretical values for a bremsstrahlung continuum. In the present experiments aluminium and beryllium foils were used and the transmission was continuously monitored using plastic scintillators. The resulting temperature - time curve for a plasma at an initial pressure of 20 mTorr (Fig.10) shows that the electrons reach a temperature of just over 300 volts at peak field.

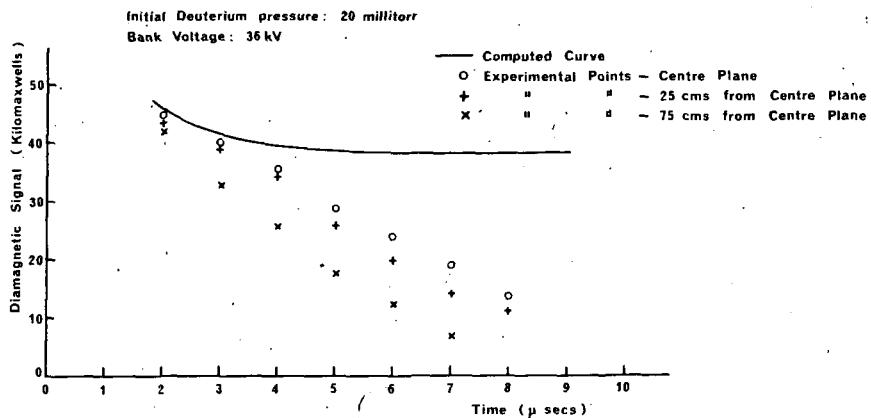


FIG. 9. Plasma diamagnetism throughout the first half-cycle

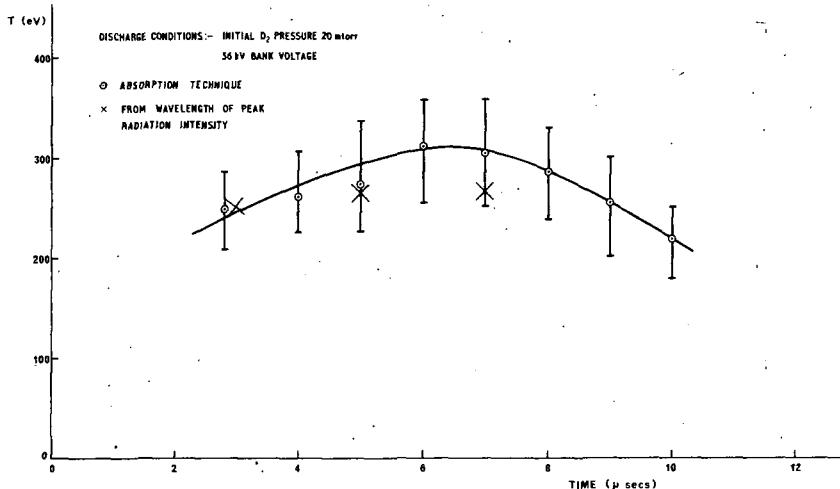


FIG. 10. Measured electron temperature as a function of time

Recently, a more precise method of measuring the electron temperature has been developed⁽¹⁷⁾. For both pure hydrogen bremsstrahlung and recombination radiation from ionized impurities, the radiation intensity reaches a maximum at a wavelength, λ_m given by

$$\lambda_m = \frac{hc}{2kT_e}$$

which depends only on the electron temperature. The wavelength λ_m was measured using a grazing incidence grating spectrograph aligned to

detect radiation emitted along the plasma axis, and time resolution was provided by a one microsecond mechanical shutter. Preliminary measurements (Fig.10) give an electron temperature of 270 eV near peak field, which is in satisfactory agreement with the absorption data.

For a pure deuterium plasma the electron temperature predicted by the numerical programme (Fig.11) reaches a peak of over 600 volts, i.e. about a factor of two greater than the experimental value. However, the theoretical and experimental estimates can be brought into accord by inclusion in the code of 1% of oxygen impurity. This gives

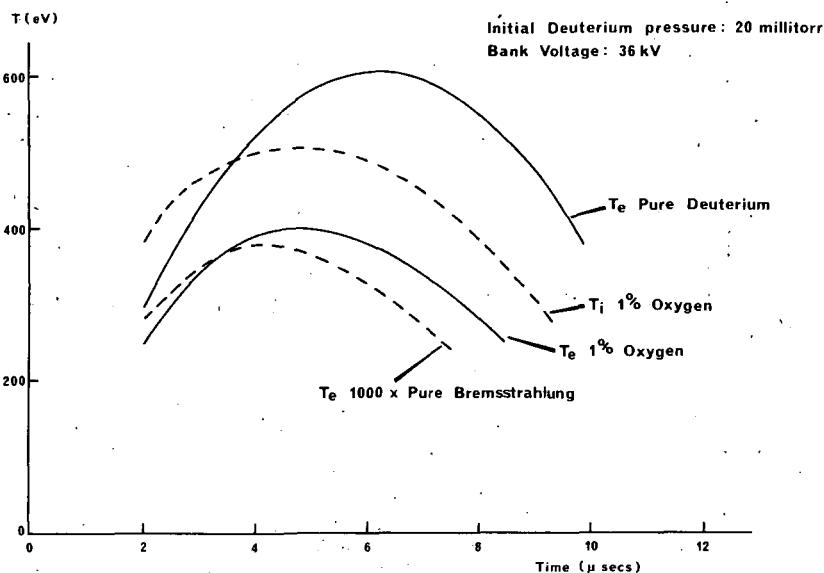


FIG.11. Theoretical electron and ion temperatures

a radiated power equivalent to a thousand times the bremsstrahlung from a pure deuterium plasma and reduces the peak predicted temperature to 300 volts suggesting that the experimental plasma is radiation-cooled. Measurements in the visible spectrum show that though the pre-ionized plasma is free from oxygen lines these are present at the beginning of the main compression. An obvious source of the impurity is plasma contact with the wall during the second and subsequent half-cycles. Water vapour formed at this time can be absorbed in the quartz tube and released at the beginning of the next discharge. The concentration of oxygen impurity varies widely from shot to shot but by adding small percentages and observing the resulting line intensity

the quantity present in the nominally pure discharge is estimated to be about 1 - 2%.

3.4 Plasma Density

The electron density has been measured as a function of radius by making absolute measurements of the continuum emission in the visible spectrum using a technique first described by Eberhagen and Keilhacker⁽¹⁸⁾. Light from the plasma is collected by ten fibre bundles each connected to a photomultiplier. A filter with a bandwidth of 10 Å is incorporated in the optical path to select a suitable line-free region for the measurement. The fibre bundles are mounted so as to receive light along ten horizontal chords spaced symmetrically in the vertical plane. Assuming the plasma possesses axial symmetry the radial density distribution can be obtained by numerical integration of the photomultiplier output using the Abel inversion technique. A second integration then gives the plasma line density, i.e. the total number of electrons per centimetre length. Information on the radial distribution of plasma electrons at any axial position is thus obtained as a function of time.

Corrections must be applied for both impurity concentration and variations in electron temperature though the effect of the latter is quite small. Limitations to the accuracy are given by background light from the walls, the assumption of cylindrical symmetry, and the errors introduced by the numerical technique. The experimental uncertainty is estimated to be 20%.

The measured peak electron density in the mid-plane of the coil is compared with the predicted values in Fig.12 assuming the presence of 1% of oxygen. A peak electron density of $1.2 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ is obtained. In Fig.13 the radial distribution in the mid-plane is compared with the numerical distribution during the early stages and at peak field. The theoretical distribution shows a smaller plasma diameter and a higher concentration on the axis indicating a higher plasma β , that is a higher ratio of plasma pressure to external magnetic pressure. The lower β of the experimental plasma is a consequence of magnetic field diffusion in the early stages.

Whereas in the theoretical case the average β taken over the body of the plasma is about 0.8, it is no more than 0.5 for the experimental plasma. It will be seen that this low experimental plasma β has a serious effect on axial containment.

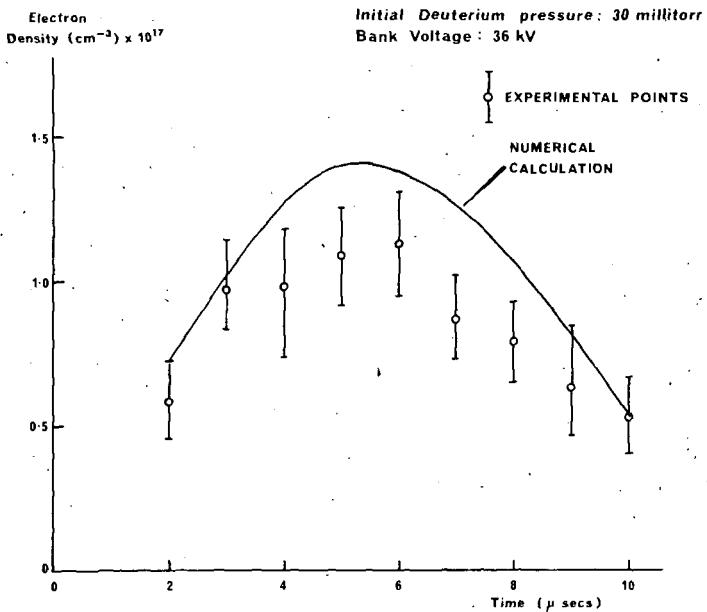
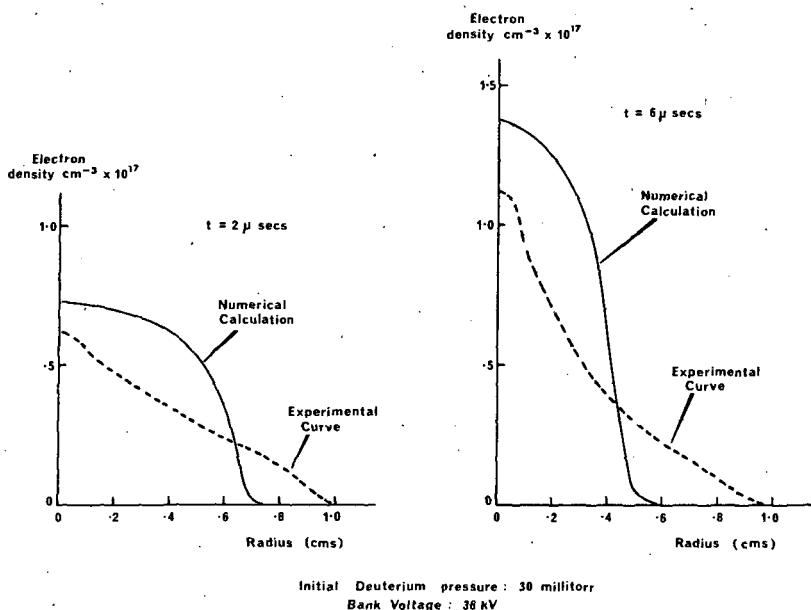


FIG. 12. Variation of peak electron density with time - experiment and theory

FIG. 13. Theoretical and experimental radial density distribution at $t=2 \mu s$ and $t=6 \mu s$

3.5 Neutron Yield

At a bank voltage of 40 kV and initial pressure of 20 mtorr the neutron yield is 8×10^7 neutrons - to within a factor of two. The relative rate of neutron output at various bank voltages is shown in Fig.14. A noteworthy feature of these curves is the occurrence of peak emission well before peak magnetic field particularly at the highest voltage. This effect is reproduced in the numerical programme when oxygen impurity is included, again suggesting that the plasma is radiation-cooled.

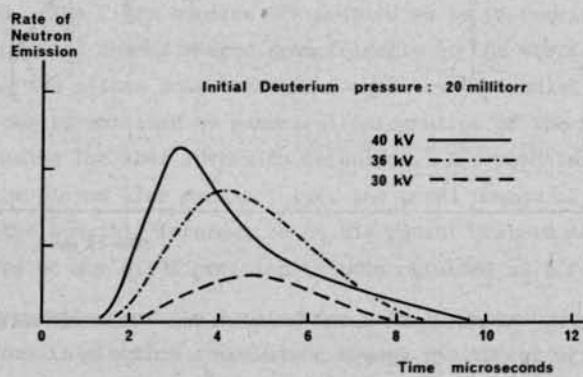


FIG. 14. Rate of neutron emission at various bank voltages

4. The Wobble Effect

An interesting new phenomenon revealed by initial megajoule experiments is the presence of a low-amplitude rotational oscillation of the plasma about the axis of the coil - an instability which for brevity is termed plasma 'wobble'.

The nature of this effect is best demonstrated by stereoscopic streak photographs taken in the centre plane of the coil as shown in Fig.15. For the first 4 μ s the plasma is close to the centre of the tube but thereafter rotates about the coil axis with a period of some 2 μ s. The locus of the plasma centre as a function of time is plotted in Fig.16 in which the figures adjacent to the curve indicate the time in microseconds.

High speed streak photographs of the wobble effect have demonstrated the following features:

- (i) The growth time of the instability is about 3 μ s.

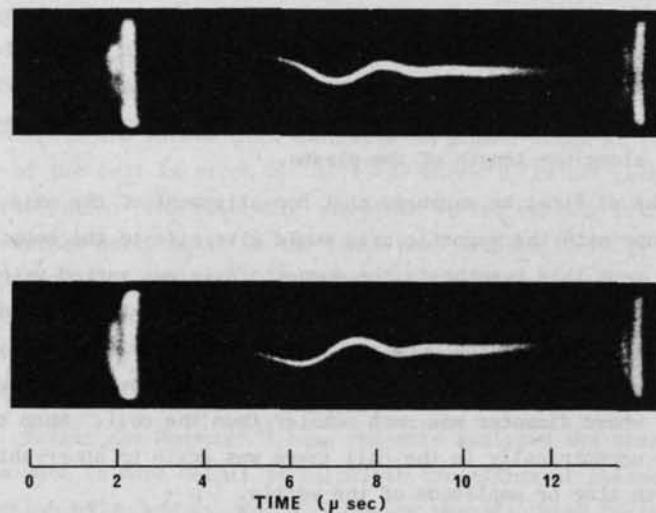


FIG. 15. Stereoscopic streak photograph showing plasma motion in the centre plane of a 200 cm coil. Bank voltage 30 KV 20 μ deuterium.

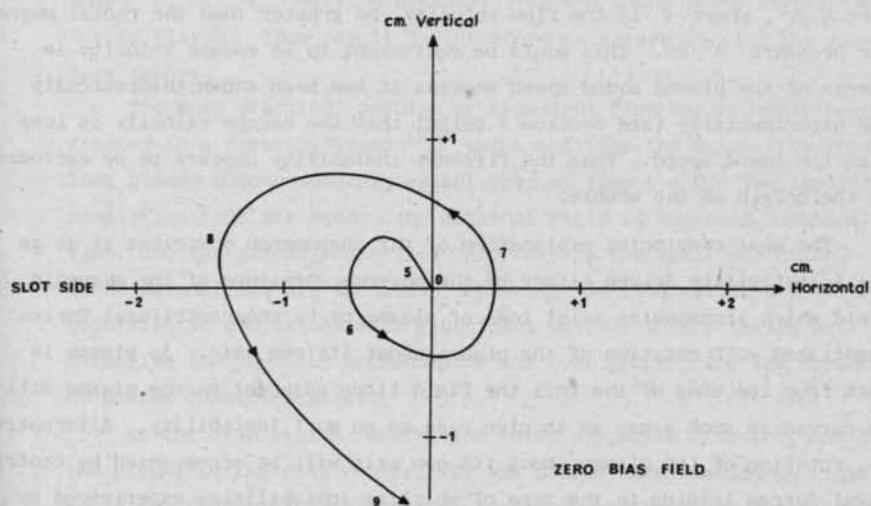


FIG. 16. Motion of plasma at centre of coil. Figures indicate time in microseconds.

- (ii) The effect is most pronounced with zero initial bias magnetic field and is suppressed by a few hundred gauss of trapped parallel field.
- (iii) The wobble is most marked at initial gas pressures below 30 mTorr and occurs only with very low amplitude at pressures above 50 mTorr.

- (iv) The wobble occurs at all points along the length of the coil. It grows slightly earlier at the end than at the middle but the difference in time is no more than a microsecond. There is no clear correlation of the frequency and phase of the oscillation along the length of the plasma.

It might at first be supposed that non-alignment of the axis of the discharge tube with the magnetic axis would give rise to the wobble motion. In order to test this hypothesis the magnetic axis was varied using a series of inductive lenses. Pronounced plasma drift was thereby produced but with no discernible effect on the wobble. An even more convincing demonstration of the independence of the wobble and the drift was provided using a discharge tube whose diameter was much smaller than the coil. When this tube was mounted eccentrically in the coil there was again no observable effect on the growth time or amplitude of the wobble.

Another explanation of the oscillation is that it is a form of firehose instability driven by the dynamic pressure of plasma escaping from the ends. However, a necessary pre-requisite for this process is that the axial pressure $\frac{1}{2} \rho v^2$, where v is the flow velocity, be greater than the radial magnetic pressure $B^2/8\pi$. This would be equivalent to an escape velocity in excess of the plasma sound speed whereas it has been shown theoretically and experimentally (see Section 5 below) that the escape velocity is less than the sound speed. Thus the firehose instability appears to be excluded as the origin of the wobble.

The most convincing explanation of the phenomenon describes it as an $m = 1$ instability driven either by the adverse curvature of the magnetic field which accompanies axial loss of plasma or by the centrifugal forces associated with rotation of the plasma about its own axis. As plasma is lost from the ends of the coil the field lines adjacent to the plasma will be curved in such a way as to give rise to an $m=1$ instability. Alternatively, rotation of the plasma about its own axis will be accompanied by centrifugal forces leading to the type of whirling instabilities experienced by flexible shafts rotating at high speed. The experimental data are consistent with either of these explanations but further work is necessary before the precise mechanism can be advanced with confidence.

5. End Losses

5.1 Theoretical Summary

In this section recent theoretical work on axial loss of plasma is summarised so that it may be compared with preliminary experimental observations. The rate of axial flow is sharply dependent on plasma

β since it is the trapped magnetic field which determines the size of the magnetic orifices through which the plasma escapes. Phillips⁽¹⁹⁾ and Roberts⁽²⁰⁾ first calculated the steady-state loss rate as a function of β and showed that the ratio of plasma areas at the centre and end of the coil is given by $R/\sqrt{1-\beta}$ where R is the geometrical mirror ratio. The hole size therefore varies rapidly with β as β approaches unity until in the limit when trapped field is completely excluded the loss rate is governed by flow through a hole whose diameter has been calculated to be the ion Larmor diameter⁽¹⁹⁾. This sensitivity of the loss rate to the plasma β has been confirmed experimentally^(13,21) by varying the trapped magnetic field.

Taylor and Wesson⁽²²⁾ have recently analysed the steady state loss rate in more detail to calculate the efflux of plasma J as a function of β and R . For a plasma of specific heat ratio $\gamma = 2$ and $R = 1$ the efflux is given simply by

$$J = \rho_0 A_0 c_s \sqrt{1-\beta}$$

where ρ_0, A_0, c_s are the density, area and sound speed of the undisturbed plasma. This result is therefore an agreement with the elementary theory.

The more practical problem of transient flow has recently been treated in a paper by Wesson⁽²³⁾ which analyses the axial flow from a long plasma column suddenly established at time $t = 0$. Two important simplifications are made: the external field is supposed constant with time, and the plasma properties vary only in the axial direction. Both these assumptions are violated in practice so it is difficult to make quantitative comparison with experiment but the theory serves well to establish the physical mechanism of the loss process and its dependence on plasma characteristics.

As the flow begins rarefaction waves propagate from the ends of the plasma to the coil centre. If the plasma were bounded by rigid walls the propagation velocity would simply be the sound speed c_s . However, because of the flexibility of the confining magnetic walls the waves propagate as area waves in which the density perturbation is accompanied by an area change. The propagation characteristics of such waves were first analysed by Taylor⁽²⁴⁾ who showed that the ratio of area wave velocity v to sound velocity c_s is given by

$$\frac{v^2}{c_s^2} \left[1 + \frac{2}{\gamma} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right] = \frac{2}{\gamma} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) + \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{A}{A_0} - 1 \right) \left[1 + \left(\frac{\gamma}{2} - 1 \right) \right]} \right]$$

where A_0 is the undisturbed plasma area and A is the coil area.

For $\gamma = 2$ the equation simplifies to

$$v^2 = c_s^2 \left[(1 - \beta) + \beta \frac{A_0}{A} \right]$$

from which it follows that at low β the area wave velocity is approximately the sound speed whereas at high β it is reduced in the ratio of the plasma diameter to the coil diameter. In the practical case where $A_0 \ll A$ the equation becomes simply

$$v = c_s \sqrt{1 - \beta}$$

so that the area wave velocity and the sound speed are related in the same fashion as the area of the magnetic orifice to the cross-section of the undisturbed plasma.

The above results have been obtained by the application of many simplifying assumptions but they exhibit the essential physical feature: the velocity with which the area waves travel along the plasma from the ends of the coil to the centre plane is a measure of the rate of plasma escape through the magnetic orifices. This is an important result since it shows that the loss rate can be measured by the time it takes an area wave to reach the centre plane: for a poorly confined plasma in which β is low this will be the sound transit time; for a highly constricted plasma it can be many sound transit times.

Wesson has plotted the plasma properties along the coil as a function of time for a range of values of plasma β and mirror ratio R . Essential aspects of these calculations are illustrated in Figs. 17 and 18. Fig. 17 is a diagram showing the propagation of an area wave and the accompanying plasma flow for $\beta = 0.5$. The wave characteristics and the particle paths are denoted by full and dotted lines respectively and time is here plotted in units of L/v where L is the coil half-length. Fig. 18 shows the line density as a function of time at various planes along the coil. The curves have been drawn for $\beta = 0.9$ to illustrate the effect of a high β . The plasma is undisturbed until the arrival of the area wave and then the line density falls sharply as the axial flow of plasma commences.

5.2 Interferometer Results

A Mach-Zehnder optical interferometer has been used to measure the total number of particles confined by the discharge as a function of time. In this technique monochromatic light is split into two beams, the test and reference beams, one of which passes through the plasma whilst the other traverses a similar path in undisturbed air. When

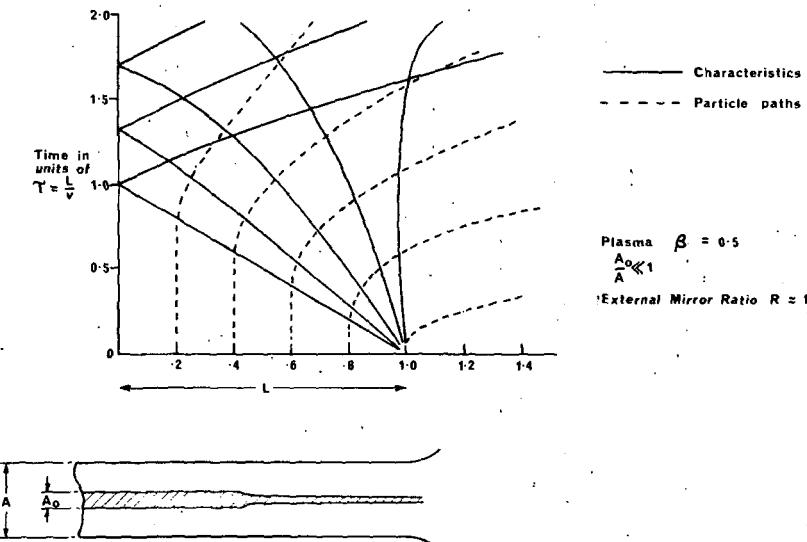


FIG. 17. Area wave diagram for axial plasma flow from a theta pinch

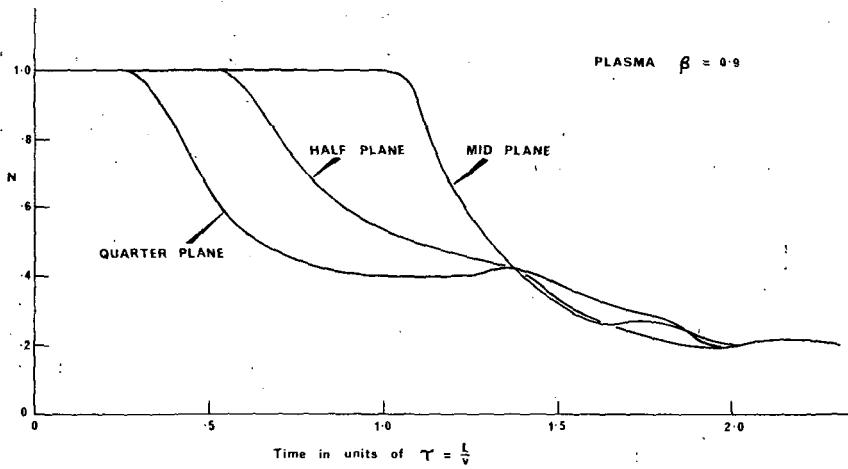


FIG. 18. Theoretical values of line density N as a function of time in various planes along the length of the coil

the beams are reunited the resulting fringe pattern provides a measure of the phase difference introduced by the plasma and from this the total number of electrons can be calculated. The Mach-Zehnder interferometer is convenient to use since it allows a wide separation between test and reference beams. A récent publication⁽²⁵⁾ describing the investigation of the Scylla theta pinch using this instrument con-

tains a valuable discussion of the technique together with references to earlier work.

A diagram of the instrument is shown in Fig.19. The two beam splitters A and B, and the full reflectors C and D are mounted in a horizontal plane and the total path length in each beam is 45 ft.

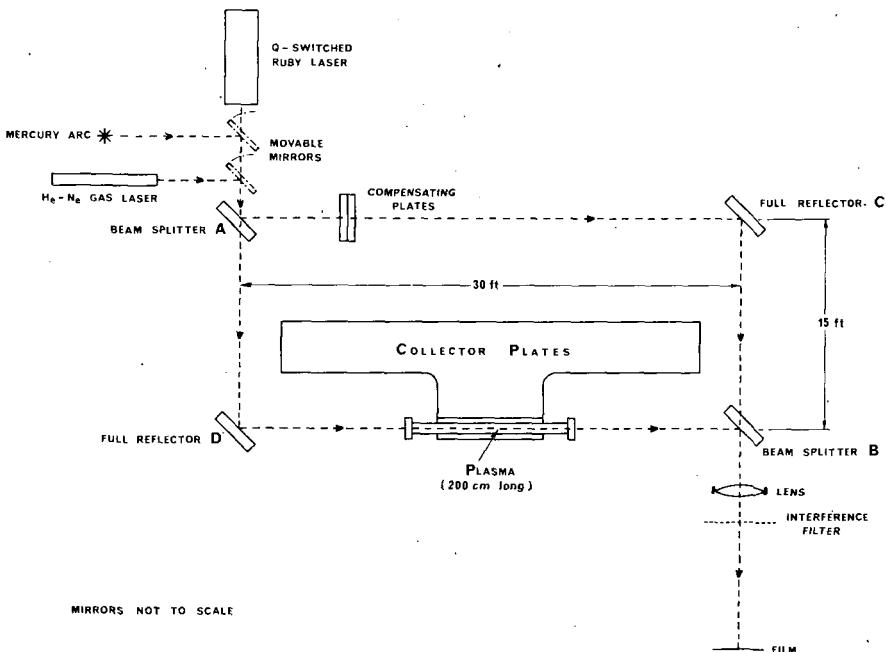


FIG. 19. Mach-Zehnder interferometer applied to the Megajoule experiment

A Q-spoiled ruby laser working at room temperatures at a wavelength of 6943 \AA was used as a light source and had a power output of 1 MW and a pulse length of 2×10^{-8} secs. It could be triggered at any pre-determined time with respect to the theta pinch so that a life-history of the plasma decay was assembled by repeated exposure on successive discharges. The quantity determined at each radial position is the integrated number of electrons along an axial path, $\int n_e dz$ electrons/cm². One tenth of a fringe shift can readily be detected in practice and for a 200 cm long plasma this means that a change in density of just over 10^{14} electrons/cm³ can be resolved.

Fig.20 is a representative example of the interferograms obtained at 12 mTorr initial deuterium pressure. The original arrangement of straight fringes has been transformed into a pattern of seventeen

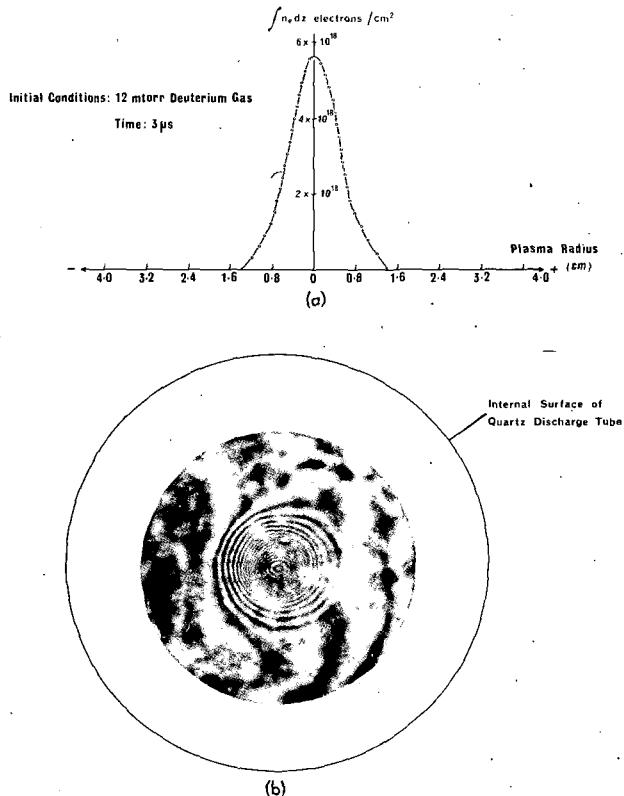


FIG. 20. Mach-Zehnder interferogram of thvatron plasma. a) Radial distribution of plasma electrons attained from interferogram. b) Axial interferogram.

closed rings. The upper diagram presents the parameter $\int n_e dz$ as a function of radius; this shows that the plasma is situated centrally in the discharge tube and that outside the main plasma cylinder the density is very small. Interferograms taken at initial pressures greater than 15 mTorr show a sharply reduced intensity near the centre of the fringe system at late times during the half-cycle. It is suspected that this is a result of large radial density gradients which deflect the light rays traversing the central plasma region and further investigations are being made to clarify this point.

In Fig. 21 the total number of plasma electrons is presented as a function of time for the deuterium discharge at 12 mTorr. The results are shown as a ratio of the measured number of electrons to those originally present. The scatter in the experimental points is attributed to shot-to-shot variation in discharge properties though this seems an in-

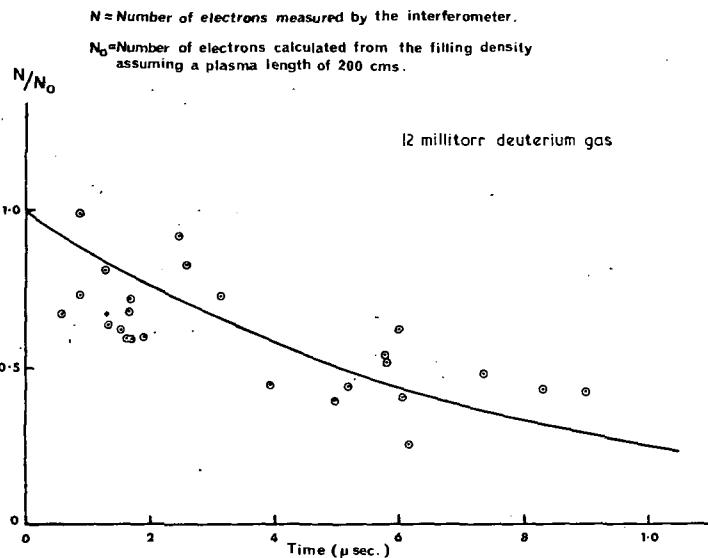


FIG. 21. Total number of plasma electrons as a function of time

adequate explanation since the initial conditions were controlled with care. Nevertheless the results exhibit a clear trend of plasma decay from which a gross plasma loss rate can be estimated. The smooth curve drawn through the results shows that the total number of electrons decays with an e-folding time of $7.2 \mu\text{s}$.

5.3 Continuum Measurement

The plasma line density in the mid-plane of the 2-metre coil has been measured from the visible continuum emission as discussed in Section 3.4. Results for a discharge at 30 mTorr pressure are shown in Fig. 22 where the absolute electron line density N is plotted against time.

The line density is approximately constant for the first $6 \mu\text{s}$ but thereafter drops rapidly. This behaviour is consistent with the propagation of area waves from the ends of the coil to arrive in the mid-plane at $6.5 \mu\text{s}$. On this assumption the mean area wave velocity v is $15 \text{ cms}/\mu\text{s}$ compared with the mean sonic speed c_s of $22 \text{ cms}/\mu\text{s}$. A ratio v/c_s of 0.7 corresponds to a mean plasma β of 0.5 which agrees with the value obtained from the experimental density distribution of Fig. 13. Of course the plasma β varies sharply with radius and at the boundary where β is low the plasma will tend to be lost rapidly whereas on the axis it will be relatively well confined. The β value

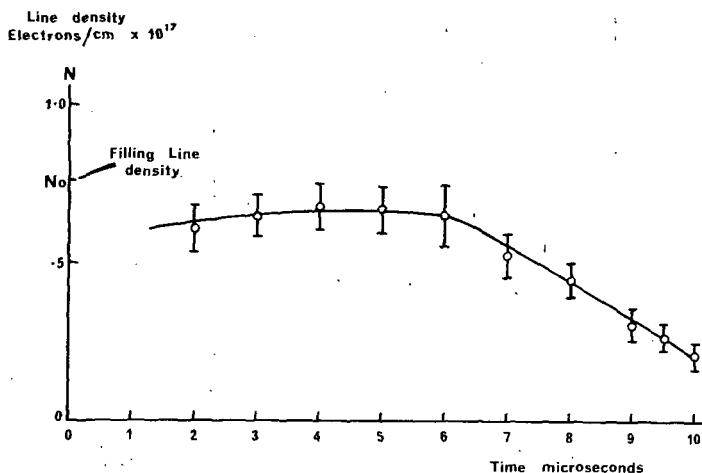


FIG. 22. Line-density at the mid-plane of the coil as a function of time

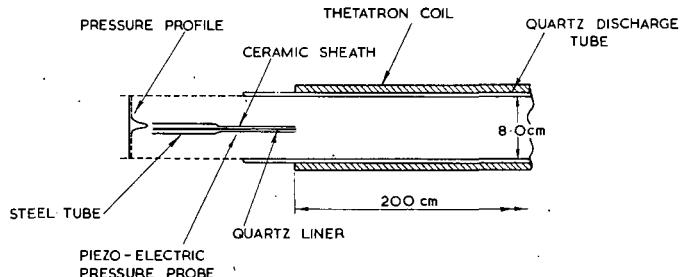
obtained from the area wave velocity can therefore only be approximate; nevertheless it appears consistent with the other observations.

5.4 Pressure Probe Data

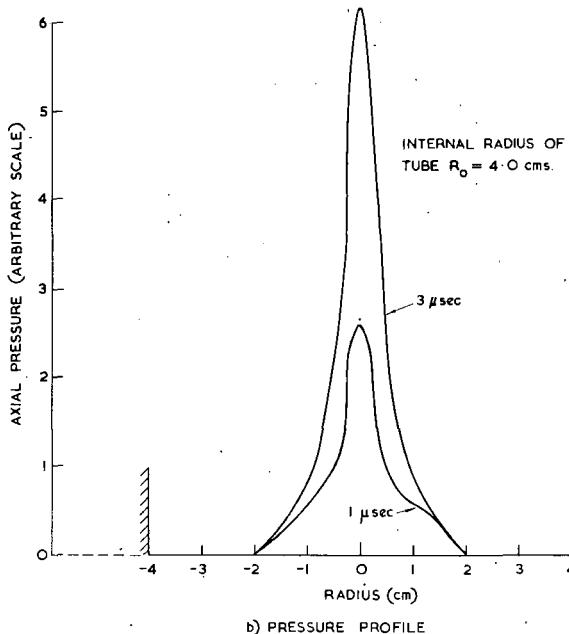
Additional results concerning the mechanism of axial plasma loss have been obtained using piezo-electric pressure probes of the type described by Stern and Dacus⁽²⁶⁾. The piezo-electric crystal is mounted in a quartz acoustic line which is enclosed in an independently supported ceramic sheath. The whole assembly is placed inside a stainless steel tube which enters the discharge vessel through a sliding O-ring seal. The plasma pressure profile was measured in the end plane of the coil by traversing the quartz rod across a diameter of the discharge vessel as illustrated in Fig.23. The accompanying curves show the profile at 1 μ s and 3 μ s; at these early times the results are consistent from shot-to-shot whereas at 4 μ s and thereafter the curves are irreproducible owing to the onset of the wobble.

The measurements confirm the interferometer results that plasma pressure near the wall is negligible. Peak pressure occurs within a millimetre of the central axis until the wobble begins. At 3 μ s the plasma diameter estimated from the width of the pressure profile at half-height is 0.75 cm as compared with 1 cm in the mid-plane. The corresponding area ratio indicates a plasma β of 0.6; once again this rough estimate is in line with the results obtained in other ways.

The pressure profile shown in Fig.23 are essentially preliminary measurements which at present can give only a crude estimate of plasma shape and axial pressure; but the technique has clear possibilities of development which should enable it to yield data on the loss process which is unobtainable by other means.



a) EXPERIMENTAL ARRANGEMENT



b) PRESSURE PROFILE

FIG. 23. Axial loss in the thetratron: pressure profile of escaping plasma

6. Discussion

The agreement between the measurements and the numerical calculations during the first two microseconds of the discharge is satisfactory. The implosion velocity, the radial oscillations, and the plasma diameter corres-

pond closely with their numerically determined counterparts suggesting that as far as the dynamic processes are concerned the hydromagnetic code provides a faithful representation.

The results provide no evidence for serious plasma instabilities. With proper shaping of the collector the plasma is confined centrally in the coil during the complete half-cycle. Against this must be set the appearance of the $m = 1$ wobble effect. This instability is of small amplitude however and at no time does it lead to plasma contact with the wall.

A serious limitation on the plasma temperature is set by the rapid electron energy loss. The circumstantial evidence for this electron cooling is strong. The behaviour of the diamagnetic signal, the X-ray absorption measurements, the diffuse radial density distribution, and the shape of the neutron curve all point in this direction.

There are two alternative explanations for this rapid energy drain: radiation from the impurity atoms; and thermal conduction along the magnetic field lines to cold regions beyond the ends of the coil. Radiation losses dominate at low temperatures and high densities and can always be reduced by elimination of the impurity material. Thermal conduction represents a far more serious problem since the rapid increase in conductivity with electron temperature sets a practical limit to the plasma temperatures which can be sustained.

Magnetic field diffusion during the early stages of the discharge and the rapid loss of energy from the electron gas are the main reasons why the mean plasma β is no more than 0.5 at peak compression and are therefore indirectly responsible for the axial loss of plasma. The interferometer results, the continuum data and the pressure profiles combine to show that the containment time is only slightly longer than the sound transit time. Improvement can be obtained by the use of external mirrors but a major advance requires an increase in the mean β to near unity. The main problem for the future is therefore the reduction in the rate of loss of energy sustained by the electrons.

7. Acknowledgements

The authors wish to express their thanks to colleagues who contributed to the work reported here. Messrs. C.A. Bunting, D.J. Dancy, P.L. Davidson, G.C.H. Heywood, M. Keilhacker, F.J. Kivlin and J.W. Long assisted with the plasma measurements, whilst Dr. J.M.P. Quinn provided the pre-ionization data presented in Section 2.2. Messrs. D.V. Bayes, R.J. Hucklesby, N.R. McCormick, D. Markins and T. Quayle were responsible for the design, construction and

operation of the capacitor banks and without their invaluable co-operation none of the experiments could have been performed. Finally, acknowledgements are due to Dr. P.C. Thonemann for his enthusiastic support and encouragement.

8. References

1. E.M. Little et al., Nuclear Fusion Supplement Part II, 497, (1962).
2. A.C. Kolb et al., Nuclear Fusion Supplement Part II, 553, (1962).
3. L.M. Goldman et al., Phys. Rev. Letters, 9, 361, (1962).
4. E. Funfer et al., Z. Naturforsch, 17a, 967, (1962).
5. H. Beerwald et al., Nuclear Fusion Supplement Part II, 595, (1962).
6. H.A.B. Bodin et al., Nuclear Fusion Supplement Part II, 521, (1962).
7. J.A. Reynolds et al., Physics of Fluids, 8, 529, (1965).
8. E.E. Aldridge, Culham Laboratory Memorandum CLM -M 33, (1964).
9. T.S. Green et al., Culham Laboratory Memorandum CLM -M 43, (1965)
10. K. Hain, K.V. Roberts et al., Zeitschrift fur Naturforschung, 15a 1039, (1960).
11. K.V. Roberts, J. Nuclear Energy Part C, 5, 365, (1963).
12. A.C. Kolb and R.P. McWhirter, Physics of Fluids, 7, 519, (1964).
13. T.S. Green, Nuclear Fusion, 2, 92, (1962).
14. T.S. Green et al., to be published in Proceedings of VIIth Conference on Ionization Phenomena in Gases, Belgrade, (1965).
15. G.B.F. Niblett and T.S. Green, Proc. Phys. Soc., 74, 737, (1959).
16. J.B. Taylor, Proceedings of a Conference on Theoretical Aspects of Controlled Fusion Research, Gatlinburg, Tenn: U.S. Atomic Energy Commision Document TID - 7582 (1959).
17. B.C. Fawcett, A.H. Gabriel and F.J. Morgan. To be published.
18. A. Eberhagen and M. Keilhacker, Proceedings of the VIth Conference on Ionization Phenomena in Gases, Paris (1963).
19. N.J. Phillips and J.K. Wright, J. Nuclear Energy Part C, 1, 240, (1960).
20. K.V. Roberts, J. Nuclear Energy Part C, 1, 243, (1960).
21. T.S. Green, Physics of Fluids, 6, 864, (1963).
22. J.B. Taylor and J.A. Wesson, Nuclear Fusion, to be published, (1965).
23. J.A. Wesson, These Proceedings, (1965).

24. See Appendix to paper by H.A.B. Bodin et al., Nuclear Fusion Supplement II, 511, (1962).
25. F.C. Jahoda et al., J. Appl. Phys. 35, 2351, (1964)
26. M.O. Stern and E.N. Dacus, Rev. Sci. Instrum., 32, 140, (1961).

DISCUSSION

W.E. QUINN: Have you performed any preliminary plasma experiments with the passive crowbar system?

G.B.F. NIBLETT: Yes. We have a few preliminary results using a passive crowbar circuit to extend the duration of the magnetic pulse from 12 to about 30 μ s. These results show that the plasma remains free of drift to the wall throughout this extended period. Moreover, the amplitude of the "wobble" motion described in the paper does not appear to grow significantly when the duration of the field is increased.

J.R. ROTH: The plots of density with radius must have involved some assumption about the radial temperature profile. Did you observe a radially increasing temperature profile?

G.B.F. NIBLETT: We have not measured the radial variation of electron temperature. In order to determine the radial density distribution from the continuum radiation in the visible spectrum we have assumed that the electron temperature is uniform across the plasma diameter. For a given radiation intensity the density is proportional to the fourth root of the electron temperature, so that the effect of variations in the latter quantity are quite small. Moreover, the numerical hydromagnetic calculations show that the effect of ion thermal conductivity is to smooth out temperature gradients in the radial direction.

S.J. BUCHSBAUM: On the Mach-Zehnder interferogram in Fig. 20 there are black and white blotches. What were they due to?

G.B.F. NIBLETT: They were caused by imperfections in the ruby laser which was used as a source.



PLASMA FLOW IN A THETA PINCH

J. A. WESSON

UNITED KINGDOM ATOMIC ENERGY AUTHORITY,
THE CULHAM LABORATORY,
ABINGDON, BERKS., ENGLAND

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

PLASMA FLOW IN A THETA PINCH. In the absence of instabilities, the loss of plasma in a theta pinch is almost wholly due to flow along the magnetic field to the ends of the coil. Thus, in order to understand the containment of the plasma, it is necessary to study the transient axial flow of the plasma. This is done in the present work by setting up a simple model of the plasma in which the problem is reduced to that of studying a one-dimensional flow.

Initially a similarity area-wave is propagated from the open ends. The properties of this wave and the resulting loss are calculated. For high- β plasmas the plasma is lost rapidly behind the wave-front. However, the wave-front itself propagates very slowly and the resulting loss is consequently small. In these conditions the loss is approximately equal to that of the corresponding steady flow. For lower values of β the loss is much less than in the steady flow. When the rarefaction waves from the two ends reach the centre of the pinch they are reflected. The trajectory of the reflected wave is determined as a function of β and wave profiles calculated by numerical integration of the equations are presented. The flow may be reduced by applying increased fields at the ends of the pinch. In this case a rarefaction wave is propagated from these "mirrors", but behind the wave there is a region of uniform flow. This flow pattern is described and the resulting loss rate calculated.

ÉCOULEMENT DU PLASMA DANS UNE STRCTION AZIMUTALE. En l'absence d'instabilités, les pertes de plasma au cours d'une striction azimutale sont presque entièrement dues à l'écoulement qui se produit dans la direction du champ magnétique, vers les extrémités de la bobine. Pour comprendre le confinement du plasma, il faut donc étudier l'écoulement axial transitoire du plasma. Les auteurs du mémoire procèdent à cette étude en établissant un modèle simple du plasma dans lequel le problème est réduit à celui de l'étude d'un écoulement unidimensionnel.

Initialement, une onde de similitude se propage à partir des extrémités libres. On calcule les propriétés de cette onde et les pertes qui en résultent. Pour les plasmas à β élevé, il se produit une perte rapide derrière le front de l'onde. Toutefois, le front de l'onde lui-même se propage très lentement et les pertes entraînées sont donc faibles. Dans ces conditions, les pertes sont approximativement égales à celles de l'écoulement stationnaire correspondant. Pour de plus faibles valeurs de β , les pertes sont très inférieures à celles de l'écoulement stationnaire. Lorsque les ondes de raréfaction venant des deux extrémités atteignent le centre de la striction, elles sont réfléchies. Les auteurs déterminent la trajectoire de l'onde réfléchie en fonction de β ainsi que les profils d'ondes calculées par intégration numérique des équations. Il est possible de réduire l'écoulement en appliquant des champs plus élevés aux extrémités de la striction. Dans ce cas, une onde de raréfaction se propage à partir de ces «miroirs», mais il existe derrière l'onde une région d'écoulement uniforme. Les auteurs décrivent les caractéristiques de cet écoulement et calculent le taux des pertes qui en résultent.

ПОТОК ПЛАЗМЫ ПРИ ТЕТА-ПИНЧЕ. При отсутствии неустойчивостей потеря плазмы при тета-линче почти полностью обусловлены наличием потока вдоль магнитного поля к концам катушки. Таким образом, в целях изучения удержания необходимо исследовать неуставновившийся аксиальный поток плазмы. Это осуществляется в данной работе путем создания простой модели плазмы, в которой проблема сводится к задаче изучения одноразмерного потока.

Первоначально область однородности — волна распространяется от открытых концов. Рассчитываются свойства этой волны и конечные потери. Показано, что при больших β плазма быстро теряется позади фронта волны. Однако сам фронт волны распространяется очень медленно, и конечные потери соответственно невелики. В этих условиях потери приблизительно равны потерям при соответствующем постоянном потоке. При меньших значениях β потери

значительно меньше, чем при постоянном потоке. Когда волны разрежения от обоих концов достигают центра плазменного шнуря, они отражаются. Траектория отраженной волны определяется как функция β , и представляются профили волн, рассчитанные в результате численного интегрирования уравнений. Поток можно уменьшить при использовании полей, усиливающихся на концах плазменного шнуря. В данном случае волна разрежения распространяется от этих "зеркал", но позади волны имеется область однородного потока. Описывается форма этого потока, и рассчитывается размер конечных потерь.

FLUJO DE PLASMA EN UNA ESTRICCIÓN AZIMUTAL. En ausencia de inestabilidades, las pérdidas de plasma en una estricción azimutal son debidas casi por completo al flujo que se produce a lo largo del campo magnético, hacia los extremos de la bobina. Por lo tanto, con objeto de poder comprender el confinamiento del plasma, es necesario estudiar el flujo axial transitorio del plasma. El autor efectúa un estudio de esa índole estableciendo un modelo sencillo del plasma, en el cual el problema se reduce al estudio de un flujo unidimensional.

Inicialmente se propaga, desde los extremos libres, una onda de semejanza. Se calculan las propiedades de esta onda y las pérdidas resultantes. En el caso de plasmas de β elevado se produce una rápida pérdida detrás del frente de onda. Sin embargo, el propio frente de onda se propaga muy lentamente y las pérdidas resultantes son, por consiguiente, pequeñas. En estas condiciones, las pérdidas resultan aproximadamente igual al flujo estacionario correspondiente. Para valores de β más pequeños, la pérdida es mucho menor que en el flujo estacionario. Las ondas de enrarecimiento procedentes de ambos extremos son reflejadas cuando llegan al centro de la estricción. El autor determina la trayectoria de la onda reflejada en función de β y presenta perfiles de ondas calculados por integración numérica de las ecuaciones. Se puede reducir el flujo aplicando campos que son más intensos en los extremos de la estricción. En este caso, se propaga una onda de enrarecimiento desde estos «espejos», pero detrás de la onda hay una región de flujo uniforme. El autor describe ésta distribución del flujo y calcula el índice de pérdidas resultante.

In the absence of instabilities the loss of plasma in a theta-pinch is mainly due to flow along the magnetic field to the ends of the coil. Thus in order to understand the containment of the plasma it is necessary to study the transient axial flow of the plasma. This is done in the present work by setting up a simple model of the plasma in which the problem is reduced to that of studying a one-dimensional flow.

Initially a similarity area-wave is propagated from the open ends. The properties of this wave and the resulting loss are calculated. It is shown that for high- β plasmas the plasma is lost rapidly behind the wave-front. However the wave-front itself propagates very slowly and the resulting loss is consequently small. In these conditions the loss is approximately equal to that of the corresponding steady flow. For lower values of β the loss is much less than in the corresponding steady flow.

When the rarefaction waves from the two ends reach the centre of the pinch they are reflected. The trajectory of the reflected wave is determined as a function of β .

The flow may be reduced by applying increased fields at the ends of the pinch. In this case a rarefaction wave is propagated from these "mirrors", but behind the wave there is a region of uniform flow. This flow pattern is described and the resulting loss rate calculated.

1. Introduction

In the absence of instabilities the loss of plasma in a theta-pinch in the parallel field configuration is mainly due to flow along the magnetic field to the ends of the coil. This flow will be restricted by a narrowing of the plasma column near the ends. This might arise in part from applied "mirror" fields but will occur in any case due to the fact that the plasma pressure is lower at the end of the pinch. The external magnetic field constricts the plasma in this region to maintain a pressure balance by increasing the trapped magnetic field. If the area of the plasma in this region is A_m it is expected that the rate of loss of plasma will be of the order $\rho A_m V_{th}$ where ρ is the density and V_{th} the sound speed characterising the plasma. The initial estimates of this loss are discussed by Green⁽¹⁾. Recently Taylor and Wesson⁽²⁾ used a simple hydromagnetic model to calculate the loss rate in a steady state flow. It was found that the flow decreased with increasing mirror field and was approximately proportional to $(1 - \beta)^{\frac{1}{2}}$ where β is the ratio of the plasma pressure to the external magnetic field pressure.

However, the actual flow in a theta-pinch is transient and this transient flow is considered here. The model used is similar to that of Taylor and Wesson in which the problem is reduced to that of one dimensional flow.

Initially a similarity area-wave is propagated from the open ends. The properties of this wave and the resulting loss are calculated. It is shown that for high- β plasmas the plasma is almost completely removed behind the wave-front. However the wave-front itself propagates very slowly and the resulting loss is consequently small. In these conditions the loss is approximately equal to that of the corresponding steady flow. For lower values of β the loss is much less than that in the corresponding steady flow.

When the rarefaction waves from the two ends reach the centre of the pinch they are reflected. The trajectory of the reflected wave is determined as a function of β .

When the flow is reduced by applying a mirror field a rarefaction wave propagates inwards from the mirrors but behind the wave there is a region of uniform flow. This flow pattern is described and the resulting loss calculated.

II. Basic equations

The plasma is assumed to be formed in the magnetic field produced by azimuthal currents in a cylindrical coil whose axis is the x-axis and whose area is $A_w(x)$. The plasma has an area $A(x,t)$ and the magnetic flux Φ_i trapped in the plasma is assumed to be constant in x and t . The characteristic length of the variation of the plasma properties along x is taken to be much greater than the radius of the plasma, so that the internal magnetic field B_i is a function of x and t only, that is $B_i(x,t) = \Phi_i/A$. Radial inertial effects are neglected and

area of the plasma will therefore be determined by the pressure balance equation

$$p + \frac{\dot{A}^2}{8\pi A^2} = \frac{\phi_e^2}{8\pi(A_w - A)^2} \quad (1)$$

where $p(x,t)$ is the pressure of the plasma and ϕ_e is the flux between the plasma and the coil, this flux being taken as constant in x and t .

The plasma flow is described by equations similar to those for the isentropic flow of plasma in a duct. However in the present problem the area of the duct is not fixed but is time dependent being determined from equation (1) in terms of A_w which is given. The modified continuity equation is

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Av)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

The axial momentum equation is

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

and the isentropy equation is

$$p\gamma^{-1} = \text{constant} \quad (4)$$

Equations (1) to (4) are the basic equations of the model. For given initial and boundary conditions they determine the plasma flow. These equations may be put in the form

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + f(A) \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + v \frac{\partial A}{\partial x} + g(A) \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

where

$$f = \frac{2p_0}{\rho_0} \beta^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \left[\frac{(A_w - A_0)^2 / (A_w - A)^3 + (1 - \beta) A_0^2 / A^3}{[(A_w - A_0)^2 / (A_w - A)^2 - (1 - \beta) A_0^2 / A^2]^{1/\gamma}} \right]$$

and

$$g = A \left[1 + \frac{2A}{\gamma} \frac{[(A_w - A_0)^2 / (A_w - A)^3 + (1 - \beta) A_0^2 / A^3]}{[(A_w - A_0)^2 / (A_w - A)^2 - (1 - \beta) A_0^2 / A^2]} \right]^{-1}$$

where the subscript zero refers to a reference condition at some time, say $t = 0$.

III. Similarity flow

If the plasma is formed rapidly in a uniform coil and the magnetic field is then effectively constant a rarefaction wave will travel from the end of the theta-pinch into a plasma column which is uniform along its length. As there are no characteristic lengths associated with the flow until the rarefaction wave reaches the mid-plane the flow will be, up to that time, self-similar. That is

the flow pattern will be a function of $\xi = \frac{x}{t}$ only, where $x = 0$ is the position of the end of the pinch.

Equations (5) and (6) now become

$$(v - \xi) \frac{dv}{d\xi} + f \frac{dA}{d\xi} = 0 \quad (7)$$

and

$$(v - \xi) \frac{dA}{d\xi} + g \frac{dv}{d\xi} = 0$$

Thus $(v - \xi)^2 = c^2$ where

$$c^2 = f g \quad (8)$$

Choosing the negative square root for c gives

$$\xi = (v + c) \quad (9)$$

this choice of sign implies that the plasma lies in $x > 0$. Substitution of equation (9) into equation (7) leads to

$$v = \int_{A_0}^A \left(\frac{f}{g} \right)^{\frac{1}{2}} dA \quad (10)$$

where the subscript zero refers to the initial uniform condition. From equations (8), (9) and (10) ξ is known as a function of A and therefore A is known as a function of x/t . It follows that v and c are then known as functions of x/t .

In the case of most practical interest $A_w \gg A_0$ and therefore the appropriate limiting expressions for f and g may be used. This gives

$$v = -s \int_{\sqrt{1-\beta}}^z \left(\frac{1 + (\frac{2}{\gamma} - 1) z^2}{(1 - z^2)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}} \right)^{\frac{1}{2}} dz \quad (11)$$

and

$$c = s \left(\frac{z^2(1 - z^2)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1 + (\frac{2}{\gamma} - 1)z^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

where

$$z^2 = (1 - \beta) (A_0/A)^2$$

and

$$s^2 = \frac{2p_0}{\rho_0} \beta^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

Graphs of (constant - v) and c measured in units of s are given in Fig. 1. The

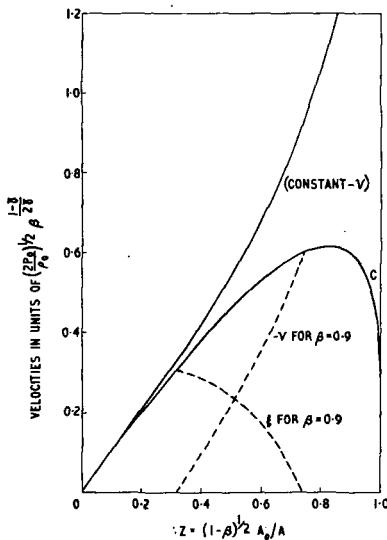


FIG. 1. Graphs of (constant $-v$) and c in units of $(2p_0/p_0)^{1/2} \beta(1-\gamma)/2\gamma$ against $z = (1-\beta)^{1/2} A_0/A$ and of $-v$ and ξ for $\beta = 0.9$

graph of v is obtained by displacing the (constant $-v$) curve downwards to intercept the z -axis at $z = (1 - \beta)^{\frac{1}{2}}$, ξ is then given by the difference between c and $-v$ as is illustrated in Fig. 1 for the case $\beta = 0.9$.

It is clear from this construction and the form of the graphs that for small values of $(1 - \beta)^{\frac{1}{2}}$ the whole of the relevant range of z will be in $z \ll 1$. Large values of β are of particular interest and this limit will therefore be studied analytically.

For small z

$$v = -s(z + \frac{1}{2\gamma} z^3 + \dots - (1 - \beta)^{\frac{1}{2}} - \dots) \quad (13)$$

and

$$c = s(z - \frac{1}{2\gamma} z^3 + \dots)$$

so that

$$\xi = \{(1 - \beta)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\gamma} z^3\}$$

and therefore

$$\frac{A}{A_0} = \left(\frac{(1 - \beta)/\gamma}{1 - \frac{s}{(1 - \beta)^{\frac{1}{2}}} \frac{x}{t}} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad A < A_0 \quad (14)$$

Equation (1) may be written

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1}{\beta} (1 - z^2) \quad (15)$$

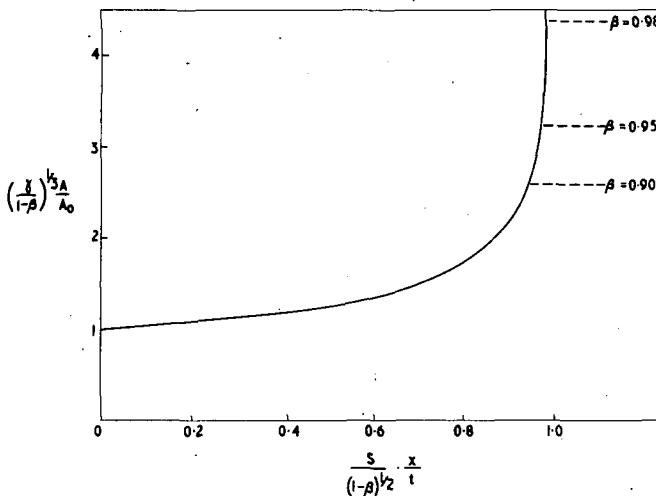


FIG. 2. Graph of $[\gamma/(1-\beta)]^{1/3} A/A_0$ against $[s/(1-\beta)^{1/2}]x/t$ for the high β limit. Dotted lines indicate the area of the undisturbed plasma for various values of β for $\gamma=5/3$.

so that in the limit $(1 - \beta) \rightarrow 0, \rho/\rho_0 \rightarrow 1$ and therefore $\rho/\rho_0 \rightarrow 1$. The velocity v is given by equations (13) and (14).

A graph of the wave profile A/A_0 given by equation (14) is shown in Fig. 2. The dotted lines indicate the undisturbed area A_0 of the plasma for various values of β . For small values of $(1 - \beta)$ the wavefront moves into the plasma with a velocity

$$\left(\frac{2}{\gamma}(1-\beta)\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Behind this wavefront the plasma is almost completely removed. The value of A is a minimum at $x = 0$ and $(A/A_0)_{\min} = \frac{(1-\beta)^{\frac{1}{3}}}{\gamma}$. This is in contrast to the steady state flow in which $(A/A_0)_{\min}$ is proportional to $(1-\beta)^{\frac{1}{2}}$. The velocity at $x = 0$ is $v = -s\gamma^{\frac{1}{2}}(1-\beta)^{\frac{1}{2}}$. The flow from the end of the pinch is $J_e = -(\rho Av)_{x=0}$, which is given by

$$J_e = \rho_0 A_0 \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} (1-\beta)^{\frac{1}{2}}.$$

To this approximation this is just $\rho_0 A_0$ times the velocity of the wavefront. This flow is the same as the steady flow derived by Taylor and Wesson but this agreement holds only for the case $\beta \approx 1$. For other values of β the loss rate is very different from that given by the steady state calculation as will be shown later.

The physical reason for the small flow at $\beta \approx 1$ may be seen by considering equation (15). This shows that for small $(1 - \beta)$ the kinetic pressure remains almost constant in order to balance the external magnetic pressure. Thus there is only a small pressure gradient to expel the plasma.

The limit $\beta \rightarrow 0$ may be treated similarly yielding

$$\frac{A}{A_0} = \left(\frac{1 - \beta}{1 - \beta \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(\frac{x/t}{\gamma P_0 / \rho_0} + \frac{2}{\gamma - 1} \right) \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

and therefore $(A/A_0)_{\min} = \left(\frac{1 - \beta}{1 - \beta \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}} \right)^{\frac{1}{2}}$

so that $(A/A_0)_{\min} = 1 - 0.382\beta$ for $\gamma = \frac{5}{3}$. The other variables may be determined as before.

The equations have been solved numerically for the general case and a graph of $(A/A_0)_{\min}$ against β for $\gamma = \frac{5}{3}$ is given in Fig. 3. The limiting solutions are also indicated. The end loss J_e is shown in Fig. 4. The corresponding loss for steady flow (2) is also shown to illustrate the large difference at low β .

IV. The reflected wave

When the rarefaction waves from the ends of the pinch meet at the centre they are reflected from each other. The trajectory of the reflected wave front will now be derived. From equations (5) and (6) it is seen that the behaviour of the system is determined by the characteristics

$$C_+ \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)_+ = v + c \quad (16)$$

and

$$C_- \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)_- = v - c$$

and the corresponding Riemann invariants

$$J_+ = v + \int \left(\frac{f}{g} \right)^{\frac{1}{2}} dA$$

and

$$J_- = v - \int \left(\frac{f}{g} \right)^{\frac{1}{2}} dA \quad (17)$$

Fig. 5 is a wave diagram showing the trajectories of the characteristics in the various regions of the (x, t) plane. The length of the pinch is taken to be 2ℓ . Characteristics arising in $0 < x < 2\ell$ carry a constant value of J_- into the similarity wave region so that in this region

$$v = \int_{A_0}^A \left(\frac{f}{g} \right)^{\frac{1}{2}} dA \quad (18)$$

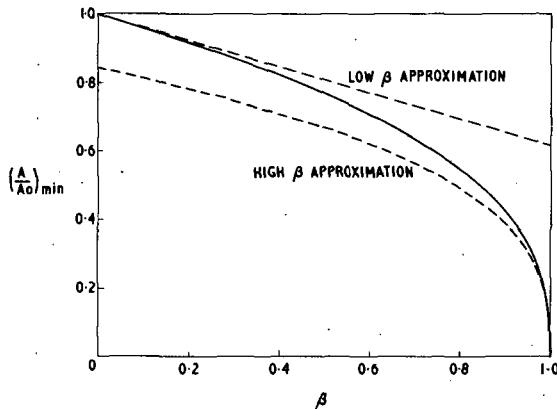


FIG. 3. Graph of $(A/A_0)_{\min}$ against β showing also the high β and low β approximations.

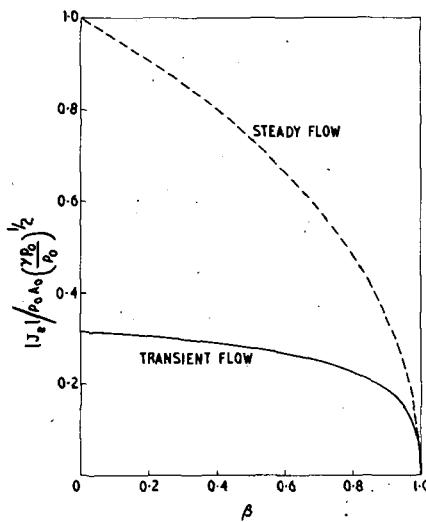


FIG. 4. Graphs of $|J_e| / \rho_0 A_0 (\gamma p_0 / \rho_0)^{1/2}$ against β for steady and transient flow ($\gamma = 5/3$)

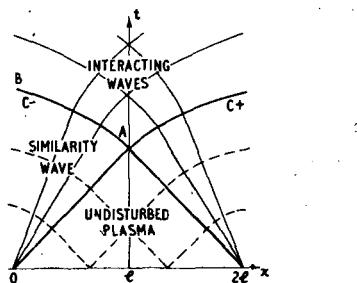


FIG. 5. Wave diagram showing characteristics in the (x, t) plane.

as before. On the required curve AB the values of $v(\frac{x}{t})$ and $c(\frac{x}{t})$ are known from the similarity flow solution so that

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_- = v\left(\frac{x}{t}\right) - c\left(\frac{x}{t}\right)$$

For small $(1 - \beta)$ this becomes

$$\frac{dx}{dt} = - s \left\{ 2\gamma^{\frac{1}{3}} [(1 - \beta)^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{st}]^{\frac{1}{3}} - (1 - \beta)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

At $x = \ell$ $\gamma^{\frac{1}{3}} [(1 - \beta)^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{st}]^{\frac{1}{3}} = (1 - \beta)^{\frac{1}{2}}$

so that $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=\ell} = - s (1 - \beta)^{\frac{1}{2}}$

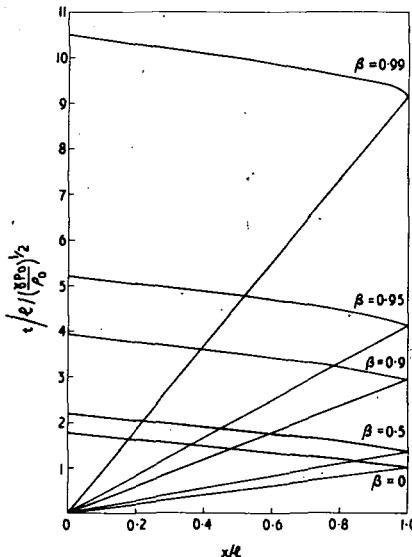


FIG. 6. Graphs showing the trajectories of reflected wave fronts for various values of β .

When x has decreased by a small distance $\Delta x \sim (1 - \beta)^{\frac{1}{2}}\ell$, then $((1 - \beta)^{\frac{1}{2}} - x/st)^{\frac{1}{3}} \sim (1 - \beta)^{1/6}$ and the wave front moves out rapidly with a velocity of the order of $- s (1 - \beta)^{1/6}$. This velocity is much higher than that of the inward moving wavefront, the reason being that the effective β of the plasma has been considerably reduced by the initial expansion wave. Consequently the velocity of the reflected wave is rather insensitive to the initial β value of the plasma. Several computed trajectories are plotted in Fig. 6.

V. The effect of "mirrors"

Assuming that the plasma is stable it should be possible to increase the containment time of the plasma in a theta-pinch by reducing the area of the magnetic orifice at the end of the pinch. This may be done by increasing the magnetic field in this region to form a "mirror" field. The resulting flow will be analysed on the assumption that the flow through the mirror is quasi-steady,

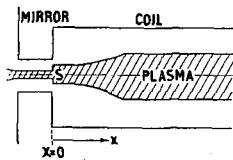


FIG. 7. Diagram of the plasma in the presence of a mirror.

the source, s , of this flow being effectively located in the immediate upstream neighbourhood of the mirror as illustrated in Fig. 7. In the following discussion the reflection of the wave at the mid-plane is ignored, the system being assumed to be essentially semi-infinite.

It has been shown by Taylor and Wesson⁽²⁾ that the steady flow in this situation is given by

$$J = - \rho_s A_s \left(\frac{\gamma \rho_s}{\rho_s} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot F(R) (1 - \beta)^{\frac{1}{2}}$$

where the subscript s refers to the source condition, R is the ratio of the external field at the mirror to that at s and

$$F(R) = (6R \cos [\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \cos^{-1} (\frac{1}{R})] - 2)^{\frac{1}{2}}$$

this being a monotonically decreasing function of R . This result is exact for $\gamma = 2$ and is a good approximation for $\gamma = \frac{5}{3}$.

From this it is seen that

$$v_s = - \left(\frac{\gamma \rho_s}{\rho_s} \right) F(R) (1 - \beta)^{\frac{1}{2}}$$

For $\gamma = 2$ this may be written

$$v = - c(A) F(R) \quad x = 0, \quad t > 0 \quad (19)$$

and for $\gamma = \frac{5}{3}$ this will again be a good approximation and will be used as such below.

Since the rarefaction wave travelling into the region $x > 0$ is moving into uniform stationary plasma the Riemann invariant J given by equation (17) will be constant for all x and t so that the velocity v is given by equation (18) and therefore J_+ will be a function of any one of the variables v , c and A . Thus v , c and A will be constants on each characteristic C_+ passing through the line $x = 0$, $t > 0$. From equations (18) and (19) the constant value of A_s , and therefore v_s and c_s , on the line $x = 0$, $t > 0$ may be determined, and these will be the values of A , v and c throughout the region influenced by the characteristics passing through this line.

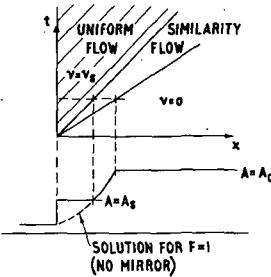


FIG. 8. Diagram illustrating the flow and the area wave profile in presence of a mirror.

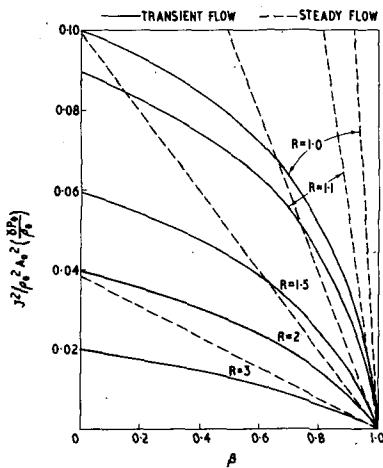


FIG. 9. Graphs of $J^2/\rho_0^2 A_0^2 (\gamma p_0 / \rho_0)$ against β for various values of R ($\gamma = 5/3$).

For characteristics passing through $x = 0$, $t > 0$ the solution will be the same as in the similarity flow of section III. These results are summarized in Fig. 8.

The wave front moves into the plasma with the velocity of a small amplitude area wave. This is followed by a rarefaction wave which expands as time increases. Behind this there is uniform flow, the conditions being such as to match the flow through the rarefaction wave to the flow through the mirror.

The details of a given flow may be derived from the diagram in Fig. 1. The wave front velocity is given by the value of c at $z' = (1 - \beta)^{\frac{1}{2}}$. The similarity solution holds between $z = (1 - \beta)^{\frac{1}{2}}$ and that $z (= z_s)$ for which $-v = Fc$. The resulting flow through the mirror is $J = \rho_s A_s v_s$ where, from equations (4) and (15)

$$\frac{\rho_s}{\rho_0} = [(1 - z_s^2)/\beta]^{\frac{1}{\gamma}}$$

This flow has been calculated for $\gamma = \frac{5}{3}$ and the results are given in Fig. 9. The dotted lines show the steady state flow for the same conditions. It is seen that

the transient flow approaches the steady flow as $\beta \rightarrow 1$ and is much less than the steady flow for $\beta \ll 1$.

Acknowledgement

The author would like to thank Mr. Ian Taylor for carrying out the numerical computation involved in this paper.

References

- (1) T.S. Green, Phys. Fluids, 6, 864, (1963).
- (2) J.B. Taylor and J.A. Wesson To be published in Nuclear Fusion, 1965.

DISCUSSION

N. A. KRALL: Reversed B_z is usually significant in reducing loss rates. Can you do an analogous calculation including reversed B_z ?

J. A. WESSON: There is no analogous calculation for reversed B_z , since in that case there is no one-dimensional approximation.

L. M. GOLDMAN: Is there any experimental evidence for the reduction in flow with mirror fields?

J. A. WESSON: I believe not.

A. C. KOLB: If you take the most optimistic view (namely, $\beta \approx 0.9$ and temperatures in the range 1 to 10 keV) how long a coil would be needed, according to your theory, to contain 50% of the plasma for, say 100 μ s?

J. A. WESSON: For $\beta = 0.9$ and no mirror, the coil would be 21 m long for 1 keV and 67 m long for 10 keV. With a mirror ratio of 2, the lengths would be 10 m and 33 m, respectively.



STABILITY, HEATING AND END LOSS OF A 3.5-MJ THETA PINCH (SCYLLA IV)

W.E. QUINN, E.M. LITTLE, F.L. RIBE AND G.A. SAWYER
LOS ALAMOS SCIENTIFIC LABORATORY,
LOS ALAMOS, N.MEX., UNITED STATES OF AMERICA

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

STABILITY, HEATING AND END LOSS OF A 3.5-MEGAJOULE THETA PINCH (SCYLLA IV). Experiments on stable, high-density, high-temperature, drift-free plasmas produced at initial deuterium filling pressures of 10 to 50 mTorr without bias magnetic fields (low-density regime), as well as at initial filling pressures of 50 to 125 mTorr with negative bias magnetic fields (high-density regime) have been reported. These measurements on the plasma generated by a "primary" capacitor bank of the Scylla-IV theta pinch (570 kJ at 50 kV with a 7.4- μ sec half period) included the following: Mach-Zehnder interferometer measurements of the plasma electron density, shape, stability, and end losses; x-ray absorption measurements of the electron temperature and impurity levels; neutron yields and collimation measurements of plasma length; shadowgraphs showing sharp plasma boundaries; and streak photographs showing gross plasma stability. In the low pressure regime without magnetic bias fields, characteristic plasma parameters are: density, 2 to 4×10^{16} cm $^{-3}$; electron temperature, 300 eV; mean ion energies, 3 to 9 keV; plasma length, 80 cm; plasma volume, 60 cm 3 ; and plasma impurities <0.1%. Plasma end losses were found to be the predominant loss mechanism. We report here the extension of these measurements to the higher magnetic field and longer half-period provided by a 3-MJ, 20-kV "secondary" capacitor bank of Scylla IV. In this case the plasma containment is no longer limited by the duration of the applied field. The end loss proceeds as indicated by the loss rates measured in the earlier experiments, and all plasma disappears by \sim 17 μ sec. During this time no flute instability or appreciable drift of the plasma core are observed. Some effects, attributed to cold plasma diffusing in from the ends, are seen during the longer compression times. Closed, theta pinches without end loss are discussed as a means of reaching the long containment times in which the eventual stability limitation can be tested.

STABILITE, CHAUFFAGE DU PLASMA ET PERTES AUX EXTRÉMITES DANS UN DISPOSITIF DE STRACTION AZIMUTALE DE 3,5 MEGAJOULES (SCYLLA IV). Les auteurs ont déjà publié les résultats d'expériences sur des plasmas de deutérium stables, sans dérive, de haute température et de forte densité, produits à des pressions initiales de remplissage de 10 à 50 mTorr, sans champs magnétiques de polarisation (régime de basse pression) et à des pressions initiales de remplissage de 50 à 125 mTorr, avec des champs magnétiques de polarisation négatifs (régime de haute pression). Ces travaux concernant le plasma produit par une batterie de condensateurs « primaire » du dispositif Scylla IV (570 kJ à 50 kV avec une demi-période de 7,4 μ s) comportaient notamment: des mesures au moyen d'un interféromètre Mach-Zehnder de la densité des électrons, de la forme, de la stabilité du plasma et des pertes aux extrémités; des mesures par absorption de rayons X de la température des électrons et de la quantité d'impuretés; des mesures des rendements en neutrons et des mesures par collimation de la longueur du plasma; des projections de profil indiquant les limites précises du plasma; des photographies ultra-rapides, indiquant une stabilité globale du plasma. Dans le régime à basse pression, sans champs magnétiques de polarisation, les paramètres caractéristiques du plasma sont les suivants: densité, 2 à 4×10^{16} cm $^{-3}$; température des électrons, 300 eV; énergies moyennes des ions, 3 à 9 keV; longueur du plasma, 80 cm; volume du plasma, 60 cm 3 et pourcentage d'impuretés <0,1%. On a constaté que les pertes aux extrémités de plasma constituaient la majeure partie des pertes. Dans le présent mémoire, les auteurs décrivent l'application des mêmes mesures au champ magnétique plus élevé (180 kG) et à la demi-période plus longue (55 μ s) produit par une batterie « secondaire » de condensateurs de 3 MJ à 20 kV faisant partie du dispositif Scylla IV. La bobine de compression a un mètre de longueur et 10 cm de diamètre intérieur. Dans ce cas, le confinement du plasma n'est plus limité par la durée du champ appliqué. Les pertes terminales se produisent comme il est indiqué par les vitesses de perte mesurées dans les expériences antérieures et tout le plasma disparaît en 17 μ s environ. Pendant cette période, les auteurs n'ont observé ni instabilités en cannelures, ni dérive notable du noyau de plasma. Ils ont constaté certains effets, qu'ils attribuent à une diffusion de plasma froid des extrémités vers l'intérieur, pendant les périodes de compression plus longues. Ils discutent la possibilité

d'utiliser un dispositif à striction azimutale fermé sans pertes terminales pour obtenir des périodes de confinement plus longues pendant lesquelles on pourrait étudier quelles sont finalement les limitations de la stabilité.

УСТОЙЧИВОСТЬ, НАГРЕВ И ПОТЕРЯ НА КОНЦАХ ТЕТА-ПИНЧА 3,5 МЕГАДЖОУЛЯ (СЦИЛЛА IV). Ранее уже были опубликованы результаты экспериментов с плотной, высокотемпературной, свободно дрейфующей плазмой, создаваемой при давлениях дейтерия от 10 до 50 мтор и отсутствии предварительно включенного магнитного поля (режим низкого давления), и создаваемой при давлениях от 50 до 125 мтор с предварительно включенным обратным магнитным полем (режим высокого давления). Измерения характеристики плазмы, образующейся при разряде "первичной" конденсаторной батареи Сциллы-IV включали: измерения плотности электронов формы плазмы, ее устойчивости интерферометром Маха-Зейдера, потерю плазмы через торцы, температуры электронов и количества примесей по поглощению рентгеновских лучей, количество образующихся нейтронов, измерения длины плазмы коллимированными датчиками, формы плазмы рентгеновской камерой Обскура, а также скоростная фотографическая регистрация, показавшая общую устойчивость плазмы. В режиме низкого давления без предварительно включенного магнитного поля, плазма характеризовалась следующими параметрами: плотность — $(2-4) \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$, температура электронов — 300 eV, средняя энергия полов 3 — 8 кэВ, длина плазмы 80 см, объем плазмы — 60 см^3 , количество примесей $<0,1\%$. Было показано, что главную часть потерь составляют потоки плазмы через торцы.

В настоящей работе публикуются результаты, полученные в экспериментах с расширенной областью параметров: магнитное поле — 180 кг/аусс., длительность полупериода тока — 55 мсек. Увеличение длительности полупериода получено благодаря использованию "вторичной" батареи конденсаторов Сциллы-IV с напряжением 20 кВ и запасной энергией 3 мгдж. Сжимающая катушка имела длину 1 метр и диаметр 10 см. В этом случае удержание плазмы ограничено длительностью приложенного импульса. Потеря на концах тета-пинча протекает как указано при интенсивности потери, измеренной в ранее проведенных экспериментах, и вся плазма исчезает примерно через 17 микросекунд. За это время не наблюдается ни "желобковых" неустойчивостей, ни заметного смещения ядра плазмы. При более длительном времени сжатия наблюдаются некоторые эффекты из-за диффузии холодной плазмы из концов. В заключение рассматриваются тета-пинчи без потери на концах как средство для длительного времени удержания, в которых можно испытывать эвентуальный предел устойчивости.

ESTABILIDAD, CALENTAMIENTO DEL PLASMA Y PERDIDAS TERMINALES EN UN DISPOSITIVO DE CONSTRICCIÓN AZIMUTAL DE 3,5 MJ (SCYLLA IV). Los autores han publicado anteriormente los resultados de experimentos realizados con plasmas estables y sin deriva de alta densidad y temperatura, producidos con presiones iniciales de llenado del deuterio entre 10 y 50 mTorr, sin campos magnéticos de polarización (régimen de baja densidad) y con presiones iniciales de llenado de 50 a 125 mTorr y campos magnéticos de polarización negativa (régimen de alta densidad). Estas mediciones realizadas en el plasma generado por una batería «primaria» de condensadores del dispositivo de restricción azimutal Scylla IV (570 kJ a 50 kV con un semiperíodo de 7,4 μs) incluyeron: determinaciones con el interferómetro de Mach-Zehnder de la densidad electrónica, forma, estabilidad y pérdidas terminales; mediciones de la temperatura electrónica y contenido de impurezas por absorción de rayos X; determinación de los rendimientos neutrónicos y de la longitud del plasma por colimación; proyecciones de perfil para poner de manifiesto los límites precisos del plasma; y obtención de imágenes con una cámara de rendija que indican en forma aproximada la estabilidad del plasma. En el régimen de baja presión sin campos magnéticos de polarización, los parámetros característicos del plasma son: densidad, $2 \text{ a } 4 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$; temperatura electrónica, 300 eV; energía iónica media, 3 a 9 keV; longitud del plasma, 80 cm; volumen del plasma, 60 cm^3 ; proporción de impurezas $<0,1\%$. Las pérdidas en los extremos del plasma constituyeron el mecanismo predominante de pérdida. Los autores describen en la memoria la aplicación de estas mediciones al campo magnético más intenso y al semiperíodo más prolongado, obtenidos mediante una batería «secundaria» de condensadores perteneciente a la instalación Scylla IV, de 3 MJ a 20 kV. En este caso, el confinamiento del plasma no está limitado por la duración del campo aplicado. Las pérdidas terminales se desarrollan conforme a lo indicado por las velocidades de pérdida medidas en los anteriores experimentos y el plasma desaparece totalmente a los 17 μs, aproximadamente. Durante este tiempo no se observa inestabilidad en estrías ni deriva apreciable del núcleo del plasma. Durante los períodos largos de compresión, se advierten ciertos efectos, atribuidos a la difusión de plasma frío de los extremos. Se estudian restricciones azimutales cerradas, sin pérdidas en los extremos, con el fin de alcanzar períodos de confinamiento prolongados que permitan estudiar la posible limitación de la estabilidad.

1. Introduction

The heating and confinement of plasma by rapidly-rising, longitudinal magnetic fields in theta pinches have been studied in many laboratories, and it has been established that dense, high-energy plasmas are produced in these devices. A review of the experiments through 1960 has been given by Quinn [1]. Two plasma regimes may be distinguished: the high-density regime of the early experiments, corresponding to deuterium filling pressures between ~ 70 and 250 mtorr, in which high-ion energy and neutron emission occur only when magnetic field, directed oppositely to the compression field, is initially trapped in the plasma [1-6]; and a low-density regime, corresponding to filling pressures between ~ 5 and 50 mtorr, in which high ion energy and readily observable neutron production occur without trapped field [7-10]. The Scylla theta-pinch experiments pursued at Los Alamos are characterized by comparatively large (~ 1.1 kV/cm) induced, vacuum, azimuthal electrical fields at the inner surface of the discharge tube and typically produce plasma densities n of a few times 10^{16} cm $^{-3}$, electron temperatures T_e between 200 and 1300 eV, ion temperatures T_i (strictly, two-thirds of the mean, random ion energy) between 1000 and 9000 eV, and plasma diameters between approximately 1 and 3 cm.

A rotating flute instability in the high-pressure regime with two-fold azimuthal symmetry has been extensively investigated [2,4,11,12]. In the Los Alamos Scylla III experiment using coil lengths between 10 and 26 cm, the growth rate and amplitude of the instability were observed to decrease with increasing coil length (and decreasing average curvature of the magnetic lines). The possibility of obtaining greater plasma stability in its longer compression coil was a main reason for constructing the large Scylla IV theta pinch. Its basic properties have been reported by Jahoda *et al.* [6] and Little *et al.* [10]. We report here on an extension of its operation to longer periods and higher magnitudes of its magnetic field.

2. The Scylla IV Experiment

2.1 Apparatus

The Scylla IV apparatus consists basically of a 1-m compression coil of 10-cm inside diameter, driven by two capacitor banks. The primary bank is comprised of 50-kV capacitors with a total energy storage of 570 kJ and with sufficiently small inductance so that 82% of the energy is transferred to the compression coil. The secondary bank has a maximum of 3 MJ at 20 kV and consists of a portion of a large bank (the "Zeus" bank) constructed earlier for general-purpose energy storage [13]. The overall system has been described by Jahoda *et al.* [6] and by Putnam and Kemp [14]. In addition to these banks there is a 10-kJ, 40-kV preionization bank and a 280-kJ, 10-kV bank for furnishing bias magnetic field. All four capacitor banks are indicated in the circuit diagram of Fig. 1. The sequence of operation is to fire the bias bank (if used), followed by the preionization bank whose 330 kc/sec oscillating magnetic field is allowed to decay. The "afterglow" of this discharge is nearly fully ionized and provides the initial plasma to which the field of the primary bank is applied. When used, the secondary bank is fired before the maximum of the first half cycle of the primary magnetic field. The half period of the primary bank alone is 7.4 μ sec, and that of the secondary bank is 52 μ sec.

2.2 Plasma Properties with the Primary Bank Alone

The basic features of the discharge in the high-density regime [6] are the following: The rotating flute instability is not observed to occur, and the plasma drift observed and discussed by Reynolds *et al.* [15] and by Hintz *et al.* [16] is absent, at least during the magnetic half period. The absence of drift is ascribed to the fact that a tapered and straight section separates the compression coil from the wider (4.6 m) parallel-plate transmission line which carries the current (10 MA) from the coaxial cables leading to the capacitors. The effect of the tapered and straight section is to reduce the bending of the field lines, convex to the feed slot of the coil. Neutron emission with yields per discharge as great as 2×10^8 was observed to correlate with bias field, as was the electron temperature. The plasma cylinder of length ~ 70 cm was observed optically to have a sharp boundary separating it from the magnetic

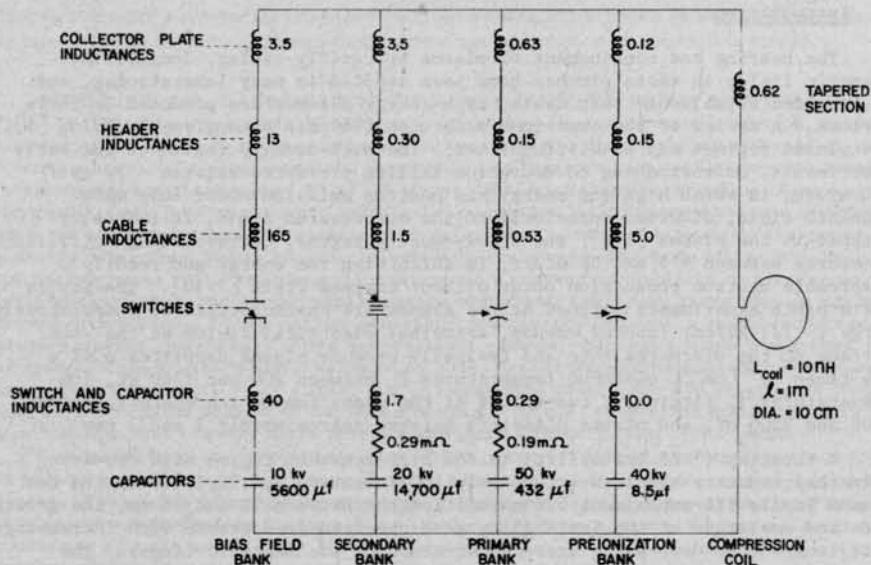


FIG. 1. Schematic circuit diagram of the Scylla IV theta pinch. The inductances are given in nanohenries (10^{-9} H).

field, as would be expected for a $\beta = 1$ plasma, having no internal magnetic field at peak compression. On the assumption of $\beta = 1$, the measurements of density, magnetic field, and electron temperature yield an ion temperature of 2.6 keV.

In the low-density regime the plasma has quite different properties [10]. The neutron yield with zero bias field is approximately 6×10^6 , almost independent of filling pressure. On the assumption that $\beta = 1$, the measurements yield ion temperatures increasing from 4 to 9 keV, as the deuterium filling pressure is decreased from 50 to 10 mtorr. The electron temperature remains approximately constant at 300 eV. This confirms the high ion temperatures (10 keV) and relatively low electron temperature (300 eV) found in the low-density theta pinch of Goldman *et al.* [8,9].

A comparison of the plasmas in the high- and low-density regimes is given by the interferograms of Fig. 2, taken from data of Jahoda *et al.* [6] and Little *et al.* [10]. These interferograms were made on separate discharges with a 2-m Mach-Zehnder interferometer spanning the discharge tube along its axis. In the high-density case (left-hand side) the cross section of the plasma is typically larger, and the fringes show distortions near the wall, corresponding to the influx of wall impurities. The low-density plasma shows no such wall impurity, since the fringes remain straight to the wall boundary. The relative absence of impurity in the low-pressure regime is borne out by measurements of the absolute intensity of the plasma soft x-rays [10] which show < 0.1% impurity, whereas the impurity level is typically a few percent in high-density Scylla experiments [1].

An important feature of the low-density discharge in Scylla IV is the rapid loss of plasma out the ends of the discharge. Interferometric measurements show the plasma diameter to decrease with time (as can be seen in Fig. 2) with an accompanying decrease of the total number of ions. The end-loss rate is greater after peak magnetic field than before. At 10-mtorr filling pressure the *e*-folding time of the decay of the number of ions is 5.9 μ sec before peak field and 2.4 μ sec afterwards. Analysis of the experimental data on the basis of a simple model of plasma leakage through end orifices yields an orifice radius equal to the Larmor radius of the plasma ions [10].

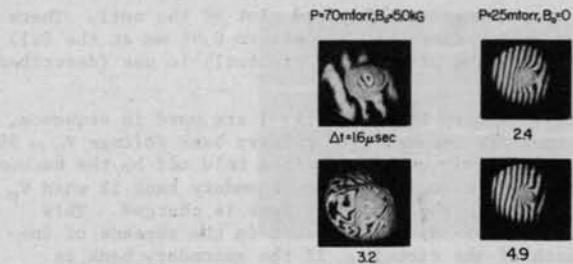


FIG. 2. Interferograms of the Scylla IV plasma in a 1-m, mirrorless coil excited by the primary bank alone. The data on the left represent the high-density regime, and those on the right the low-density regime. B_0 is the bias magnetic field, applied before the theta pinch is formed and Δt is the time lapse after application of the primary bank.

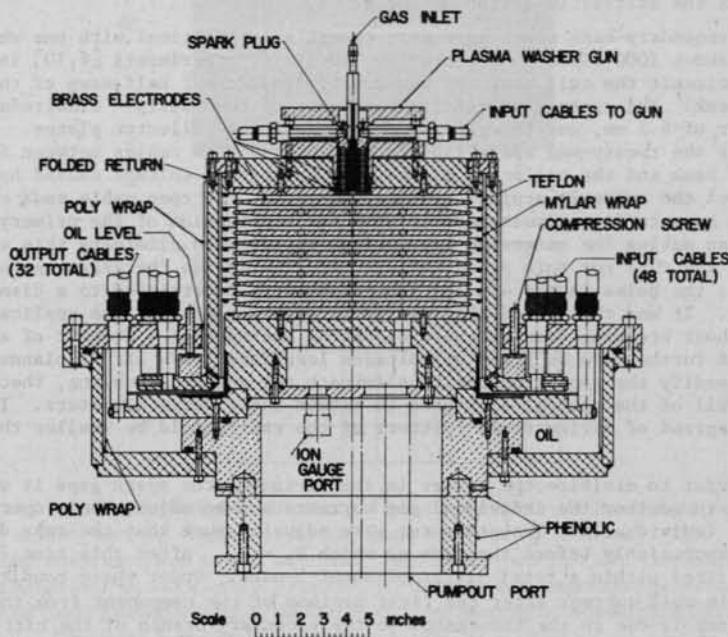


FIG. 3. Diagram of one of the twenty-one vacuum spark gaps, used to switch the secondary bank of Scylla IV

3. Operation of the Secondary Capacitor Bank

The secondary bank consists of twenty-one, 700- μ F modules of capacitors, each capable of furnishing approximately 1 MA of current to the one-meter compression coil when charged to its maximum energy of 1/7 MJ. The problem of switching these large currents has been discussed by Kemp and Quinn [17]. It was decided to use twenty-one of the multiple-electrode vacuum spark gaps shown in Fig. 3, each triggered by a stream of plasma fired through the triggering apertures in the plates from the washer-type plasma guns. In a test of the secondary bank alone, switched at 15 kV, the half period of the current was observed to be 52 μ sec, and the measured magnetic field in the compression coil was 121 kG. From the logarithmic decrement of the current wave, a bank resistance $R_s \approx 2.9 \times 10^{-4} \Omega$ was derived. The bolted, 4.6-m \times 4.6-m parallel-plate transmission line (collector plate system) was found to suffer less than 0.02 mm

of deflection over its whole area, except at the feed slot of the coil. There the deflection varies linearly with voltage and amounts to 0.96 mm at the full bank voltage of 20 kV, for the clamping arrangement presently in use (described by Jahoda *et al* [6]).

When both the primary and secondary banks of Fig. 1 are used in sequence, the switching problem is particularly severe. The primary bank voltage $V_p \approx 50$ kV is applied first, and nearly all of this voltage must be held off by the vacuum spark gaps. The optimum time at which to switch the secondary bank is when V_p has decreased to the value V_s to which the secondary bank is charged. This would provide an uninterrupted rise of the coil current in the absence of inductance in the secondary branch of the circuit. If the secondary bank is switched too early, it absorbs energy from the primary bank, causing the current in the compression coil to fall short of the nominal primary bank maximum. When the secondary bank is switched too late, it must supply current both to the compression coil and the primary bank, allowing a decrease in the compression coil current. If the secondary bank should fire when the primary bank is first switched, it removes a large fraction of V_p from the compression coil and spoils the initial implosion of the pinch.

The secondary-bank spark gaps were essentially identical with one which was used about 1000 times in the previous Scylla IV experiments [6,10] in order to short circuit the coil near the maximum of the current half wave of the primary bank. The central triggering apertures of the multiple electrodes had a diameter of 6.3 mm, and the gap was embedded in the collector plates. However, when the twenty-one spark gaps were connected with cables between the secondary bank and the collector plates, the additional voltage caused by doubling of the suddenly applied voltage wave V_p at the open cable ends caused the spark gaps to fire simultaneously with the application of the primary bank. Rather than making the extensive corrections required to eliminate this voltage doubling, the cure for this prefiring was provided inside the gaps. As shown in Fig. 3, the holes in the 4th and 8th plates were constricted to a diameter of 1.7 mm. It was then found that the spark gaps would stand the application of V_p without breaking down at their operating pressure of ~ 2 mtorr of argon. They could furthermore be fired at voltages less than 1 kV. It is planned later to modify the gap structure to eliminate the voltage doubling, thereby allowing all of the central apertures to retain their large diameters. In that case the spread of firing times (jitter) of the gaps should be smaller than at present.

In order to minimize the jitter in the firing of the spark gaps it was necessary to monitor the individual gap currents and to adjust their operating pressures individually. The pressures were adjusted such that the gaps did not fire appreciably before the time at which $V_s = V_p$. After this time 75% of the gaps fired within a total jitter of about 5 μ sec. Under these conditions the decrease in coil current after the first maximum of the component from the primary bank is due to the inductance in the secondary branch of the circuit. This can be seen by comparing the observed waveform of Fig. 4(b) with the computed waveform of Fig. 4(c), in which all of the secondary spark gaps are approximated by a single switch with series inductance and resistance.

4. Plasma Experiments with both the Primary and Secondary Banks

4.1 Apparatus

The basic measurements were those of relative neutron emission rate and of plasma density and cross-sectional shape as functions of time. The density and shape measurements were made with a 2-m Mach-Zehnder interferometer, illuminated by a cooled, continuously-emitting ruby laser, as described by Little, *et al* [10]. Time-resolved interferograms were made with a 2.6×10^6 frame/sec, f/4.0, rotating-mirror framing camera [18], as well as a 3-frame, high-speed image converter. The framing camera allowed measurements to be made for 25 μ sec (56 frames) after initiation of the pinch. The measurements reported here were made in a mirrorless, 1-m coil at a deuterium filling pressure of approximately 15 mtorr.

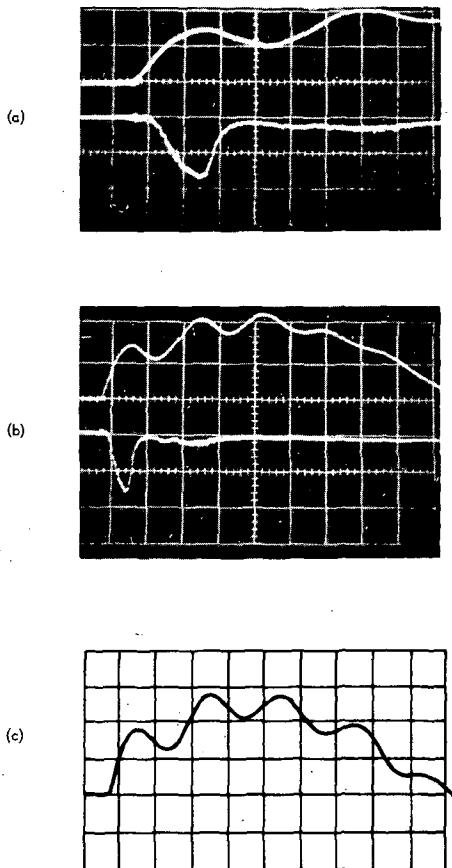


FIG. 4. Waveforms of the compression coil current and the neutron emission rate when both the primary and secondary banks are used. (a) Coil current waveform (upper trace) with $V_p = 48$ kV and $V_s = 15$ kV, and the neutron signal (lower trace) from a plastic scintillator. Total neutron yield: 2.6×10^8 . Time scale: 2 μ sec/div. (b) Same signals as (a) on a time scale of 5 μ sec/div. (c) Computed compression coil current waveform using the indicated circuit parameters of Fig. 1, the voltages of (a) and switching the secondary bank into the coil when $V_s = V_p$. Time scale: 5 μ sec/div. Vertical scale: 5.1 MA/div.

4.2 Results

The fringe pattern of each interferogram yields $\int n dl$ as a function of fringe diameter d_i . Therefore the total number N of plasma electrons (ions), assuming a uniform plasma density, is closely approximated by $1.26 \times 10^{17} \sum_i d_i^2$, where the numerical coefficient is $\pi/4$ times the value of $\int n dl$ corresponding to one-half fringe [6]. Typical interferograms are given in Fig. 5 and corresponding graphs of the reduced data showing the fringe shifts vs distance across the discharge tube diameter are given in Fig. 6. These are typical of many discharges in which fairly good simultaneity of firing the vacuum spark gaps was obtained. Graphs of the total number N of plasma electrons vs time are given in Fig. 7. The time variation of N for the central core of plasma is typified by a steady decrease with a characteristic (e-folding) time of ~ 2 μ sec. A thin core of plasma is retained for longer times and disappears completely (within experimental error) approximately 17 μ sec after initiation of the pinch. At later times there is a distortion of the fringes outside the central region,



FIG. 5. Interferograms of the Scylla IV discharge corresponding to the current waveform of Fig. 4 with an initial deuterium pressure of 15 mTorr. A few of the 56 photographs taken by the framing camera are shown for illustration and identified by the time Δt after application of the primary bank. Exposure time per frame: 0.42 μ sec.

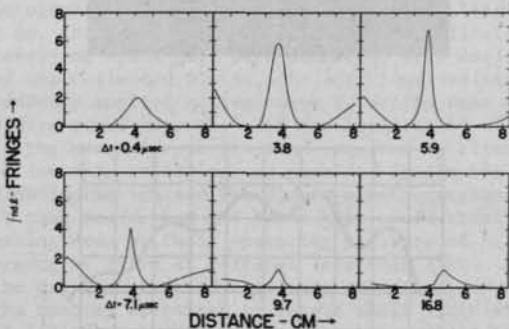


FIG. 6. Graphs of the reduced data of Fig. 5, showing the fringe shifts produced by the plasma vs the discharge tube diameter and identified by the time Δt after application of the primary bank

corresponding to motion of new plasma outside the original core. The plasma core does not show the interchange instability seen in earlier Scylla experiments with short compression coils [2, 12]; nor does it drift appreciably during its 17 μ sec of existence.

The neutron emission shows an initial rise, as in the experiments with the primary bank alone [10], and decays to a low level before the end of the first relative maximum of the current, as shown in Fig. 4(a) and (b). This correlates with the rapid decrease of N. Both phenomena are attributed to end loss.

5. Discussion and Conclusions

5.1 Plasma End Loss

The rapid loss of plasma observed in these experiments bears out the earlier measurements of rate of end loss made in experiments with the primary bank alone [10]. The plasma essentially disappears by the middle of the second half cycle of the primary component of the coil current. At these longer compression times the interferograms also show the possible effects of cold plasma entering the coil from its ends. This is the interpretation given to the distorted outer fringes at later times in Fig. 5, since the compression time approaches the time for plasma at the preionizer temperature to diffuse into the active coil region. The plasma has more wall contaminant than in

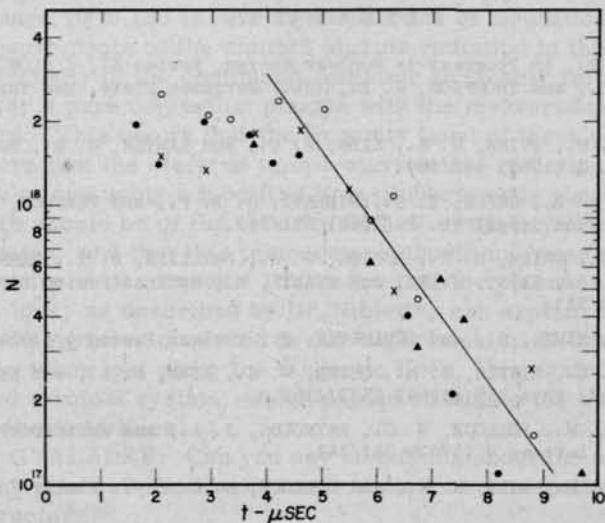


FIG. 7. Total number of plasma electrons vs time for four typical discharges of the primary and secondary banks of Scylla IV. The different symbols correspond to interferometric data obtained on separate discharges. The solid triangular symbols correspond to the current waveform of Fig. 4(a) and (b), the interferograms of Fig. 5 and the reduced data of Fig. 6.

the experiments with the primary bank alone, as can be seen by the distortion of fringes near the wall at early times (in contrast to Fig. 2). This is probably because discharges with the large system are much less frequent than those with the primary bank alone, where discharge cleaning is more effective.

5.2 Possible Closed Systems

There is now considerable evidence that the basic limitation on plasma containment in straight compression coils of the Scylla IV theta pinch is end loss, rather than drift or flute instability, at least for the low density regime. These plasmas do not have the excessive, wall-derived impurity found when the high-voltage Scylla experiments are operated in the high-density regime, and their ion energies are considerably higher. It can be inferred from the scaling of ion energy with plasma parameters [19] that the ion energy in the low-density regime would be increased by decreasing the gas filling pressure or increasing the pinch voltage. It appears, therefore, that low-density theta pinches can provide an important means of performing high-temperature plasma experiments.

The need for a closed system is strongly indicated if these theta-pinch experiments are to proceed to longer containment times against end loss in which the eventual instability limitation can be tested. (A toroidal system would also eliminate the colder plasma outside the ends of the present linear systems). Consequently, investigations are presently underway [20] to determine the feasibility of constructing a toroidal theta pinch. In the systems under consideration gross equilibrium and interchange stabilization would be provided by spatially-alternating, multipole magnetic fields, superimposed on the basic toroidal compression field, using principles similar to those proposed by Furth and Rosenbluth [21].

6. Acknowledgments

We are indebted to A. T. Brousseau, A. S. Rawcliffe, K. S. Thomas, and D. L. Waldorf for assistance with this experiment. The support of J. L. Tuck is also gratefully acknowledged.

Work performed under the auspices of the U.S. Atomic Energy Commission.

REF E R E N C E S

- [1] QUINN, W. E., in Progress in Nuclear Energy, Series XI, 2 (LONGMIRE, C. L., TUCK, J. L., and THOMPSON, W. B., eds.) Pergamon Press, New York (1963) 150-188.
- [2] LITTLE, E. M., QUINN, W. E., RIBE, F. L., and SAWYER, G. A., Nuclear Fusion Suppl. Pt. 2 (1962) 497/509.
- [3] BODIN, H. A. B., GREEN, T. S., NIBLETT, G. B. F., and PEACOCK, N. J., Nuclear Fusion Suppl. Pt. 2 (1962) 521/532.
- [4] KOLB, A. C., GRIEM, H. R., LUPTON, W. H., PHILLIPS, D. T., RAMSDEN, S. A., MCLEAN, E. A., FAUST, W. R., and SWARTZ, M., Nuclear Fusion Suppl. Pt. 2 (1962) 543/551.
- [5] BOGEN, P., HINTZ, E., and SCHLUETER, J., Nuclear Fusion 4 (1964) 131/135.
- [6] JAHODA, F. C., LITTLE, E. M., QUINN, W. E., RIBE, F. L., and SAWYER, G. A., J. Appl. Phys. 35 (1964) 2351/2363.
- [7] GOLDMAN, L. M., POLLOCK, H. C., REYNOLDS, J. A., and WESTENDORP, W. F., Phys. Rev. Letters 9 (1962) 361/363.
- [8] GOLDMAN, L. M., KILB, R. W., and POLLOCK, H. C., Phys. Fluids 7 (1964) 1005/1010.
- [9] GOLDMAN, L. M., KILB, R. W., POLLOCK, H. C., and REYNOLDS, J. A., Phys. Fluids 8 (1965) 522/528.
- [10] LITTLE, E. M., QUINN, W. E., and SAWYER, G. A., Phys. Fluids 8 (1965) 1168/1175.
- [11] BODIN, H. A. B. and NEWTON, A. A., Phys. Fluids 6, (1963) 1338/1345.
- [12] LITTLE, E. M. and QUINN, W. E., Phys. Fluids 6 (1963) 875/883.
- [13] KEMP, E. L. and PUTNAM, T. M., Los Alamos Document LADC-3952 (1959).
- [14] PUTNAM, T. M. and KEMP, E. L., IRE Transactions on Nuclear Science, NS-9 (1962) 74/82.
- [15] REYNOLDS, J. E., ALDRIDGE, E. E., KEILHACKER, M., and NIBLETT, G. B. F., Phys. Fluids 8 (1965) 529/538.
- [16] HINTZ, E., KOLB, A. C., and THONEMANN, P. C., Phys. Fluids 8 (1965) 1005/1006.
- [17] KEMP, E. L. and QUINN, W. E., Proc. Third Symposium on Engineering Problems in Thermonuclear Research (Berkl, E., ed.) Institute fuer Plasmaphysik, Garching (1964) 70-85. Also Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-3189-MS (1965).
- [18] BRIXNER, B., Proc. Sixth International Congress on High-Speed Photography (De Graaf, J. G. A. and Tegelaar, P., eds) H. D. Tjeenk Willink and Zoon, N. V.-Haarlem (1963) 93-100.
- [19] OLIPHANT, T. A. and RIBE, F. L., Bull. Am. Phys. Soc., II 10 (1965) 224.
- [20] QUINN, W. E., RIBE, F. L., RIESENFIELD, W. B., SAWYER, G. A., and TUCK, J. L., Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-3289-MS (April 1965) (unpublished).
- [21] FURTH, H. P. and ROSENBLUTH, M. M., Phys. Fluids 7 (1964) 764/766.

DISCUSSION

J.B. ADAMS: The impurities in Scylla IV are very low. What holds down the electron temperature?

W.E. QUINN: We observe an essentially constant plasma electron temperature of 300 eV independent of the initial deuterium filling pressure

over the range 10 to 125 mTorr in the absence of magnetic bias fields. Absolute measurements of the emitted plasma radiation in the soft X-ray region show the intensity of the continuum radiation to be only twice that of bremsstrahlung for a pure deuterium plasma with the measured density and electron temperature. This shows that the impurity level of these plasmas is $\lesssim 0.1\%$, and therefore that the electron temperature is not radiation-limited. Computer calculations using a modified Hain-Roberts code show that the electron temperature should be of the order of 600 eV in the Scylla IV low-pressure regime plasma, and that this temperature should increase as the initial filling pressure is decreased. It appears that the plasma electron thermal conduction loss, as described by Dr. Niblett*, can explain the limiting plasma electron temperatures observed in our experiments. If this is the case, with the electrons lost along the magnetic lines, this again points to the need for a closed toroidal system, which should eliminate the thermal conduction loss along the field lines.

Yu.S. GVALADZE: Can you say something about the axial density distribution of the plasma? Is it uniform or does it have a spatially periodic (filamental) structure?

W.E. QUINN: We have not as yet performed side-on, radial measurements of the plasma, which are required to determine in detail its axial density distribution. However, axial shadowgraphs show a sharp plasma boundary, and Zeeman effect measurements and double magnetic probe techniques show that there is little magnetic field in the plasma. Consequently, the Mach-Zehnder interferograms give density profiles which are interpreted as representing prolate ellipsoidal (cigar-shaped) plasmas of uniform internal density with β approximately equal to unity; that is to say, the interferograms more nearly map changes in plasma length as a function of radius at constant density than gradual density changes through a cylinder of uniform length. Streak photographs as well as time sequences of interferograms taken on a single discharge show the absence of any spatially periodic or filamental structure of the plasma.

* These proceedings (CN-21/34).



ISAR I - A FAST MEGAJOULE THETA-PINCH EXPERIMENT WITH EXTREMELY HIGH COMPRESSION FIELDS

C. ANDELFINGER, G. DECKER, E. FÜNFER, A. HEISS, M. KEILHACKER,
J. SOMMER AND M. ULRICH
INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK,
MÜNCHEN-GARCHING, FEDERAL REPUBLIC OF GERMANY

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

ISAR I - A FAST MEGAJOULE THETA-PINCH EXPERIMENT WITH EXTREMELY HIGH COMPRESSION FIELDS. A megajoule theta-pinch experiment - Isar I - was put into operation at Garching in January 1965. The maximum energy stored in the condenser bank is 2.5 MJ at 40 kV. The bank can produce peak magnetic fields of 180 kG with a half-period of 20 μ s in a single-turn coil with a length of 150 cm and an internal diameter of 10.6 cm. A linear z-pinch is used to produce a preionized plasma; bias fields up to ± 5 kG can be applied. The first experiments were carried out with stored energies of up to 1.5 MJ and initial pressures in the range 5 to 50 mTorr D₂. The observed drift of the plasma column (toward the collector) was reduced by improving the homogeneity of the axial magnetic field thus preventing the plasma from striking the tube wall during the first half-cycle. Electron densities of 1 to 2×10^{16} cm⁻³, electron temperatures of 350 eV and ion temperatures of 3.7 keV, calculated from the neutron yield were measured. The maximum neutron yield per discharge was 1×10^{10} . At the maximum magnetic field the end losses were dN_{tot}/dt = 3 to 6×10^{23} .

ISAR I - DISPOSITIF DE STRCTION AZIMUTALE RAPIDE, DE 1 MEGAJOULE, AVEC DES CHAMPS DE COMPRESSION EXTREMEMENT ELEVES. Un dispositif de striction azimutale de 1 mégajoule - Isar I - a été mis en service à Garching en janvier 1965. L'énergie maximale emmagasinée dans la batterie de condensateurs est de 2,5 MJ, à 40 kV. La batterie peut produire des champs magnétiques maximaux de 180 kG ayant une demi-période de 20 μ s dans une bobine à enroulement simple de 150 cm de longueur et de 10,6 cm de diamètre intérieur. Un plasma préionisé est produit par striction longitudinale linéaire, des champs de polarisation atteignant ± 5 kG peuvent être appliqués. Les premières expériences ont été effectuées avec des réserves d'énergie atteignant 1,5 MJ et à des pressions initiales du deuréum de l'ordre de 5 à 50 mTorr. Pour atténuer la dérive de la colonne de plasma vers le collecteur, on a accru l'homogénéité du champ magnétique axial, ce qui empêche le plasma de frapper la paroi du tube pendant le premier demi-cycle. Les auteurs ont mesuré des densités d'électrons de 1 à 2×10^{16} cm⁻³, des températures des électrons de 350 eV et des températures des ions de 3,7 keV calculées d'après le rendement en neutrons. Le rendement maximal en neutrons par décharge a été de 1×10^{10} . Pour le champ magnétique maximal, les pertes aux extrémités dN_{tot}/dt ont été de 3 à 6×10^{23} .

ЭКСПЕРИМЕНТ НА БЫСТРОЙ МЕГАДЖОУЛЕВОЙ ТЕТА-ПИНЧ УСТАНОВКЕ "ИСАР-1" С ИСКЛЮЧИТЕЛЬНО ВЫСOKИМИ ПОЛЯМИ СЖАТИЯ. Установка "Исар-1" для проведения эксперимента с мегаджоулевым тета-пинч эффектом была введена в эксплуатацию в Гархинге в январе 1965 года. Максимальная энергия, аккумулируемая в конденсаторной батарее, составляет 2,5 мгдж при 40 кв. Батарея может создавать магнитные поля в 180 кГ с полупериодом в 20 мксек. в катушке из одного витка длиной в 150 см и внутренним диаметром в 10,6 см. Для получения предварительно ионизированной плазмы используется линейный z-пинч. Кроме того, могут применяться начальные поля напряженностью до -5 кГс. Первые эксперименты были проведены с накопленной энергией до 1,5 мгджа и первоначальными давлениями дейтерия в диапазоне от 5 до 50 мтор D₂. Наблюдаемый дрейф плазменного столба (в направлении коллектора) уменьшался за счет улучшения однородности аксиального магнитного поля и тем самым предотвращалось зажигание дуги на стенке трубы в течение первого полупериода. Были измерены плотности электронов в 1 - 2×10^{16} см⁻³, температуры электронов в 350 эв и температуры ионов в 3,7 кэв, вычисленные из выхода нейтронов. Максималь-

ный выход нейтронов на разряд был 1×10^{10} . При максимальном магнитном поле концевые потери составили

$$dN_{\text{tot}} / dt = 3 - 6 \times 10^{23}.$$

ISAR I: EXPERIMENTO RAPIDO DEL ORDEN DEL MEGAJULIO EN UNA CONSTRICCIÓN AZIMUTAL CON CAMPOS DE COMPRESIÓN MUY INTENSOS. En enero de 1965 comenzó a funcionar en Garching una instalación experimental - Isar I - basada en una constrictión azimutal. La máxima energía almacenada en la batería de condensadores es 2,5 MJ a 40 kV. Dicha batería puede producir campos magnéticos con picos de 180 kG y semiperíodo 20 μ s en una bobina de una sola espira, de 150 cm de longitud y 10,6 cm de diámetro interno. Se usa una constrictión longitudinal para producir un plasma preionizado y pueden aplicarse campos de polarización de hasta ± 5 kG. Los primeros experimentos se realizaron almacenando energías de hasta 1,5 MJ con presiones iniciales del deuterio comprendidas entre 5 y 50 mTorr D_2 . La deriva de la columna de plasma (hacia el colector) se redujo mejorando la homogeneidad del campo magnético axial, impidiendo así que el impacto del plasma sobre la pared del tubo se produzca durante el primer semiciclo. Se midieron densidades electrónicas de 1 a $2 \cdot 10^{16}$ cm $^{-3}$, temperaturas electrónicas de 350 eV y temperaturas iónicas de 3,7 keV, que se habían calculado a partir del rendimiento neutrónico. El rendimiento neutrónico máximo por descarga fue de $1 \cdot 10^{10}$. A la intensidad máxima del campo magnético, las pérdidas en los extremos fueron $dN_{\text{tot}}/dt = 3$ a $6 \cdot 10^{23}$.

1. Introduction

The megajoule theta pinch experiment - Isar I - at Garching was put into operation in January 1965. Since then 1500 shots were fired. The device comprises 252 single circuits connected in parallel, each with a 4-electrode spark gap, having a maximum stored energy of 2.67 megajoules. The mirrorless theta-pinch coil used has the following data:

Length:	150 cm
Internal diameter:	10.6 cm
Vacuum inductance:	$L_{\text{coil}} = 7.5 \text{ nH}$
Internal diameter of vacuum vessel:	9 cm

With this coil the following bank data are obtained:

W [MJ]	0.34	1.0	1.5	2.67
U [kV]	25	25	30	40
I_{max} [mA]	5.9	13.4	16	21.3
B_{max} [kgauss]	49	110	133	178
C [μ F]	1.110	3.330	3.330	3.330
$L_{\text{Bank+Coll.}}$ [nH]	12.5	4.1	4.1	4.1
$T/2$ [μ sec]	15	19	19	19

A detailed description of the device has already been given by A. Knobloch [1].

Fig. 1 shows the experiment complete with collector and vacuum system. A z-discharge is used for the pre-ionization. Power is supplied by an artificial delay-line network with a characteristic impedance of 1Ω . This provides a current pulse with an amplitude of 18 kA and a pulse width of 10 μ sec. The theta pinch discharge is fired after 20 μ sec. The degree of ionization is then 10 - 20%. Bias fields B_{z0} of up to ± 5 kgauss can be used. Experiments hitherto, however, have been done without such additional fields.

Till now energies of 1 and 1.5 MJ have been used in this experiment. The full energy of 2.67 MJ is not to be applied until

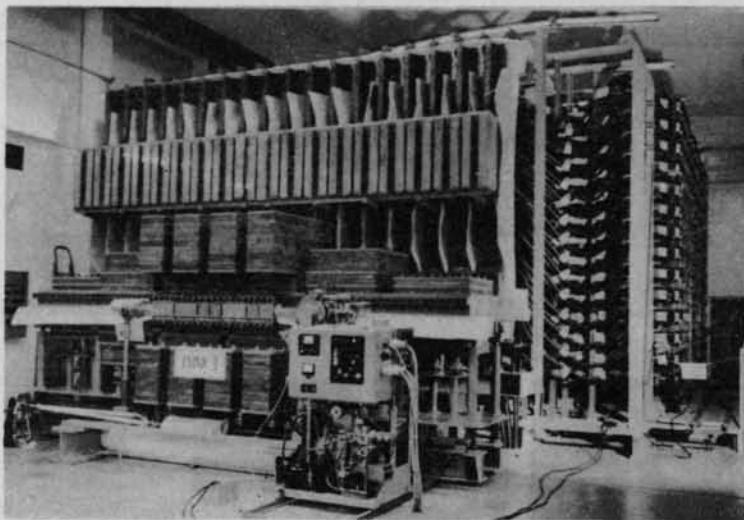


FIG. 1. Photograph of Isar I - MJoule theta pinch experiment

a crowbar system has been incorporated. Reproducible results were obtained when 2 or 3 discharges, so-called cleaning shots, were run with a third of the bank (0.34 MJ) between the discharges with 1 or 1.5 MJ. The experiments were carried out at filling pressures of 5, 10 and 20 μD_2 .

2. Plasma drift

Initial observations were concerned with the drift of the plasma column. There are two main reasons for this drift (see Fig. 2). Firstly, the shape of the collector does not allow current flow perpendicular to the coil axis. This causes curvature of the magnetic field and, consequently, a gradient of the magnetic field (∇B) leading to plasma drift [2].

In order to reduce z-components of the current, many grooves with a distance of 1 cm from each other, 8 cm long, 0.1 cm wide and 1 cm deep are cut in the coil-to-collector connection perpendicular to the coil axis.

Secondly, the large quantities of metal around the collector disturb the symmetry of the return flux. At the coil ends at least, this leads to further curvature of the magnetic fields, in the same direction as the curvature caused by the current distribution.

Image converter photographs showed that in the first experiments with 0.34 MJ the plasma column came into contact with the wall after 4.4 μsec . Strangely enough, the plasma column is not destroyed but can still be observed at later times. Since no improvement could be made by simple means to affect the direction of current flow in the collector, it was attempted for the time being to improve the return flux. Sheets of copper 60 x 80 cm were attached to the coil ends so as to project about 30 cm. Fig. 3 shows a few streak photographs demonstrating the influence of the copper sheets on the drift. The pictures were taken stereoscopically in the coil centre and 45 cm outside the coil centre.

Fig. 3a is without copper sheets, 3b with copper sheets, in both cases with 0.34-MJ discharges, 3c being the same as 3b but with a 1-MJ discharge.

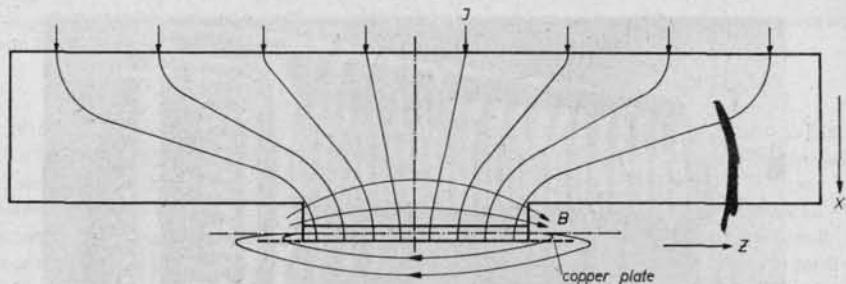


FIG. 2. Schematic diagram showing the current and magnetic field distribution in the collector coil assembly

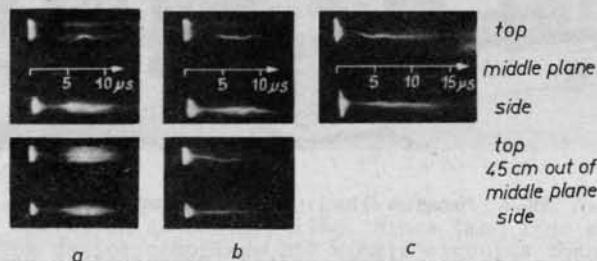


FIG. 3. Stereoscopic streak photographs of theta pinch discharges. a, b: 0.34-MJ discharges without and with flux correcting copper plates at the coil ends. c: 1-MJ discharge with flux correcting plates.

End-on observation of the drift motion was continued with a differential interferometer, and it was found that the plasma does not touch the vessel wall outside the side-on observation slits. The drift motion of the plasma in relation to the vessel axis is plotted in Fig. 4 as a function of the discharge period. The vertical bars indicate the maximum plasma diameter, i.e. the location where in the electron density profile the density gradient becomes smaller than the reading accuracy. The reading accuracy is approximately 1/10 of the fringe width, which in the case of the interferometer system used at a plasma length of 150 cm corresponds to an electron density gradient of $7 \times 10^{14} \text{ cm}^{-4}$.

The measurements show that copper sheets prevent contact with the wall. The maximum drift velocity is $5 \times 10^5 \text{ cm/sec}$. The maximum deflection is about 2.5 cm. The observed drift corresponds to a field gradient $\nabla B = 10 - 15 \text{ gauss/cm}$ for the first 2 - 3 μsec of the discharge. The plasma column then appears to assume a state of equilibrium. This equilibrium is probably due to the magnetic field minima at the coil ends [2].

The drift is to be reduced later by incorporating between collector and coil an adapter which should improve both the distribution of current density and return flux.

3. Determination of the electron density and end losses

The electron density was determined by two methods: firstly, from the absolute intensity of the continuum in the visible region [3], and, secondly, with a differential interferometer [4]. In the latter case the radial gradient of the index of refraction is measured and thus the radial gradient of the electron density as well. The differential interferometer used had a sensitivity of $7 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-4}$. The gradient thus measured was integrated graphically

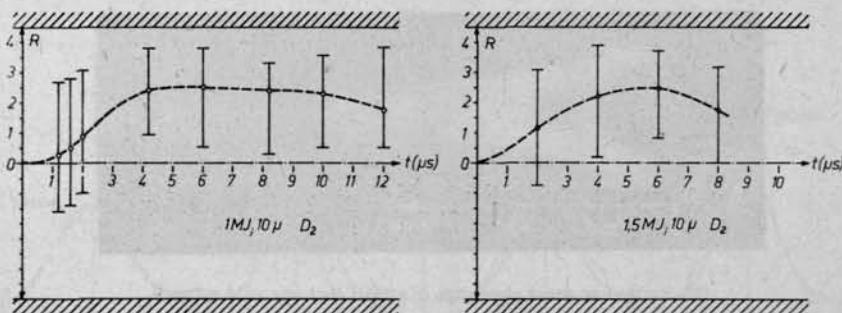


FIG. 4. Drift of the plasma column as determined from interferograms. The dashed line represents the axis, the vertical bars the maximum diameter of the plasma.

to give the electron density profile. Since the light was transmitted through the plasma in axial direction, integration is made over the plasma length. Moment pictures were made of the interference fringes. As light source a Q-switch ruby laser was used with an output of 1 MW and an exposure time of 40 nsec.

In the continuum emission measurements the space and time resolved intensity (at wavelength $\lambda = 4978 \text{ \AA}$, with band width of $\Delta\lambda = 9 \text{ \AA}$) was measured side-on at various positions along the coil axis (0, 15, 45, and 60 cm from the coil medium plane) with a 10-channel fibre bundle assembly. This intensity distribution over the plasma cross section was then converted to the radial density distribution with the aid of the Abel-type integral equation on the assumption of rotational symmetry in relation to the plasma axis. A constant value of 200 eV was assumed for the electron temperature, which appears in the density values only with the 4th root. Both methods achieved usable results only after 2 μsec .

The moment of the first maximum compression can be found from high-speed end-on streak photographs. Fig. 5 shows such a picture for an energy of 1 MJ and initial pressure of 10 μD_2 . The moment of compression obtained is 400 nsec. This agrees within 10% with calculations made according to the three fluid model by Düchs. Preceding the merging plasma cylinder at about double the velocity is a luminous front. It has not yet been clarified whether excitation and ionization of the neutral gas by precursor radiation is involved or whether this is a shock wave phenomenon.

Several successive oscillations were observed only in the case of very luminous, i.e. extremely impure discharges. Usually there is only poor indication of a second compression. The interference figures and continuum measurements were evaluated in steps of 2 μsec . Fig. 6 shows two sequences of fringe patterns taken at 1 MJ and 1.5 MJ. These pictures also illustrate the plasma drift described earlier. At later times (6 - 8 μsec) electron density gradients become visible outside the actual plasma column. Interpretation is difficult since this phenomenon may also occur outside the coil and may be caused by end losses.

Fig. 7 shows the evaluation of these interference fringes. The electron densities refer to an effective plasma length of 120 cm, since continuum measurements show that 15 cm short of the coil ends the line density already drops after 2 μsec to 1/4. It is assumed that at the coil ends the plasma is very quickly expelled by the divergent magnetic field. Also plotted in Fig. 7 are the electron density profiles for two positions on the axis ($z = 0$ and

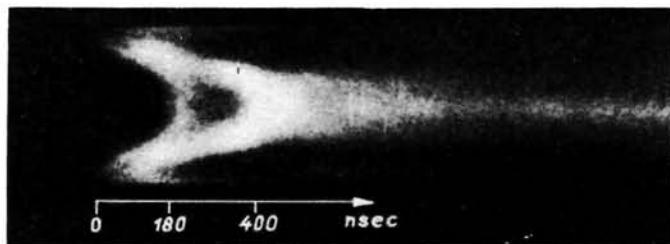


FIG. 5. End-on streak photograph of a 1-MJ discharge at 10 mTorr D₂

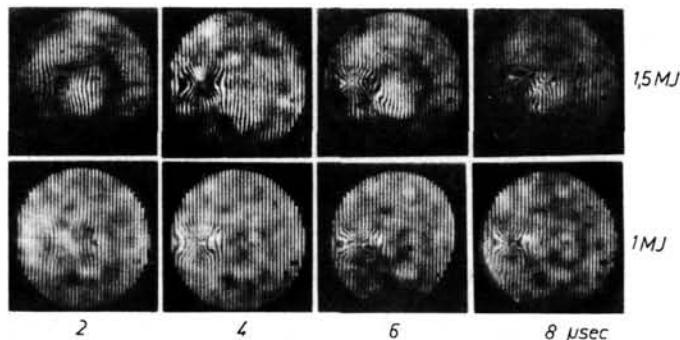


FIG. 6. Fringe pattern of 1 and 1.5-MJ discharges taken end-on with the differential-interferometer at the indicated points of time; initial pressure 10 mTorr D₂

45 cm) which were obtained from the continuum measurements. For the evaluation a degree of impurity of 2% fully ionized oxygen was assumed.

With regard to the example of the 1-MJ discharge the results obtained by the two methods give very good agreement. In the 1.5-MJ discharges, on the other hand, the density values obtained from the continuum measurements clearly exceed at later times those determined interferometrically. This may be an indication that at the times when, as a result of drift, the plasma is nearest the vessel wall further impurities are released from the wall due to radiation emitted by the plasma. Image converter photographs at 1.5 MJ show at this moment an intensified glow in the plasma region. Comparison of the density profiles should make allowance for the fact that interferometrically determined profiles for each moment are obtained from different discharges, as are the continuum measurements at the various positions on the axis. Compared with the electron density profiles in the coil centre, those at 45 cm show at 1.5-MJ discharges a decrease of the maximum density at almost constant line density. If a constant ion temperature is assumed over the plasma length owing to the large free path of the ions, this flattening of the profiles toward the coil ends points to the existence of a more intense trapped magnetic field.

Both types of density profile were integrated over the radius. The interferometric measurement then gives the total particle number N_{tot}, while the continuum measurement gives the line density N. In Fig. 8 both values are plotted against time. For the times from 4 - 8 μ sec the result is $dN_{tot}/dt \approx 6 \times 10^{23}$ electrons/sec. With reference to a plasma length of 120 cm the result is $dN/dt =$

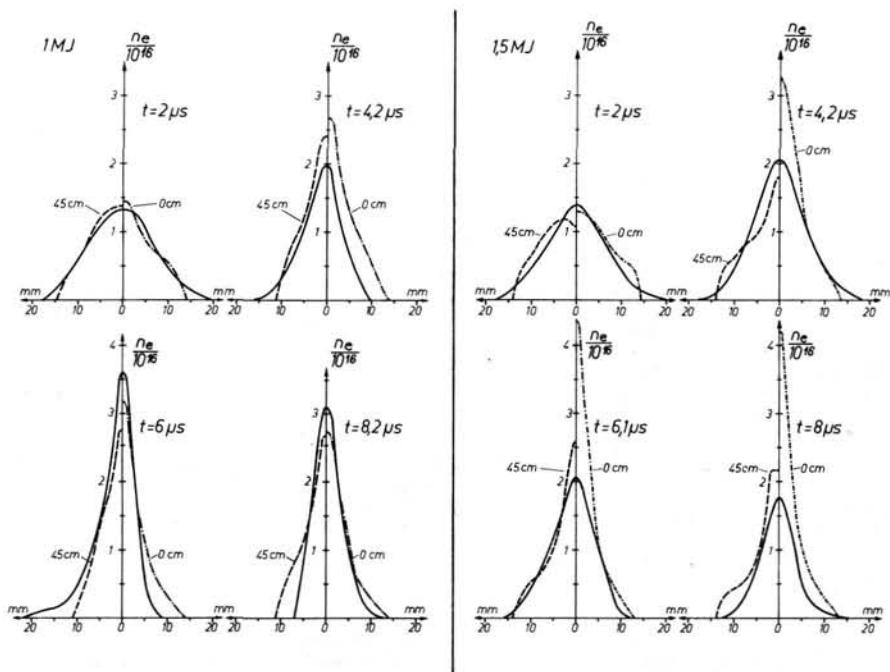


FIG. 7. Time sequence of density profiles of 1 and 1.5-MJ discharges; initial pressure 10 mTorr D₂. Solid lines: interferometric measurements integrated along the discharge axis. Dotted lines: continuum emission measurements taken in the medium plane ($z = 0$ cm.) and at $z = 45$ cm, respectively.

5×10^{21} electrons/cm sec. The same value is obtained from the continuum measurements.

End losses are accounted for by the following simple explanation: The fast compression and the succeeding adiabatic compression supply energy to the two degrees of freedom prependicular to the magnetic field. After the first compression the ion energies are approx. 300 eV. At a density of approx. 10^{16} cm^{-3} collision times of about 1 μsec are obtained. In a comparable length of time energy can be transferred parallel to the axis. On the other hand, further adiabatic heating causes the collision time to rise quickly so that no temperature balance with the third degree of freedom can take place subsequently.

In Fig. 8b and c the measured decrease with time of the line density N or the total particle number N_{tot} is compared with that resulting for the case of a collisionlessly outflowing plasma with initial Maxwell distribution corresponding to 300 eV. The theoretical curve (dashed line) is normalized in Fig. 8b to the initial line density N_0 at the moment 2 μsec . This is to take account of the fact that energy is transferred parallel to the axis only after a few collisions. In Fig. 8c the theoretical curve is matched to the value measured at 4 μsec .

4. Determination of the electron temperature

Both the X-ray absorption method and laser scattering experiments were used to determine the electron temperature.

X-ray absorption measurement was made end-on with a 4-channel detector. The four scintillators provided with different absorbers

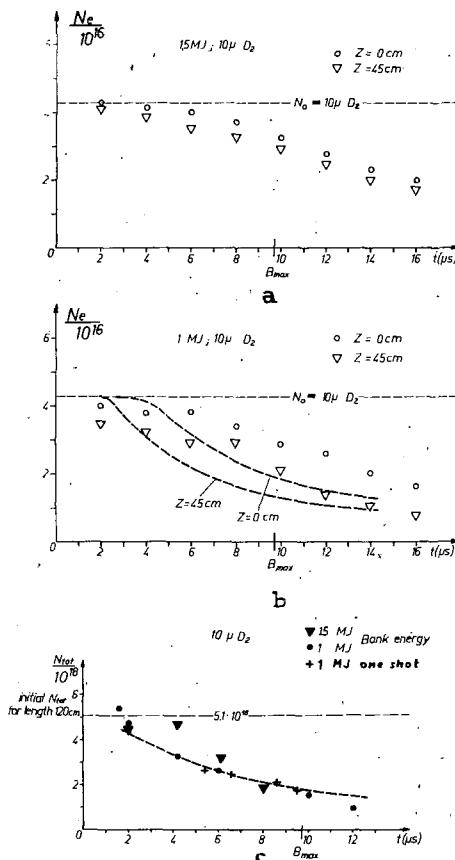


FIG. 8. a and b: line density N as a function of time for 1 and 1.5-MJ discharges taken at the indicated points along the axis; c: total number of electrons N_{tot} as a function of time for 1 and -1.5 MJ discharges. The dotted lines represent the theoretical loss of particles for collisionless plasma flow; initial pressure for all discharges 10 mTorr D_2 .

were arranged in such a way that they could receive radiation from the entire coil volume. Owing to the drift of the plasma column, it was not possible to confine attention to a region close to the axis, i.e. the vessel wall is observed as well.

The absorbers used for most measurements were as follows:

- 2.6 mg/cm² Al
- 2.6 mg/cm² Al + 6.3 mg/cm² Be
- 2.6 mg/cm² Al + 21.6 mg/cm² Be
- 2.6 mg/cm² Al + 46 mg/cm² Be.

The measurements show that at an initial pressure of 10 μD_2 the electron temperature reaches 350 ± 50 ev already after 2 μsec . The radiation intensity then increases further, this being attributed to a rise in density. Further heating of the electrons with increasing magnetic field is not observed. According to calculations with the three-fluid model the electron temperatures should be higher by a factor 2 - 3. It is suspected that further heating of the electrons is prevented by radiation cooling. This seems possible, considering that the degree of contamination is about 2%.

At an initial pressure of $5 \mu\text{D}_2$ a higher electron temperature of 500 eV is measured. In contrast with the experiments at 10μ , however, the radiation intensity drops after 3 μsec to approx. $1/10$ of the maximum intensity (at 2 μsec). This phenomenon can be interpreted as resulting from particle losses several times greater, as is also shown in the electron density measurements.

In $10-\mu$ discharges the same phenomenon occurs in the second and succeeding half-cycle. In these half-cycles appreciably harder X-radiation is encountered at 5μ and also at 10μ . At 5μ in the second half-cycle, for instance, radiation is emitted which would correspond to an electron temperature of 3 keV.

In these later half-cycles antiparallel trapped magnetic fields have also to be expected.

For determining the electron temperature from the light scattering [5] a Q-switch ruby laser with an output of 100 - 200 MW and a pulse duration of 40 nsec was used. The laser beam was directed in through a diaphragm system in the vessel axis which was included in the vacuum system. The scattered light was measured in the centre of the coil at a scattering angle of 90° . For the electron densities and temperatures expected the parameter characteristic for the light scattering is $\alpha \ll 1$, i.e. pure Thomson scattering with a Gaussian profile of the scattering spectrum is to be expected. The scattering spectrum was recorded with a monochromator and an 8-channel glass fibre outlet slit in several discharges at various times. The background originating from the bremsstrahlung radiation was used for relative calibration of the various channels. At the observation site the laser bundle had a diameter of 5 mm. The plasma volume seen by the monochromator is approx. 2 cm in length. Since the plasma column drifts away from the axis only within the first 2 μsec scattering measurements were possible.

The scattering measurements were made at $10 \mu\text{D}_2$. Measurements with a bank energy of 0.34 MJ gave in the time interval 1 - 2 μsec electron temperatures of 120 - 190 eV. The temperature rise is smaller than would be expected in an adiabatic compression. At a bank energy of 1.5 MJ the maximum electron temperature measured in this interval was 210 - 215 eV. Fig. 9 shows two typical scattering spectra.

The temperatures were determined from the half-width of the Gaussian curve in which the sum of the error squares was smallest. In order to estimate the error another two Gaussian curves were enlisted which match the test points with a probability of 50%. The Gaussian curves with the lowest and highest half-width then give the lower and upper values of the temperature.

The light scattering and the X-radiation measurements give in the overlapping time interval within the margins of error the same electron temperature.

5. Estimation of the ion temperature

Since the density measurements give a radial density profile deviating from the box profile of a $\beta = 1$ plasma and the trapped magnetic field is unknown, the ion temperature cannot be estimated from the pressure balance.

The estimate made here is based on measurements of the neutron rate and the assumption of a Maxwell distribution of the ion energy.

The neutron yield was measured time-integrated with a silver counter and time-resolved with scintillation counters. The axial dependence was determined with a 4-channel neutron collimator.

In Fig. 10 the total neutron numbers for various initial pressures and bank energies are represented. An initial pressure

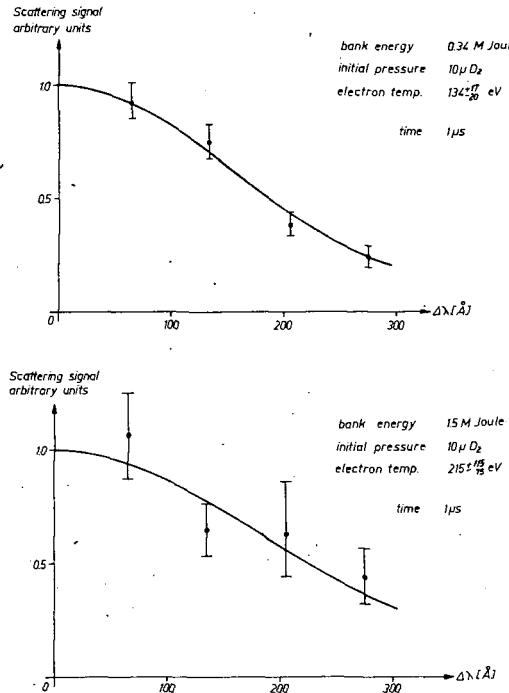


FIG. 9. Spectra of scattered laser light at $t=1$ μsec for bank energies of 0.34 and 1.5 MJ, respectively

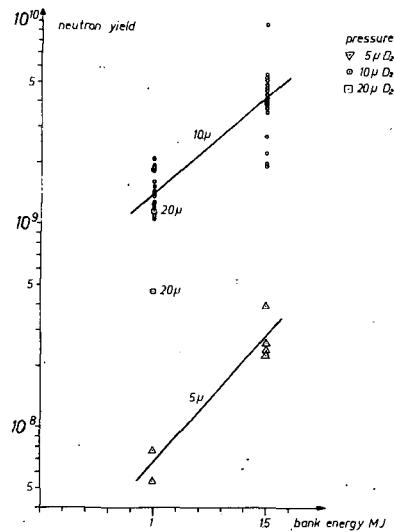


FIG. 10. Total neutron yield against bank energy for different initial pressures

of $10 \mu\text{D}_2$ gave the highest neutron yield, which at a bank energy of 1.5 MJ was up to 1×10^{10} neutrons/discharge.

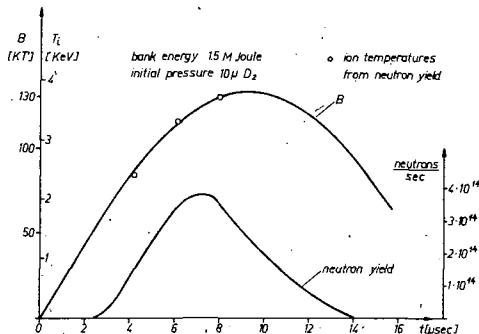


FIG. 11. The neutron yield and external magnetic field as a function of time. The circles represent ion temperatures as calculated from the neutron yield and measured densities.

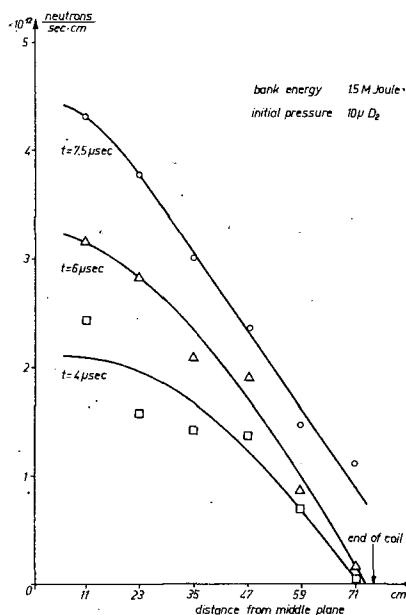


FIG. 12. Distribution of neutron emission along the discharge axis at the indicated points of time

The ion temperatures determined from the neutron yield have values of 2.4 - 3.7 keV and are plotted in fig. 11. The time dependence of the temperature matches well with that of the magnetic field, as is to be expected of the adiabatic compression of a gas with two degrees of freedom. The neutron burst, also indicated in Fig. 11, drops after 7 μ sec due to end losses. The drop is steeper than would be expected from the decrease in density. Accordingly, the temperature should already drop in the interval from 8 - 12 μ sec, in which the magnetic field is practically constant and in which the ion temperature should also remain constant.

This cooling is perhaps caused by the fact, that especially the faster particles escape through the ends.

The axial dependence of the neutron yield is plotted in Fig. 12. This agrees qualitatively with the axial dependence of the density profile found in the continuum measurements.

Acknowledgements

We should like to appreciate the excellent work of Dr. A. Knobloch during the construction of the bank. We should like to thank Dr. H.-J. Kunze and H. Röhr for the laser scattering measurements and Dr. R. Chodura and D. Düchs for many useful suggestions. This work was performed as part of the joint research program of the Institut für Plasmaphysik GmbH, Garching and Euratom.

References

- [1] Knobloch, A., 3rd Symposium on Engineering Problems in Thermonuclear Research, Munich (1964)
- [2] Reynolds, J.A. et al., Phys. Fluids, 8, (1965) 529
- [3] Eberhagen, A., and Keilhacker, M., Comptes Rendus Vie Conf. Int. nur les Phen. dans le Gaz, Paris (1963), Vol.II 573 and 577
- [4] Heiss, A., IPP Report 1/25 (1964)
- [5] Kunze, H.-J., Fünfer, E., and H. Röhr, to be published in Phys. Letters.

DISCUSSION

L. M. GOLDMAN: Have you measured the fast light front which precedes the main piston as a function of initial filling density? Can this front be explained by an electron heat front preceding the ion shock?

C. ANDELFINGER: We measured this front at deuterium pressures of 5 and 10 mTorr. At the lower pressure the velocity was higher. The velocities agree with a calculated electron temperature wave, but our theoreticians who have performed this calculation do not accept the result of the three fluid model at these low initial pressures of 5 and 10 mTorr.

G. B. F. NIBLETT: At 5 mTorr you measure $T_e = 500$ eV. What is the electron density at that time?

C. ANDELFINGER: About $(1 \text{ to } 2) \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$.

V. F. DEMICHEV: Have you measured the angular and energy distribution of the neutron radiation?

C. ANDELFINGER: No, we have not.

PLASMA CONFINEMENT, HEATING AND LOSSES IN PHAROS WITH AN EXTENDED CURRENT PULSE

A.C. KOLB, W.H. LUPTON, R.C. ELTON, E.A. MCLEAN,
M. SWARTZ AND M.P. YOUNG

UNITED STATES NAVAL RESEARCH LABORATORY
WASHINGTON, D.C., UNITED STATES OF AMERICA
AND

H.R. GRIEM AND E. HINTZ*

UNIVERSITY OF MARYLAND, COLLEGE PARK, MD., AND
UNITED STATES NAVAL RESEARCH LABORATORY,
WASHINGTON, D.C., UNITED STATES OF AMERICA

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

PLASMA CONFINEMENT, HEATING AND LOSSES IN PHAROS WITH AN EXTENDED CURRENT PULSE.

The duration of the current in a large theta-pinch experiment has been extended to times of $\sim 100 \mu\text{sec}$ which is now sufficiently long to study the confinement of a hot, dense ($\sim 10^{17} \text{ cm}^{-3}$) plasma in a relatively constant, high magnetic field. Measurements of the spatial and temporal distribution of particles and the heating rates have been carried out for the case of an initial reverse bias field. Comparing 640-kJ and 1.3-MJ discharges in a closely-coupled coil, the loss rate decreases with increasing peak temperature. The confinement time in the 1.3-MJ case is determined by the onset of a rotating flute instability which is caused, we believe, by the presence of stray transverse fields near the slot. The heating rate and final 900-eV temperature is large compared to that expected from adiabatic compression of a shock-heated plasma.

CONFINEMENT, CHAUFFAGE ET PERTES DE PLASMA DANS PHAROS, AVEC PROLONGATION DE L'IMPULSION DE COURANT. Les auteurs ont prolongé la durée du courant dans un grand dispositif à striction axiale pour étendre des périodes d'environ 100 μs , ce qui est suffisamment long pour étudier le confinement du plasma chaud et dense (environ 10^{17} cm^{-3}) dans un champ magnétique intense à peu près constant. Ils ont procédé à des mesures de la distribution des particules dans l'espace et dans le temps ainsi que des vitesses de chauffage dans le cas d'un champ initial de polarisation. Lorsqu'il ont comparé des décharges de 640 kJ et de 1,3 MJ dans une bobine à enroulement serré, ils ont constaté que la vitesse de perte diminue lorsque la température maximale augmente. Dans le cas d'une décharge de 1,3 MJ, la durée de confinement est déterminée par l'apparition d'une instabilité en cannelures tournante, laquelle est sans doute due à la présence de champs transversaux parasites à proximité de l'ouverture. La vitesse de chauffage et la température finale de 900 eV sont élevées par rapport à celles que l'on peut espérer obtenir par compression adiabatique d'un plasma chauffé par chocs.

УДЕРЖИВАНИЕ, НАГРЕВ И ПОТЕРИ ПЛАЗМЫ В УСТАНОВКЕ "ФАРОЗ" С ШИРОКИМ ИМПУЛЬСОМ ТОКА. Продолжительность потока в эксперименте с большим тета-пинчом была увеличена примерно до 100 мксек, что является достаточным для изучения удержания горячей плотной ($\sim 10^{17} \text{ см}^{-3}$) плазмы в относительно постоянном сильном магнитном поле. Измерения пространственного и временного распределения частиц и тепловой мощности были выполнены для случая с начальным реверсивным полем смещения. Путем сравнения ряды в 640 кдж и 1,3 мегаджоуля в тесно-сдвоенной катушке установлено, что интенсивность потери уменьшается с возрастанием пиковой температуры. Время удержания при 1,3 мдж определяется началом вращательной желобковой "волны" неустойчивости, которая, вероятно, вызывается наличием рассеянных реверсивных полей вблизи желобка. Тепловая мощность и окончательная температура в 900 эв в целом сравниваются с величинами, ожидаемыми из адиабатического сжатия ударнонагретой плазмы.

* Present address: Institut für Plasmaphysik der Kernforschungsanlage, Jülich, Federal Republic of Germany.

EFFECTO DE UN PROLONGADO IMPULSO DE CORRIENTE SOBRE EL CONFINAMIENTO, CALENTAMIENTO Y PERDIDAS DEL PLASMA EN PHAROS. Efecto de un prolongado impulso de corriente sobre el confinamiento, calentamiento y pérdidas del plasma en el dispositivo Pharos. En un experimento de constrictión azimutal, la duración del paso de la corriente se ha prolongado hasta $\sim 100 \mu\text{s}$, lapso suficientemente largo para estudiar el confinamiento de un plasma caliente y denso ($\sim 10^{17} \text{ cm}^{-3}$) en un campo magnético intenso, relativamente constante. Se han medido, en el caso de un campo inicial de polarización inversa, las distribuciones espacial y temporal de las partículas y las velocidades de calentamiento. Cuando se comparan descargas de 640 kJ y de 1,3 MJ en una bobina de acoplamiento cerrado, la velocidad de pérdida disminuye al aumentar la temperatura máxima. En la descarga de 1,3 MJ, el tiempo de confinamiento se determina por la aparición de una inestabilidad giratoria en estrías, originada probablemente por la presencia de campos transversales dispersos cerca de la rendija. La velocidad de calentamiento y la temperatura final de 900 eV son elevadas si se comparan con las que suelen obtenerse por compresión adiabática de un plasma calentado por choque.

INTRODUCTION

In its original form, the Pharos experimental arrangement consisted of a 2 m long, 10.5 cm diameter, single-turn θ -pinch coil connected to the center of a 5 m wide current collector plate [1]. The nonuniform current distribution and flux leakage into the slot of the coil resulted in curved field lines with a radius of curvature of ~ 100 m. As a consequence, there was a toroidal drift toward the slot in $\sim 10 \mu\text{sec}$ --a time short compared with the 30 μsec half-period of the damped oscillatory discharge.

The superposition of a pulsed hexapole field of the Ioffe type, with a rise-time comparable to that of the main confining field, served to suppress the radial drift to the walls for the entire first half-cycle of the discharge [2]. With initial fill pressures of ~ 0.1 Torr the plasma column appeared in side-on streak photographs to be relatively stable. However, with fill pressures < 0.05 Torr, a well defined rotating $m = 2$ flute was observed. If the hexapole field was present before the start of the main compression, the time-constant for the appearance of this instability could be shortened. This suggested that there was a torque on the plasma which depended on the magnitude of (asymmetric) transverse fields in the plasma [3,4].

The experiment was then modified by the addition of a 1 m extension to the original collector system. This extension had a width equal to the length of the coil and was slotted at 20 cm intervals so as to suppress stray axial currents. This improved the symmetry of the field and, even though there remained a small-amplitude wobble around the magnetic axis, the plasma column did not reach the walls. Thus, the Ioffe field was no longer required. The usual rotating $m = 2$ flute was also suppressed.

The superposition of either pulsed or steady transverse fields of ~ 100 G caused the rotational instability to reappear [5]. The presence of axial Hall currents J_z in the plasma, due to the interaction of J_θ with B_r , can produce a torque proportional to $J_z B_r$ [3]. Direct evidence for the existence of Hall currents was obtained with magnetic probes situated between the quartz tube and the coil [5]. The observed distortion of the applied B_r fields, resulting in a Maxwell stress on both the plasma and external conductors, was sufficient to account for the estimated angular momentum acquired by the plasma column.

It was also found that the time-constant for the appearance of the rotating-flute instability decreased with increasing distance from the midplane and could be altered by the addition of 0.1% impurity, which is apparently sufficient at early times ($\leq 2 \mu\text{sec}$) to reduce the electron temperature and increase the resistivity. This would be in accord with the expectations from theoretical models [4,6], which relate the rotation to the decay-time of plasma current.

Finally, it was found that to confine the remnants of a hot plasma ($T_e > 100$ eV) for times up to 30 μsec an initial reverse bias field was essential. The free flow of plasma out the ends in 15-20 μsec was the limiting factor in the absence of a bias magnetic field. A detailed exposition of the results summarized above for a damped oscillatory discharge was recently published [7].

In all θ -pinch experiments reported on by numerous workers, the plasma confinement could be studied only for relatively short times, i.e., for the characteristic half-period of the discharge. The question remained, whether confinement times approaching 100 μ sec were possible by trapping an initial reverse bias field to inhibit end losses by virtue of closed field lines surrounding the plasma. The duration of the magnetic field was extended by closing a clamp circuit at maximum current.

The experiments reported here are concerned with measurements of the heating rate, particle-loss rate, radial and axial density distributions, and the quantitative correlation of neutron emission with the measured plasma parameters.

APPARATUS AND CHOICE OF EXPERIMENTAL CONDITIONS

The Pharos capacitor bank was modified by the addition of vacuum clamp switches, equal in number to the three-electrode trigatron starting switches. The clamp switches have an inductance of 40 nH and a resistance of 7 m Ω [8]. The results reported here correspond to 640 kJ and 1270 kJ discharges, involving 140 and 280 clamp switches, respectively. The L/R decay time of the field was 90 μ sec and 160 μ sec in these two cases.

In the earlier experiments mentioned in the introduction, the coil diameter was 13.5 cm i.d., while the initial plasma radius was 8.2 cm ("loosely-coupled" coil). Measurements are reported here using both this coil and a "closely-coupled" coil with a diameter of 10.5 cm i.d. The object of this change was to increase the rise-time of the field so as to determine the effect of the heating rate on the confinement and to determine whether close proximity of the slot to the plasma influences the stability. The other experimental parameters are summarized in Table 1.

Table 1 - Experimental Parameters

Coil length 180 cm

Energy	640 kJ	640 kJ	1270 kJ
Coupling	Loose	Close	Close
Voltage	18.7 kV	18.7 kV	18.7 kV
Current	5.9 MA	7.2 MA	12.7 MA
B _z , max	41 kG	50 kG	88 kG
Rise-Time	12 μ sec	10 μ sec	12 μ sec
Decay-Time	120 μ sec	90 μ sec	160 μ sec
B _z , initial	-5.8 kG	-5.8 kG	-5.8 kG

The preheating was accomplished by a 300 kc/s damped discharge with a maximum field of 1.2 kG [1]. The initial ionization was always >50% and close to 100% for fill pressures below 0.06 Torr in quartz tubes.

It was determined that the confinement time and stability do not depend critically on the magnitude of the initial bias field over the range -2 to -6 kG. Therefore, the bias field was arbitrarily fixed at -5.8 kG to facilitate the intercomparison of data for different bank energies, fill pressures and coil dimensions.

The bulk of the measurements was carried out for a fill pressure of 0.06 Torr, mainly for experimental convenience. At higher pressures (~0.1 Torr)

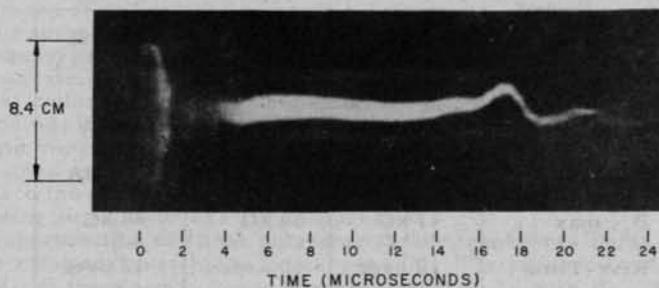
the OVIII resonance lines were weak, making electron-temperature measurements more difficult. At pressures below 0.03 Torr the visible bremsstrahlung was too weak and the plasma radius too small for accurate determinations of the density distribution. However, the confinement time and general macroscopic features of the discharge were not sensitive to variations of the pressure from 0.03-0.10 Torr. Therefore, the results reported here are regarded as representative of "high density" θ -pinches with reverse initial fields and modest coil voltages, as distinguished from experiments elsewhere with voltages in excess of 50 kV without bias fields [9,10].

DENSITY DISTRIBUTION AND PARTICLE LOSS RATES

Calibrated f/2.9 streak cameras, operated with a time resolution of 0.8 μ sec, were used to obtain radial distributions of bremsstrahlung radiation on a relative basis in the spectral range 3800 to 6500 Å. There were no spectral lines in evidence during the time in which the density was measured. The radial intensity distribution was obtained in the usual way by densitometry of the photographic records and Abel inversion. The absolute intensity scale was established by a measurement of the continuum radiation in a small wavelength interval from a slice of plasma using a photoelectric monochromator calibrated against a tungsten ribbon lamp.

A typical side-on streak photograph of the compressed plasma is shown in Fig. 1. It is apparent without detailed analysis that confined plasma cannot be observed for times $\geq 20 \mu$ sec, under circumstances where the axial field is essentially constant for times greater than $\sim 8 \mu$ sec.

End-on framing photographs, using a telecentric optical system, of the radial distribution of the luminosity are shown in Fig. 2. The "hole" in the plasma column due to the reverse trapped bias field is apparent up to the second microsecond of the discharge. At later times these end-on data cannot be used to ascertain the presence of a "hole," due to axial wobbling of the compressed cylinder.



$P_0 = 0.06$ TORR, 640 KJ (CLAMPED)
COIL DIAMETER = 10.5 CM I.D., $B_z = -5.8$ KJ
10 CM FROM MIDPLANE

FIG. 1. Typical side-on streak camera photograph of a compressed plasma. Discharge conditions: 0.06-Torr D_2 , condenser bank energy = 640 kJ, $B_z = -5.8$ kG, 10 cm from midplane, and "closely-coupled" coil.

In Fig. 2, an instability is observed following the first implosion. A surface layer of the plasma seems to blow off. At later times the plasma column coalesces into a well-defined cylinder without obvious turbulence at boundaries. This "blow off" phenomenon makes itself manifest in a lack of reproducibility and cylindrical symmetry between 2 and 4 μ sec. Thus the radial density distribution could not be measured during this time.

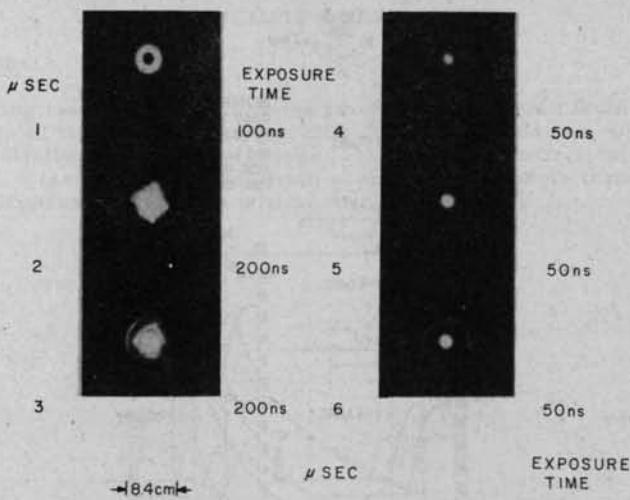


FIG. 2. Image converter photographs showing the early compression states. Discharge conditions same as for Fig. 1. The time is measured from the initiation of the main bank discharge. At 2 μ sec, an instability develops and a layer is "blown off" the surface at 3 μ sec. By 4 μ sec a symmetrical plasma cylinder is re-formed. The exposure times are shown to the right of each photograph.

The spatial and temporal distribution of the electron density for a 640 kJ discharge in the loosely-coupled coil is shown in Fig. 3. Observations were made at 20 cm intervals along the coil axis. Three positions were monitored simultaneously and the streak cameras were intercalibrated using the radiation from the early stages of the pre-heater discharge, which was established to be uniform along the axis. As discussed in Ref. 7, there are strong axial variations in the effective plasma radius, and apparently strong gradients in the axial pressure. However, in the region of the midplane of the coil the density variations are relatively small, except at the plasma boundary where the density falls by a factor of two over ~ 0.3 cm. This latter dimension corresponds to the estimated ion Larmor radius in the boundary region and does not increase significantly over times comparable to calculated field-diffusion times. Furthermore, the plasma density does not fall rapidly. Rather, the change in plasma volume (radius) proceeds at a more rapid rate. Thus near the peak of the current, the plasma is lost from a "constant-density" region with a continuously shrinking volume. This curious behavior could be interpreted as a plasma loss due to radial diffusion from field lines in the plasma, which close on themselves, to field lines which are connected to the outside of the coil, i.e., analogous to the peeling of an onion. Unfortunately, this vegetable-like interpretation is not unique since the presence of a reverse magnetic field for times $> 5 \mu$ sec has not been established directly. Also, the precision of the density-distribution measurement from side-on Abel-inverted streak photographs is not sufficient to make a definitive statement concerning the magnitude of a reverse trapped magnetic field, although in Fig. 3 there is some evidence for a dip in the density distribution at 8 μ sec.

The total number of ions or electrons confined during the discharge is displayed in Fig. 4 for the 640 kJ case. The characteristic confinement time is 10-15 μ sec, i.e., half the plasma is lost in this time. In the 1.3 MJ case the line density at the midplane does not decrease for about 12 μ sec, until the onset of a rotating flute instability. Thus the loss rate decreases with increasing electron temperature.

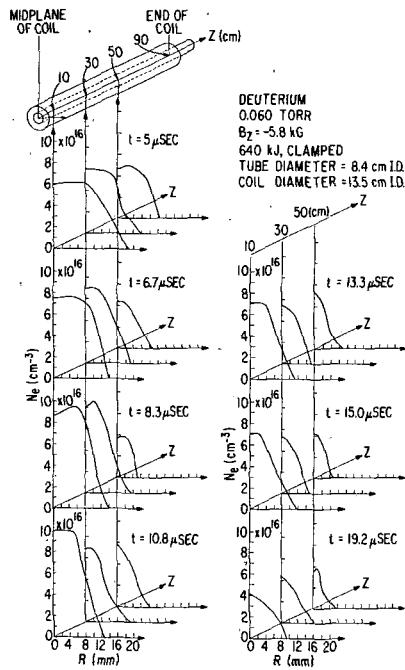


FIG. 3. Spatial and temporal distribution of the electron density for a 640-kJ discharge. The estimated error in the electron density is $\pm 25\%$.

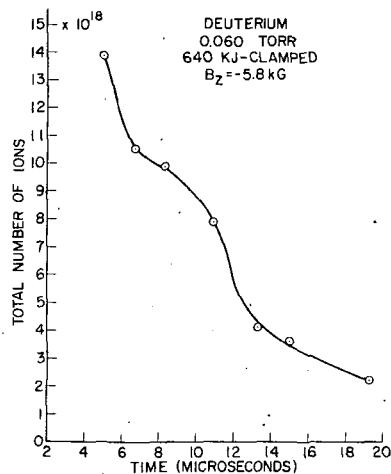


FIG. 4. Total number of confined ions versus time for a 640-kJ discharge. The estimated uncertainty in the absolute scale is a factor of two.

SPECTROSCOPIC OBSERVATIONS

Instrumentation

The heating rate and electron temperature were inferred from end-on measurements of the time histories of OIII-OVIII spectral lines, which appeared sequentially during the discharge [11], using the theoretical curves shown on Fig. 5 (see Appendix) and from x-ray measurements through absorption foils. (Experimental details will be found in Ref. 12.)

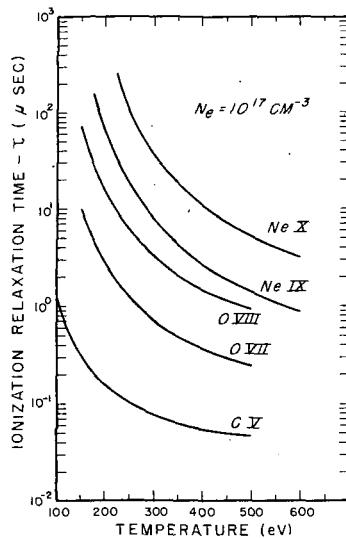


FIG. 5. The theoretical (half) half-width of the intensity-versus-time signal plotted as a function of the electron temperature for the indicated ions and for $N_e = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$. $\tau \propto N_e^{-1}$ (see Appendix).

Intensity measurements in the spectral region 500 Å to 1700 Å were made of OIII-OVI resonance lines as well as of $2^3\text{P}-2^3\text{S}$ lines of OVII. A 0.5 meter, Seya-Namioka vacuum spectrometer with a dispersion of 16 Å/mm and maximum resolution of 0.4 Å was used for these measurements. Some degree of radial spatial resolution was obtained by repeating the measurements with different apertures, which determined the mean diameter of the plasma viewed [12].

Temperatures in the range above 300 eV were also determined from measurements of the continuum intensity in the soft x-ray region of the spectrum beyond the OVIII Lyman series limit [12]. Provision was made for selecting any one of three sets of four simultaneously monitored absorbing-foil-scintillator-photomultiplier combinations. Most results were obtained with nickel foils of 2.8 and 6.8 mg/cm^2 (opaque to OV and OVI radiation in the 150 to 170 Å region), covered with 25μ of polyethylene (CH_2) to reduce the transmission for x-ray lines. The aperture was restricted with stops so that the plasma region viewed was similar to that observed with the vacuum spectrometer.

Temperature History

The temperature history obtained by various methods for the nominal fill pressure is shown in Figs. 6 and 7 for the experimental conditions listed in Table 1. A detailed exposition of the theoretical basis from which the temperature was inferred is discussed in the Appendix. The various measurements yield consistent results summarized as follows:

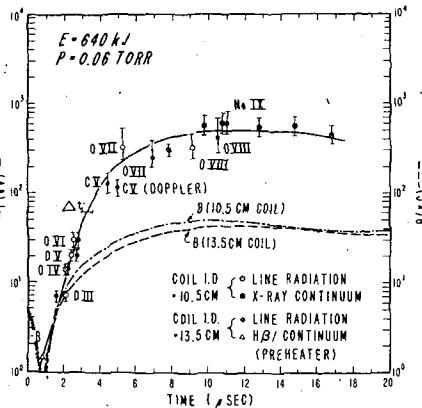


FIG. 6. Temperature and magnetic field versus time for "closely-coupled" and "loosely-coupled" coils. Electron temperatures were obtained from the time history of ultraviolet and X-ray line radiation and from measurements of the X-ray continuum through absorbing foils. The CV ion temperature was obtained from a Doppler profile measurement. The preheater temperature was obtained from the H_{β} line-to-continuum intensity ratio. Δt represents the experimental uncertainty in the time.

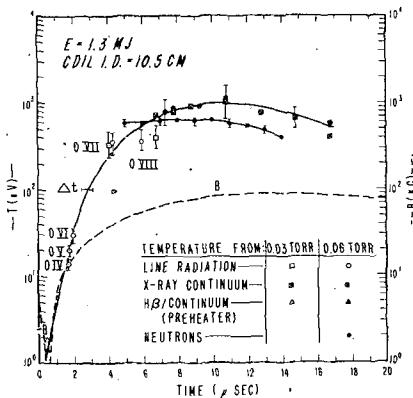


FIG. 7. Temperature and magnetic field versus time for 0.03 and 0.06-Torr D_2 for a 1.3-MJ discharge in the "closely-coupled" coil. Electron temperatures and preheater temperatures were obtained as for Fig. 6. The significance of the neutron temperature is discussed in the text. The variation of the experimental errors with temperature is shown by typical error flags.

The temperature rises to ~ 400 eV for the 640 kJ discharge with a heating rate essentially the same for the closely-coupled and the loosely-coupled coils. For the 1270 kJ discharge, however, the heating rate is markedly higher, and the peak temperature is ~ 900 eV. In each case, the temperature rises initially with at least the third power of time and is still rising when the field peaks. This high heating rate, culminating in the measured high temperatures, is attributed to the dissipation of the reverse field.

The profile of the Doppler-broadened CV 2271 Å line yields an ion temperature of 115 ± 25 eV at 4.5μ sec, which is somewhat lower but still consistent with the measured electron temperature (see Fig. 6). The uncertainty is due almost entirely to a possible Zeeman effect. The agreement between

electron and ion temperatures is not unreasonable since the CV ion-electron energy equipartition time is estimated to be of the order 0.1 μ sec for the present conditions.

Also, the time history of the neutron emission, the total neutron yield (4×10^7 /pulse) and the time variations of the electron density and plasma volume can be used to plot the temporal variation of a "neutron-yield temperature." The spectroscopic and neutron temperatures are in approximate agreement as indicated on Fig. 7.

Radial Intensity Variations

The space-resolved, end-on observations with the vacuum spectrometer [12] show that the OIII-OVI spectral lines are emitted during the initial implosion phase from different radial positions. The OVII line at 1638 Å also shows evidence of strong radial intensity gradients, with the radiation being emitted chiefly from an annulus between radii of approximately 5 and 15 mm. This gradient could be due either to a nonuniform oxygen concentration, or to radial variations in N_e , T_e associated with a reverse trapped field.

Impurity Concentration

Discharge cleaning reduces the carbon level by a factor of six. This is not the case for oxygen. Comparison of the signal amplitude of the optically thin $2^3P - 2^3S$ OVII line at 1638 Å, with and without added impurity, indicated 0.15% oxygen in the discharge. This value is only approximate in view of undetermined wall effects and the possibility of different loss rates of oxygen and deuterium ions. Earlier measurements [7] of the influence of impurities on the plasma stability also indicated an impurity level of about 0.1%. Oxygen-ion resonance lines could not be used for determining the impurity level since these lines become optically thick when the plasma column is viewed end-on.

Ionization of OVIII

The time history of the OVIII line shows that it decays by a factor of two within one microsecond after reaching a maximum, a time which is short compared with the characteristic particle-loss time. In addition, the temperature is changing slowly at this time (see Figs. 6 and 7). Also, the ionization rate of OVIII calculated for the measured N_e and T_e is in accord with the observations. From this, it is concluded that the OVIII temporal history corresponds to the complete stripping of oxygen ions.

To check this point, neon was added to the discharge. The time-history of NeIX is expected to be similar to that of OVIII, since their ionization potentials are comparable. The observed burn-out of NeIX at 15.5 Å and the subsequent appearance of NeX at 10.2 Å confirms the conclusions concerning the OVIII burnout.

SUMMARY

From the measured electron density and temperature, the plasma pressure is nearly equal to the magnetic pressure at $\sim 10 \mu$ sec ($\beta = 0.8 \pm 0.2$). The heating rate is much higher than expected for shock heating and adiabatic compression. Energy balance calculations show that the high peak temperatures must be due to the conversion of magnetic energy in the trapped bias field into plasma kinetic energy.

Calculations of the ion-electron relaxation time, using the measured N_e and T_e , show that the ion temperature should rise to within 200 eV of T_e in times of the order of 1 μ sec. The observed "neutron-yield temperature" does not contradict this conclusion.

Calculations of the radiation loss rates from the spectroscopic measurements indicate that they are small compared with the measured heating rates after the temperature rises above ~ 100 eV, and are completely negligible when the oxygen is stripped of all of its electrons.

The observed shape of the high- β plasma suggests that there are large axial pressure gradients, which may be due to closed field lines. If it is postulated that plasma is lost by radial diffusion from closed field lines to field lines that encircle the coil, the required radial diffusion velocity, v_r , can be estimated by

$$2\pi r_p \ell_p N_e v_r \approx \frac{dN}{dt} ; \quad v_r \approx \frac{r_p}{2} \left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \right) ,$$

where r_p , ℓ_p are the plasma radius and length and N is the total number of confined electrons. Based on observations of $N_e(r, z, t)$, a velocity $v_r \approx 5 \times 10^4$ cm/sec is calculated from this relation and would account for the losses in the 640 kJ case. This velocity is within a factor of six of that estimated using the classical diffusion coefficient and measured pressure gradients at the plasma boundary. Thus, taking the various uncertainties into account it is likely that the losses are determined by classical diffusion. Some support for the notion that (almost) classical radial diffusion is involved in the loss mechanism is provided by the observation that dN/dt decreases with increasing peak electron temperature (bank energy). If the plasma were lost by free flow through an aperture (hole) at the ends, one would expect the loss rate to increase with increasing temperature (sound speed). Also, the smearing of the plasma boundary with time is less than predicted by classical diffusion, which is expected if the particles are lost by "peeling" off the surface in the manner indicated above.

Inspection of the density profiles (Fig. 3) indicates that the trapped reverse field, which causes the axial pressure gradient, has effectively decayed after $\sim 11 \mu\text{sec}$, i.e., the plasma density near the ends begins to rise. This corresponds to the time at which there is a sudden increase in the particle loss rate (Fig. 4). Also in Fig. 4 it is seen that the loss rate tends to decrease during the period 5-8 μsec , when the electron temperature is rising.

The $\sim 12 \mu\text{sec}$ confinement time of a 900 eV plasma (1.3 MJ discharge) in the closely-coupled coil is not yet limited by particle losses, as in the 640 kJ case. Instead, the plasma is lost after the onset of a rotating-flute instability, which is suspected to be due to the close proximity of the plasma (before the first implosion) to stray transverse fields near the slot. Further measurements with a loosely-coupled coil and bank energies $> 1 \text{ MJ}$ are required to settle this question and to elucidate further the confinement mechanism suggested above. In the case of a 1.5 MJ ringing discharge in a loosely-coupled coil, rotating flutes were not observed for times approaching $25 \mu\text{sec}$ [7].

One also notices for the 1.3 MJ case that there is an indication that the temperature tends to decrease after $\sim 10 \mu\text{sec}$. This could be due to a preferential loss of energetic particles.

Finally, one concludes that for the conditions of these experiments, the confinement time of the plasma is small compared with the duration of the "clamped" magnetic field.

ACKNOWLEDGMENTS

We should like to express our appreciation to A.D. Anderson and J.M. McMahon for assistance in the analysis of the data. The extensive contributions to the success of these experiments by the engineering and technical staff of the NRL Radiation Division are gratefully acknowledged.

APPENDIX

SPECTROSCOPIC ANALYSIS

The key to the analysis of line spectra from energetic pulsed discharges lies in the various rate coefficients for excitation, ionization and their inverses. The largest cross-sections are usually those for allowed electric-dipole transitions. Because the dipole interaction is of rather long range, it is reasonable to employ the quasiclassical impact parameter method discussed by Seaton [13]. A simplified form of the cross-section is then [14]

$$\sigma_{nm} \approx \frac{2\pi e^4 f_{nm}}{mv^2 \Delta E_{nm}} .$$

The quantities f_{nm} and ΔE_{nm} are absorption oscillator strength from levels m to n and their difference in excitation energy, respectively; e , m and v are electron charge, mass and velocity.

The excitation rate $X_{nm} = \langle \sigma_{nm} v \rangle$ is found by averaging over a Maxwellian velocity distribution

$$X_{nm} \approx 9 \times 10^{-8} f_{nm} \frac{E_H}{\Delta E_{nm}} \left(\frac{E_H}{kT} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{\Delta E_{nm}}{kT} \right) [\text{cm}^3 \text{ sec}^{-1}] ,$$

where all energies are expressed in terms of the ionization energy of hydrogen, E_H . This result can be extended to ionization by summing over final states n and continuing the sum as an integral over free-electron states. With $f_{nm} \approx 1.6 n_z/m^3$ and $\Delta E_{nm} \approx E_z - z^2 E_H/m^2$ in the exponential factor, the resulting ionization coefficient is

$$S_z \approx 7 \times 10^{-8} \frac{n_z}{z^2} \left(\frac{E_H}{E_z + kT} \right) \left(\frac{kT}{E_H} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{E_z}{kT} \right) [\text{cm}^3 \text{ sec}^{-1}] .$$

Here n_z is the number of equivalent electrons in the state to be ionized, E_z its ionization energy and z the charge of the resulting ion. The expression for S_z represents in analytic form the result of an exact integration to within 10% for $T/E_z < 0.5$. The temperature-dependent denominator arises because of the continuous energy variation in ΔE_{nm} for bound-free transitions. Since at low temperatures (compared with E_z) the behavior of the ionization cross-section near threshold controls the ionization rates, one can demonstrate that the threshold ionization cross-section corresponding to the above expression for S_z is $\sigma = 3.3 a_0^2 z^{-4} [(mv^2/2z^2 E_H) - 1]$, which agrees with the Coulomb-Born approximation [15] for $z=2$ and is 20% smaller than the exact Coulomb-Born approximation for $z=\infty$. Thus, the expression adopted for S_z should be quite reliable, especially for high- z ions.

Estimates for radiative-recombination coefficients are readily obtained from well-known formulas for the free-bound continuum emission coefficient, dividing by the photon energy and integrating over the relevant frequency ranges. From the hydrogenic continuum formula (without the Gaunt correction) the calculation for the radiative-recombination coefficient follows in this manner to give

$$\alpha_z \approx 5 \times 10^{-14} r_z^{-1} z^4 \left(\frac{E_H}{kT} \right)^{3/2} [\text{cm}^3 \text{ sec}^{-1}] .$$

Here r_z is a factor accounting for the detailed ionic structure, which can be estimated to be $r_z = 0.10, 0.10, 0.12, 0.13, 0.12, 0.33, 0.39$ for recombination

leading to OII, OIII, etc., and OVIII, respectively. (The slight temperature dependence of these factors may safely be neglected in view of the overall uncertainties of, say, a factor of 2 in the collisional rate coefficients.)

In order to check whether steady state ionization is indeed reached, ionization (or recombination) relaxation times must be estimated. A corona-type steady state is reached in times of the order of $\tau_z \approx (S_z N_e)^{-1}$. When both step-wise excitation and ionization or collisional recombination are important, relaxation times are considerably shorter. Up to and including OVI, suitably revised relaxation times are about $1 \mu\text{sec}$ for $N_e = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, and are therefore shorter or at least not much longer than the times of interest in the present experiment, justifying the use of steady state relations. However, for OVII and OVIII, the situation tends to be the opposite (here no significant reduction in τ_z can be expected), and actual rate equation must be considered.

The steady state corona equations are used to obtain temperatures at the time when OIII-OVI resonance lines reach a maximum, assuming each line peaks when there are equal populations of the ion of interest and the next ionization species. Inclusion of stepwise ionization and excitation and the counteracting collisional recombination could not change the temperatures by more than 20%, which is adequate precision for the purposes of this paper.

To obtain temperatures from CV, OVII, OVIII, NeIX, and NeX lines, we consider the intensity relation

$$I_{nm}^z \approx \frac{h\nu_{nm}}{4\pi} X_{nm} N_z N_e \ell,$$

where ℓ is the length of the emitting layer. As the temperature increases, X_{nm} first rises faster than the ionization coefficient, but intensities only become appreciable when also the latter is quite large, i.e., when N_z begins to decrease in favor of N_{z+1} . The (half) half-width of the intensity-versus-time signal from such a line should thus be of the order of the ionization relaxation time, $\tau_z \approx (S_z N_e)^{-1}$. These times for CV, OVII, OVIII, NeIX, and NeX are plotted in Fig. 5 as a function of temperature for $N_e = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$. Comparison with measured temporal (half) half-widths yields an estimate for the average electron temperature during the rise times of spectral lines emitted from these ions.

REFERENCES

- [1] KOLB, A.C. et al., Nucl. Fusion Suppl. Pt. 2 (1962) 553.
- [2] HINTZ, E. et al., Phys. Fluids 7, (1964) 153.
- [3] HAINES, M.G., Phys. Letters 6, (1963) 313.
- [4] THONEMANN, P.C. and KOLB, A.C., Phys. Fluids 7, (1964) 1455.
- [5] KOLB, A.C., THONEMANN, P.C. and HINTZ, E., Phys. Fluids 8, (1965) 1005.
- [6] ROSTOKER, N. and KOLB, A.C., Phys. Rev. 124, (1961) 965.
- [7] HINTZ, E. and KOLB, A.C., Phys. Fluids 8, (1965) 1347.
- [8] YOUNG, M.P., Proceedings of the Symposium on Engineering Problems of Controlled Thermonuclear Research, Livermore, California (May, 1965) (to be published).
- [9] GOLDMAN, L.M. et al., Phys. Rev. Letters 9 (1962) 361; Phys. Fluids 8, (1965), 522.
- [10] JAHODA, F.C. et al., J. Appl. Phys. 35, (1964) 2351; LITTLE, E.M., QUINN, W.E. and SAWYER, G.A., Phys. Fluids 8, (1965) 1168.
- [11] This method has been used by several laboratories—too numerous to list individually here.
- [12] ELTON, R.C., HINTZ, E. and SWARTZ, M., Proceedings Seventh International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Belgrade (1965) (to be published).
- [13] SEATON, M.J., Chapter 11, Atomic and Molecular Processes (BATES, D.R. Ed.), Academic Press, New York (1962).

- [14] GRIEM, H.R., Chapter 6, Plasma Spectroscopy, McGraw-Hill, New York (1964).
 [15] BURGESS, A., *Astrophys. J.* 132, (1960) 503.

DISCUSSION

J.R. ROTH: There are a few cases in Fig. 3 of a radially increasing particle density in the vicinity of the plasma axis. Is this a real effect, or is the increase within your limits of experimental error?

A.C. KOLB: There is some evidence that there is a dip in the density distribution near the axis. This could be due to a trapped reverse magnetic field. However, the experimental accuracy is not sufficient to permit a definitive statement on this point. Nevertheless, the strong axial pressure gradients indicated by the density profiles are certainly real and are consistent with the conclusion that the reverse magnetic field decays in a time comparable to the classical decay time.

L.M. GOLDMAN: What was the minimum quantity of the trapped reverse field to procure the longer confinement times?

A.C. KOLB: The qualitative behaviour of the discharge was similar for bias fields in the range 2 to 6 kG. However, we have only made detailed measurements for $(B_z)_{\text{initial}} = 5.7 \text{ kG}$.

S. YOSHIKAWA: Am I right in saying that, if confinement is limited by classical diffusion, a strong dependence on density, magnetic fields and temperature is to be expected?

A.C. KOLB: Yes. In these particular experiments the transition from $\beta = 0$ to $\beta \approx 1$ takes place over about 3 mm. In this case the temperature dependence of the resistivity, appearing in the classical diffusion coefficient, controls the radial diffusion. Indeed, a very strong dependence of the loss rate on the electron temperature is observed.

L.A. ARTSIMOVICH: I can suggest an explanation of the fact that, in a field produced by Ioffe bars, an additional instability occurs in Dr. Kolb's experiments. Near the surface of a highly conductive plasma the magnetic field geometry will differ considerably from the shape of the field in a vacuum. In particular, the field strength decreases from the plasma surface outwards. In addition, the plasma will tend to escape radially as a number of tongues.

A.C. KOLB: The Ioffe bar stabilization of an $m = 1$ drift towards the wall of the discharge tube demonstrates that the field strength increases from the plasma surface outwards. Also the energy density associated with the multipole field (at the surface of the plasma) is $\lesssim 10^{-4}$ of the energy density in the main B_z confining field. Thus we do not expect, and have not observed, plasma tongues in the direction of cusps. This statement applies to the first $20 \mu s$, when the Ioffe field is applied after the shock implosion. Very late in the discharge, when B_z has dropped to a very low value, radial tongues through the line cusps are indeed observed.

FORMATION AND DEVELOPMENT OF HYDROMAGNETIC DISTURBANCES DURING THE IMPLOSION PHASE OF A PREIONIZED THETA PINCH (CARIDDI)

U. ASCOLI-BARTOLI, S. MARTELLUCCI AND M. MARTONE
LABORATORIO GAS IONIZZATI, EURATOM,
COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE,
FRASCATI, ITALY

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

FORMATION AND DEVELOPMENT OF HYDROMAGNETIC DISTURBANCES DURING THE IMPLOSION PHASE OF A PREIONIZED THETA PINCH (CARIDDI). A study has been made of the implosion phase of a preionized theta pinch in an initial magnetic field. High-speed optical refractive methods and a miniature magnetic probe have been used in order to compare the actual implosion phase behaviour, with the calculated one on the basis of the partially ionized and fully ionized models. The thickness ($\lesssim 8$ mm) of the measured shock front is appreciably smaller than the relevant collision distances, thus indicating a collisionless phenomenon. High frequency structure is also observed in the shock transition.

FORMATION ET EVOLUTION DE PERTURBATIONS HYDROMAGNETIQUES AU COURS DE LA PHASE D'IMPLOSION D'UNE STRICKTION AZIMUTALE PREIONISEE (DISPOSITIF CARIDDI). Les auteurs ont employé des méthodes de réfraction optique à grande vitesse et une sonde miniature magnétique pour comparer le comportement réel du plasma pendant la phase d'implosion avec le comportement calculé sur la base des modèles partiellement et entièrement ionisés. L'épaisseur ($\lesssim 8$ mm) du front de choc mesuré est sensiblement inférieure aux distances de collision, ce qui est caractéristique d'un phénomène sans collision. On observe également une structure à hautes fréquences dans la phase de transition de choc.

ОБРАЗОВАНИЕ И РАЗВИТИЕ ГИДРОМАГНИТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ТЕЧЕНИЕ ИМПЛОЗИОННОЙ ФАЗЫ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ИОНИЗИРОВАННОГО ТЕТА-ПИНЧА (КАРИДДИ). Высокоскоростные оптические рефракционные методы и миниатюрный магнитный зонд использовались с целью сравнения действительного поведения фазы имплозии с поведением, вычисленным на основе частично и полностью ионизированных моделей. Толщина ($\lesssim 8$ мм) измеренного фронта ударной волны заметно меньше соответствующих расстояний столкновения, что указывает на существование явления без столкновений. В ударном переходе наблюдается также высокочастотная структура.

FORMACION Y EVOLUCION DE PERTURBACIONES HIDROMAGNETICAS DURANTE LA FASE DE IMPLOSION DE UNA CONSTRUCCION AZIMUTAL PREIONIZADA (DISPOSITIVO CARIDDI). Se han utilizado métodos de refracción óptica de gran velocidad y una microsonda magnética para comparar el comportamiento real, en la fase de implosión, con el calculado a base de modelos parcial y totalmente ionizados. El espesor ($\lesssim 8$ mm) del frente de choque medido es sensiblemente menor que las correspondientes distancias de choque, lo que es indicio de un fenómeno exento de colisiones. En la transición de choque, se observa también la estructura de las altas frecuencias.

1. INTRODUCTION

The fast theta-pinch Cariddi /1-3/ has been designed with the aim of studying the radial propagation of large amplitude hydro-magnetic disturbances and possibly of collisionless shock waves.

For this purpose the radius is large (9 cm) and a high electric field is used (745 V/cm).

Measurements on the radial propagation have been carried out by means of high-speed interferometry, Schlieren and Shadowgraph methods and miniature magnetic probes. The results have been compared with numerical integrations of the field equations for a plasma, as concerns the macroscopic behaviour of the shock: some elements of the shock structure have been observed.

2. APPARATUS

The apparatus shown in Fig.1 is basically a theta-pinch in which a multi-sector coil is adopted. An initial magnetic field is provided by means of a second condenser bank which energizes a single turn coil at low frequency (3.3 kc/s), the single turn coil being inside the sectored coil. An axial discharge critically damped, energized by a bank of 3 kJ, provides the preionization of the filling gas (H_2). The main condenser bank produces a peak magnetic field of 7500 Gauss (bias fields up to -1700 Gauss are used). The inner diameter of the discharge tube is 180 mm, the length of the sectored coil is 700 mm. Some details of the main bank are given in Table I.

Fig.2 shows the timing of the banks. First the preionizing bank is switched on, followed after about 5 μ sec by the bias bank, and when the bias field has reached its peak value the main bank is switched on.

3. PREIONIZATION

The preionization discharge has been tested by optical methods. The density of the partially ionized plasma has been measured by using a series interferometer /4/ (it has been necessary to use this type of interferometer owing to the large diameter of the discharge tube). The measurements have been carried out on streak interferograms in order to obtain the plasma density along the radius of the tube as a function of time; it has been possible to obtain both the electron density and that of the residual neutral atoms by measuring the fringe shift at two different wavelengths /5/ ($\sim 4700 \text{ \AA}$ and $\sim 6200 \text{ \AA}$).

Fig. 3 shows a typical interferogram which describes quite well the behaviour of the axial discharge. The implosion of the discharge does not produce appreciable fringe shifts but remembering that the recorded shift is integrated along the entire length of the discharge tube, this can be explained by an axial variation of the imploding plasma column. On the contrary, the rebound of the plasma towards the walls is clearly observable. By following the fringe shift in time one can see that it reaches a maximum value at about 10 μ sec and later on decreases. We have chosen to fire main bank at 70 μ sec because at this time there is a good degree of ionization with a quasi-uniform radial density distribu

tion. In addition at this time there is no appreciable axial current. Figs. 4 a, b shows the electron density versus the radius measured at successive times at 50 and 25 μ Hg in H₂. The homogeneity of the plasma on the entire cross-section of the discharge

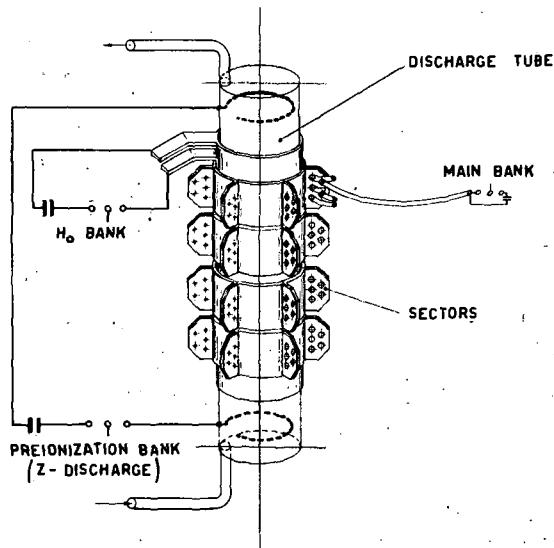


FIG. 1. Schematic diagram of the discharge tube and the electrical assembly

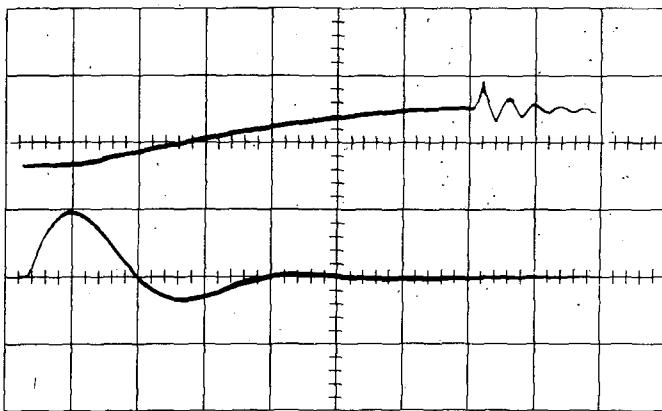


FIG. 2. Timing of the banks (upper trace, bias and main bank currents; lower trace, preionization current. Time scale: 10 μ sec/div.)

TABLE I. Details of the rapid condenser bank Cariddi

TABLE-1- Details of the rapid condenser bank Cariddi

Number of sectors	6
Number of sections	4
Number of condenser per sector per section	5
Total capacitance	$120 \mu F$
Charging voltage V_C	25, 30 KV
Equivalent capacitance	$3.33 \mu F$
Inductance of multi sector coil	$85 m\mu H$
Equivalent inductance of external circuit	$102 m\mu H$
Period	$4.95 \mu sec$
Electric field inner surface of the tube	$620, 745 V/cm$

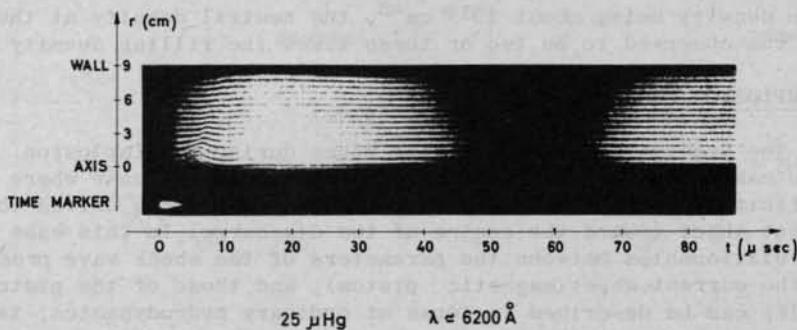


FIG. 3. Streak interferogram of preionizing discharge (time resolution = 1 μ sec)

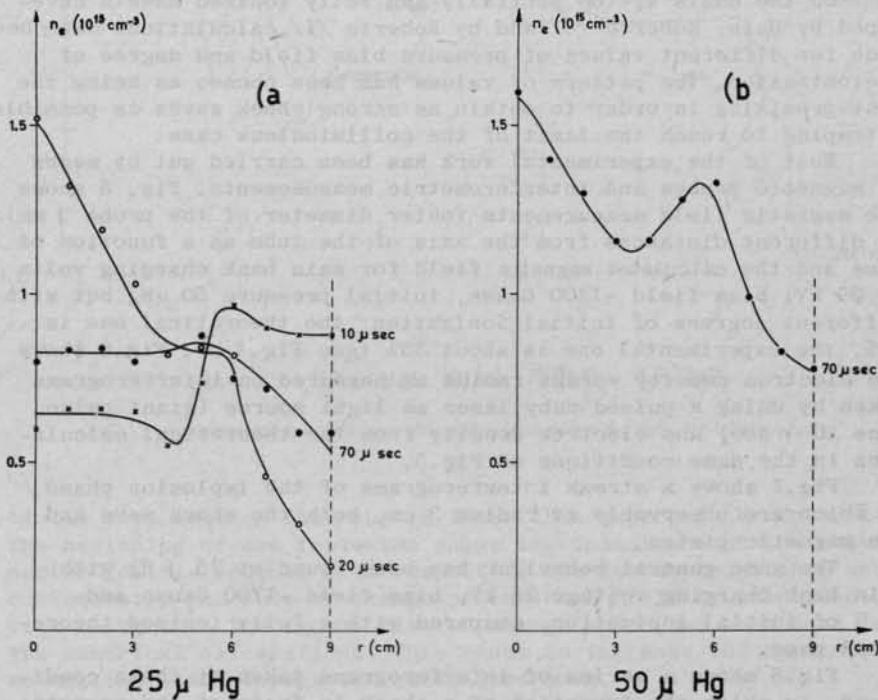


FIG. 4. Preionization electron density versus the radius, measured at different times and pressures

tube has been tested by taking Schlieren and Shadowgraph photographs (using a pulsed ruby laser as light source); the plasma is quite homogeneous at the time chosen, strictly speaking, the inhomogeneities are below the sensitivity limit of the optical methods used.

As regards the measurement of the neutral atom density distribution it must be pointed out that only near the wall are the density variations large enough to be detectable, the minimum measur-

rable density being about 10^{14} cm^{-3} , the neutral density at the wall was observed to be two or three times the filling density.

4. IMPLOSION PHASE

The sequence of events taking place during the implosion phase can be easily described only in the idealized case where in a infinitely conducting plasma a constant $j \times B$ force drives the current sheet toward the centre of the discharge. In this case the relationships between the parameters of the shock wave preceding the current sheet(magnetic piston), and those of the piston itself, can be described in terms of ordinary hydrodynamics, taking possibly in account the convergence effects due to cylindrical geometry. Unfortunately in practice one does not reach the above mentioned limit case: the gas is only partially ionized, conductivity is finite and the driving field is not constant.

On the basis of the partially and fully ionized models developed by Hain, Roberts /6/ and by Roberts /7/ calculations have been made for different values of pressure bias field and degree of preionization. The pattern of values has been chosen as being the most promising in order to obtain as strong shock waves as possible, attempting to reach the limit of the collisionless case.

Most of the experimental work has been carried out by means of magnetic probes and interferometric measurements. Fig. 5 shows the magnetic field measurements (outer diameter of the probe 3 mm) at different distances from the axis of the tube as a function of time and the calculated magnetic field for main bank charging voltage 25 kV, bias field -1700 Gauss, initial pressure $50 \mu\text{Hg}$ but with different degrees of initial ionization: the theoretical one is 55%, the experimental one is about 35% (see Fig.4 b). Fig.6 shows the electron density versus radius as measured on interferograms taken by using a pulsed ruby laser as light source (giant pulse time 10 nsec) and electron density from the theoretical calculation in the same conditions of Fig.5.

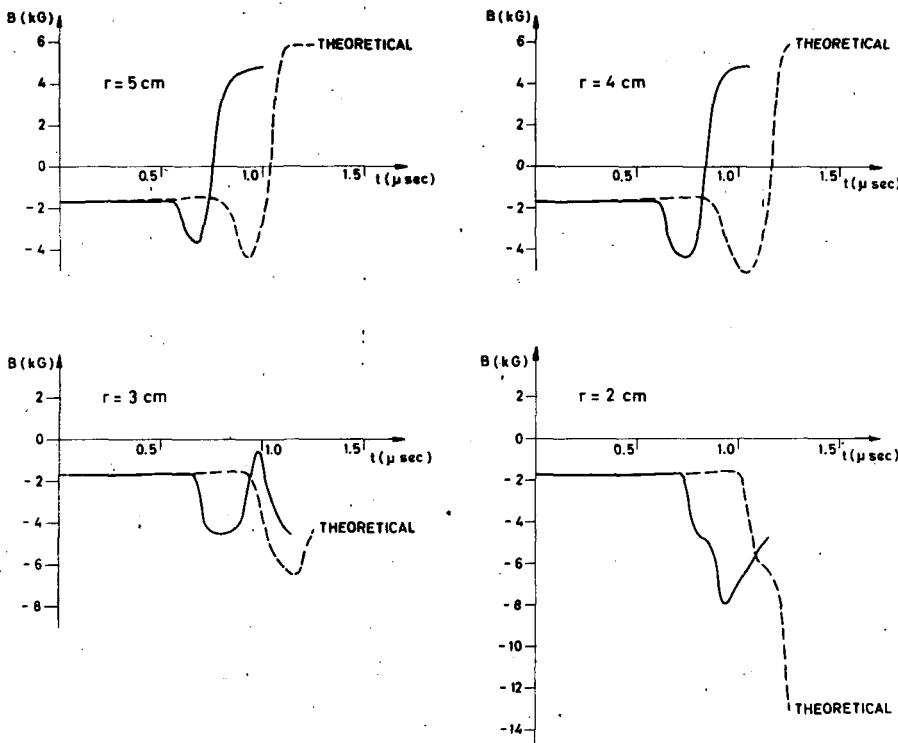
Fig.7 shows a streak interferograms of the implosion phase in which are observable at radius 3 cm, both the shock wave and the magnetic piston.

The same general behaviour has been found at $25 \mu\text{Hg}$ with main bank charging voltage 25 kV, bias field -1700 Gauss and 45 % of initial ionization, compared with a fully ionized theoretical case.

Fig.8 shows a series of interferograms taken at these conditions, in which the formation of a shock in front of the magnetic piston can be observed.

The interferometric and magnetic probe measurements are in good agreement (within the experimental errors) as regards the compression ratio and the difference in time with respect to the theoretical curves. The discrepancy observed between theoretical and measured curves can be explained as follows.

The experimental degree of ionization has been obtained as the ratio of the experimental electron density and the filling neutral density. The degree of ionization actually present may be larger as the neutrals during the preionizing discharge tend to be concentrated near the walls, and the actual density of heavy par-



$50 \mu\text{Hg}$ BIAS FIELD - 1.7 kG

FIG. 5. Experimental and theoretical magnetic field versus the time, at different radius

ticles over most of the tube is lower than expected. Moreover at the beginning of the implosion phase the inductance of the multi-sector coil is reduced with respect to the vacuum inductance and consequently the rate of change of external field is increased with respect to the vacuum rate of change which has been used in the numerical calculations. This tends to increase the implosion velocities with respect the calculated ones.

5. SHOCK STRUCTURE

In order to reach a collisionless situation we operated at a pressure of $25 \mu\text{Hg}$ which is the minimum pressure which gives a sufficient reproducibility in the measurements and at a bias field of -850 Gauss which gives a high Mach number and at the same time produces a well formed shock front before the effect of convergence is important. Fig.9 shows the magnetic field at a radius of 2.5 cm from the axis as a function of the time in which the shock front, well separated from the magnetic piston is clearly evident. Fig.10 shows the development of the wave from the radius 4 cm to the ra-

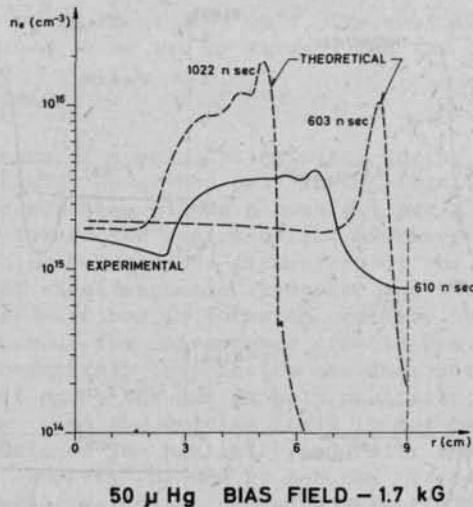


FIG. 6. Experimental radial distribution of the electron density compared with the theoretical curve calculated at different times

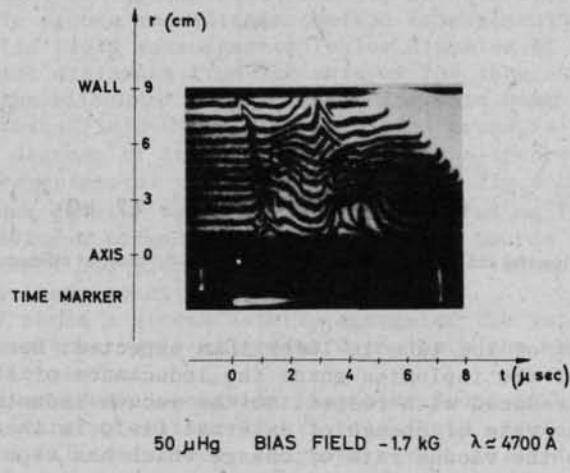


FIG. 7. Streak interferogram of the implosion phase (time resolution = 0.1 μ sec)

dius 2.5 cm from the axis. The thickness of the shock front is found to be 8 mm.

During this time interval, both the magnetic field intensity and the speed of the shock front are constant and we can consider it as a plane stationary wave. This fact has also been proved by measuring the shock and piston velocity from a sequence of Schlieren photographs taken on successive discharges.

Thus we can write the momentum balance equation at the piston:

$$\frac{H^2}{8\pi} = \frac{n_s}{n_s - n_p} n_1 k T + \left(\frac{n_s}{n_s - n_p} \right)^2 \frac{H_0^2}{8\pi}$$

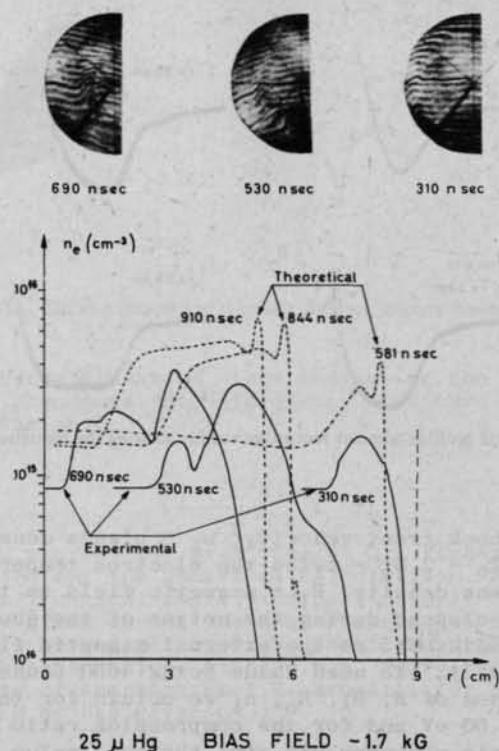


FIG. 8. Theoretical curves and experimental measurements of the electron densities obtained from the interferograms shown in the upper side

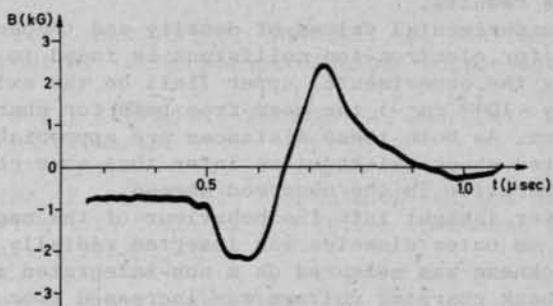


FIG. 9. Magnetic field profile of the shock wave and the magnetic piston

and the relationships

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{n_1}{n_0} = \frac{v_s}{v_s - v_p}$$

where:

H = external magnetic field; H_0 = bias field; v_p = magnetic piston

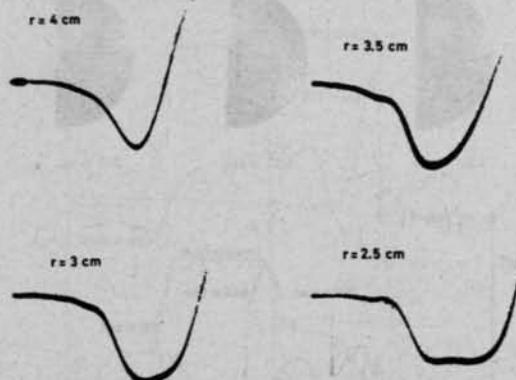


FIG. 10. Magnetic field profiles taken at successive radius, showing the formation of the shock wave

velocity; v_s = shock front velocity; n_1 = plasma density on the shock; $T = T_i + T_e = 2 T_e$ = twice the electron temperature; n_0 = initial plasma density; H_1 = magnetic field on the shock.

In the time elapsed during the motion of the shock front from radius 4 cm to radius 2.5 cm the external magnetic field does not change significantly: the mean value being 4650 Gauss. Using the experimental values of H , H_1 , H_0 , n_1 we obtain for the electron temperature $T_e = 50$ eV and for the compression ratio the value 2.5. The interferometric measurements give the same value for the compression ratio and also a shock thickness of about 3 mm, which compares very well with the probe measurements considering the experimental errors. Also Schlieren and Shadowgraph measurements gave comparable results.

From the experimental values of density and temperature the mean free path for electron-ion collisions is found to be 20 mm and using the experimental upper limit on the existing neutral density (10^{14} cm⁻³) the mean free path for charge exchange is $\lambda_{in} \gtrsim 25$ mm. As both these distances are appreciably larger than the measured shock thickness we infer that some collisionless mechanism is operative in the observed shocks.

For a better insight into the behaviour of the magnetic field, a probe of 1.3 mm outer diameter was inserted radially and the same shock thickness was measured on a non-integrated signal.

Moreover bank charging voltage was increased from 25 to 30 kV. Apart from a faster behaviour of all the implosion phase, magnetic probe and interferometric results show the existence of wavelets in front of the shock and on the shock itself. Fig. 11 shows this feature which may be related to recent observations of oscillations in shock transitions /8 - 12/.

6. CONCLUSIONS

The measurements reported show the presence of strong shock waves during the radial implosion of a fast theta pinch. At low pressures the shock thickness is appreciably smaller than the

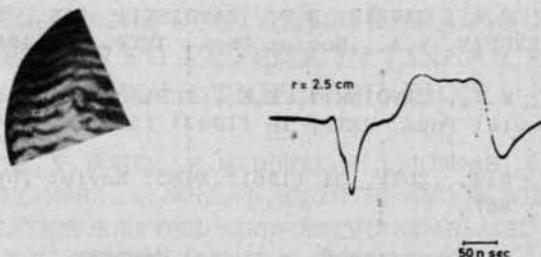


FIG. 11. Electron density and magnetic field structure of the shock wave

relevant collision distances, thus indicating the existence of collisionless phenomena. High frequency structure is observed in the shock transition.

ACKNOWLEDGMENTS

We wish to express our gratitude to D.L.Fisher and the Culham group who carried out the numerical calculations. We are very grateful to be the technical staff, and particularly to Mr.L. Marchegiani, for the aid given during the measurements. We had the benefit of some appreciable work given by Dr.G. Gatti and Mr.C. Bellecci, and of many valuable discussions with Dr.S.E. Segre. We are glad to have this opportunity of thanking Prof.B. Brunelli for his advice and for facilities which he has given us.

REFERENCES

- /1/ ALLEN, J.E., BARTOLI, C., BRUNELLI, B., NATION, J.A., RUMI, R. and TOSCHI, R.. 1962, Nuclear Fusion, Supplement Part 2, 621.
- /2/ ALLEN, J.E., GATTI, G., MARTONE, M. and RUMI, B., C.N.E.N. Report RT/FI(63)48.
- /3/ BERTOLINI, E., BRUNELLI, B., GRATTON, R. and SEGRE, S., Proc. VIth Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, 2, 553 (Paris, 1963).
- /4/ POST, D., J.O.S.A., 48 (1958) 309.
- /5/ ASCOLI-BARTOLI, U., DE ANGELIS, A. and MARTELLUCCI, S., Nuovo Cimento, 18 (1960) 1116.
- /6/ HAIN, K., HAIN, G., ROBERTS, K.V., ROBERTS, S.J. and KÖPPENDÖRFER W., Naturforschung, 15 a (1960) 1039.
- /7/ ROBERTS, K.V., J.Nuclear Energy, Part C, 5 (1963) 365.
- /8/ BABYKIN, M.V., ZAVOISKII, E.K., RUDAKOV, L.I. and SKORYUPIN, V.A., Nuclear Fusion, Suppl. 3, 1073 (1962).

- /9/ BABYKIN, M.V., GAVRIN, P.P., ZAVOISKII, E.K., RUDAKOV, L.I. and SKORYUPIN, V.A., Soviet Phys. JETP, 16 (1963) 295, 1092.
- /10/ BABYKIN, M.V., ZAVOISKII, E.K., RUDAKOV, L.I. and SKORYUPIN, V.A., Soviet Phys. JETP, 16 (1963) 1391.
- /11/ SAGDEEV, R.Z., ZhTF, 31 (1961) 1185; Soviet Phys. Tech. Phys., 6 (1962) 867.
- /12/ VEDENOV, A.A., VELIKHOV, A.A. and SAGDEEV, R.Z., Nuclear Fusion, 1 (1961) 82.

DISCUSSION

E. HINTZ: At what Mach number did you carry out your measurements?

U. ASCOLI-BARTOLI: The Mach number was estimated to be in the range 2.8 to 3.3.

STABLE AND UNSTABLE BEHAVIOUR OF PREHEATED PLASMA IN LINEAR AND CUSPED THETA PINCHES

R.J. BELITZ, P. BOGEN, K.H. DIPPEL, H.L. JORDAN, E. KUGLER,
A. MIYAHARA, P. NOLL, J. SCHLÜTER AND H. WITULSKI
ASSOCIATION EURATOM-KERNFORSCHUNGSAKLAGE, JÜLICH,
FEDERAL REPUBLIC OF GERMANY.

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

STABLE AND UNSTABLE BEHAVIOUR OF PREHEATED PLASMA IN LINEAR AND CUSPED THETA PINCHES. Experiments on the behaviour of the magnetic compression of preheated hydrogen plasmas in theta pinches of linear and spindle-cusped geometries have been made with the following devices: 1) 5kJ linear theta pinch, coil diameter 4.5 cm, length 15 cm, $B_{\max} = 50 \text{ kG}$, $T_{\frac{1}{2}} = 1.5 \mu\text{sec}$; 2) 600-kJ linear theta pinch, coil diameter 10.5 cm, length 128 cm, $B_{\max} = 100 \text{ kG}$, $T_{\frac{1}{2}} = 17 \mu\text{sec}$; 3) 10-kJ spindle cusped theta with $B_{\max} = 45 \text{ kG}$ at point and line cusps, radius 5.2 cm, length 8.5 cm. They all have provisions for pre-ionization by a capacitively-coupled low-power RF transmitter, magnetic bias field of variable strength and polarity, preheating by pulsed oscillating electrodeless ring discharge, and compression of the plasma by a fast capacitor bank. Observations have been made by using smear and framing camera photography, optical interferometry with Mach-Zehnder and differential interferometers, spectroscopy in the visible and the soft X-ray regions, and magnetic probes. These methods give information on plasma structure, on density profiles, on the distribution of electron and ion-Doppler temperatures and their development in time.

Both stable and unstable plasmas were observed in linear devices. By variation of pressure, bias field, preionization, preheating, and impurity concentration, and by disturbing the symmetry of the discharge tube, information on stable and unstable parameter regions could be obtained. Deviations from the symmetry of the plasma column can occur because of: (1) drifts connected with spatial inhomogeneities of the confining magnetic field; (2) axial motions and contractions in plasmas with trapped antiparallel fields, and rarefaction waves due to end losses; (3) rotations, and deformation oscillations of the cross-section of the plasma; and (4) star-shaped instabilities and eruptions.

While drifts and axial motions are directly connected with magnetic field configurations and relatively insensitive to other parameters, cross-sectional distortions and eruptions depend critically on the initial conditions of the plasma, for example preionization, preheating, inhomogeneities of the conductivity, rate of compression, and very sensitively on small changes in impurity concentration. Under apparently stable conditions reasonably good agreement could be obtained between the maximum values of Doppler temperature for ions, electron temperature and mean temperature taken from pressure balance in high- β plasmas obtained by the 5 kJ linear theta pinch. First results obtained in the spindle cusp experiment indicate a stable behaviour of the plasma up to initial gas pressures of 0.5 Torr H₂.

COMPORTEMENT DE PLASMAS PRÉCHAUFFÉS STABLES ET INSTABILÉS SOUMIS À DES STRICTIONS AZIMUTALES LINÉAIRES ET CUSPIDÉES. Le comportement de plasmas d'hydrogène préchauffés soumis à une compression magnétique dans des strictions azimutales de géométrie linéaire et cuspidée a été étudié dans les cas suivants: 1. Striction azimutale linéaire de 5 kJ, bobine 4,5 cm de diamètre, longueur 15 cm, $B_{\max} = 50 \text{ kG}$, $T_{\frac{1}{2}} = 1,5 \mu\text{s}$; 2. Striction azimutale linéaire de 600 kJ, bobine 10,5 cm de diamètre, longueur 128 cm, $B_{\max} = 100 \text{ kG}$, $T_{\frac{1}{2}} = 17 \mu\text{s}$; 3. Striction azimutale cuspidée de 10 kJ, $B_{\max} = 45 \text{ kG}$ aux rebroussements ponctuels et linéaires, rayon 5,2 cm, longueur 8,5 cm. Tous les dispositifs assurent la préionisation par un transmetteur haute fréquence de faible puissance à couplage capacitif; un champ magnétique de polarisation de grandeur et de polarité variables; le préchauffage par décharge toroïdale oscillante et pulsée sans électrode; la compression du plasma par une batterie de condensateurs rapides. Des observations ont été effectuées par diverses méthodes: caméras à miroir tournant et à cadrage, interférométrie optique à l'aide d'interféromètres Mach-Zehnder et d'interféromètres différentiels, spectroscopie dans le domaine visible et dans le domaine des rayons X mous et sondes magnétiques. Ces méthodes donnent des indications sur la structure du plasma,

les profils de densité, les températures des électrons et des ions données par l'effet Doppler ainsi que leur évolution dans le temps.

Des plasmas stables et des plasmas instables ont été observés dans des dispositifs linéaires. En faisant varier la pression, le champ de polarisation, la préionisation, le préchauffage et la concentration des impuretés et en modifiant la symétrie du tube à décharge, il a été possible d'obtenir des renseignements sur les régions à paramètres stables et instables. Des écarts par rapport à l'axe de symétrie de la colonne de plasma peuvent avoir les causes suivantes: 1. mouvements de dérive liés à des inhomogénéités spatiales du champ magnétique de confinement; 2. mouvements et contractions axiales dans des plasmas à champs antiparallèles piégés, et ondes de rarefaction dues à des pertes terminales; 3. rotations, et oscillations de déformation de la section transversale du plasma; 4. éruptions et instabilités en étoile.

Les dérives et mouvement axiaux sont directement en rapport avec les configurations des champs magnétiques et relativement indépendants des autres paramètres, mais les déformations et éruptions dans la section transversale du plasma dépendent de manière critique de l'état initial du plasma, c'est-à-dire de conditions telles que préionisation, préchauffage, inhomogénéités de la conductivité, taux de compression, et très sensiblement de faibles modifications de la concentration en impuretés. Dans des conditions apparemment stables, on a pu obtenir en mesurant l'effet Doppler une assez bonne concordance des valeurs maximales de la température des ions avec la température des électrons et la température moyenne, cette dernière étant donnée par l'équilibre des pressions régnant dans des plasmas à β élevé produits par le dispositif à striction azimutale linéaire de 5 kJ. D'après les premiers résultats de l'expérience sur la striction cuspidée, il semble que le plasma ait un comportement stable jusqu'à des pressions initiales de gaz de 0,5 mTorr.

УСТОЙЧИВОЕ И НЕУСТОЙЧИВОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАГРЕТОЙ ПЛАЗМЫ В ТЕТА-ПИНЧ РАЗРЯДАХ С ЛИНЕЙНОЙ И АНТИПРОБКОВОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ. Эксперименты по исследованию магнитного сжатия предварительно нагретой водородной плазмы в тета-пинч разряде при линейной и антипробковой пространственной геометрии проводились на следующих установках: 1. Линейный тета-пинч разряд при 5 кдж. катушка 4,5 см φ, длина 15 см, $B_{\max} = 50$ кГс, $T_1 = 1,5$ мксек. 2. Линейный тета-пинч разряд при 600 кдж., катушка 10,5 см φ, длина 128 см, $B_{\max} = 100$ кГс, $T_1 = 17$ мксек. 3. Тета-пинч разряд в пространственной антипробковой геометрии при 10 кдж с $B_{\max} = 45$ кГс на оси вершинах и в области щели, радиус 5,2 см, длина 8,5 см. На всех установках приспособлены: предварительная ионизация с помощью высокочастотного генератора малой мощности с емкостной связью, магнитное поле смещения с переменной напряженностью и полярностью, предварительный нагрев с помощью импульсного колебательного безэлектродного кольцевого разряда, сжатие плазмы с помощью быстродействующей конденсаторной батареи. Для наблюдений использовались: Фотографирование разряда с непрерывной и кадровой разверткой во времени, оптическая интерферометрия с помощью интерферометра Маха-Цендера и дифференциального интерферометра, спектроскопия в видимой области и в области мягких рентгеновских лучей и магнитные зонды. Эти методы дают информацию о структуре плазмы, о профилях плотности, о распределении электронных и доплеровских ионных температур и их изменении во времени.

В установках с линейной геометрией наблюдались как устойчивые, так и неустойчивые состояния плазмы. путем изменения давления, поля смещения, предварительной ионизации, предварительного нагрева и концентрации примесей и путем нарушения симметрии разрядной трубки оказалось возможным получить информацию об областях с устойчивыми и неустойчивыми параметрами. Отклонения от симметрии плазменного столба могут иметь место из-за: 1) смещений, связанных с пространственной неоднородностью удерживающего магнитного поля, 2) осевых движений и сжатий в плазме с захваченным антипараллельным полем и волн разрежения из-за потерь на концах, 3) вращений и деформационных колебаний поперечного сечения плазмы, 4) звездообразной неустойчивости и извержений.

В то время как смещения и осевые движения непосредственно связаны с конфигурацией магнитного поля и сравнительно нечувствительны к другим параметрам, искажения сечения и извержения решающим образом зависят от первоначального состояния плазмы, т.е. предварительной ионизации, предварительного нагрева, неоднородностей проводимости, скорости сжатия, и очень чувствительны к небольшим изменениям концентрации примесей. При, по-видимому, стабильных условиях в прямом тета-пинче с энергией 5 кдж оказалось возможным получить достаточно хорошее согласие между максимальными значениями температуры ионов и электронов найденных из доплер-эффекта и средней температурой, полученной из баланса в плазме с высоким значением β . Первые результаты, полученные на установке с антипробковой геометрией, указывают на стабильное поведение плазмы до начальных давлений газообразного водорода в 0,5 тор.

COMPORTAMIENTO DE PLASMAS PRECALENTADOS, ESTABLES E INESTABLES, SOMETIDOS A CONTRICCIONES AZIMUTALES DE GEOMETRIA LINEAL Y CUSPIDAL. Los autores investigaron el efecto de la

compresión magnética sobre plasmas de hidrógeno precalentados en constricciones azimutales de geometría lineal y cuspidal. Los experimentos se efectuaron en las siguientes condiciones: 1. Constricción azimutal lineal de 5 kJ, bobina de diámetro 4,5 cm, longitud 15 cm, $B_{\max} = 50 \text{ kG}$, $T_{1/2} = 1,5 \mu\text{s}$; 2. Constricción azimutal lineal de 600 kJ, bobina de diámetro 10,5 cm, longitud 128 cm, $B_{\max} = 100 \text{ kG}$, $T_{1/2} = 17 \mu\text{s}$; 3. Constricción azimutal en forma de cúspide, 10 kJ con $B_{\max} = 45 \text{ kG}$ en cúspides puntiformes y lineales, radio 5,2 cm, longitud 8,5 cm. Todos los dispositivos aseguran: la preionización mediante un transmisor de radio-frecuencia de baja potencia, acoplado capacitivamente; un campo magnético de polarización, de intensidad y polaridad variables; el precalentamiento mediante una descarga toroidal oscilante y pulsada, obtenida sin electrodos; la compresión del plasma con ayuda de una batería de condensadores rápidos. Los autores realizaron observaciones aplicando diversos métodos: fotograffa con aparatos de espejo giratorio y de encuadre, interferometría óptica con interferómetros Mach-Zehnder y diferencial, espectroscopia en las zonas visible y de rayos X blandos, y empleo de sondas magnéticas. Estos métodos suministran información sobre la estructura del plasma, sobre los perfiles de densidad, sobre la distribución de temperaturas de los electrones y iones dadas por efecto Doppler, y sobre su evolución en el tiempo.

Los autores observaron plasmas estables e inestables en los dispositivos lineales. Modificando la presión, el campo de polarización, la preionización, el precalentamiento y la concentración de impurezas, y alterando la simetría del tubo de descarga, pudieron obtener información sobre las zonas de parámetros estables e inestables. Las asimetrías de la columna de plasma pueden aparecer debido a: 1) movimientos de deriva vinculados a heterogeneidades espaciales del campo magnético de confinamiento; 2) movimientos y contracciones axiales de los plasmas con campos antiparalelos atrapados, y ondas de rarefacción debidas a pérdidas terminales; 3) rotaciones y oscilaciones de deformación de la sección transversal del plasma; 4) inestabilidades y erupciones en forma de estrella.

Mientras las derivas y los movimientos axiales guardan una relación estrecha con las configuraciones de los campos magnéticos y son relativamente independientes de los otros parámetros, las deformaciones y las erupciones de la sección transversal dependen en grado crítico del estado inicial del plasma, es decir, de condiciones tales como la preionización, precalentamiento, heterogeneidades de la conductividad, velocidad de compresión y, en medida muy sensible, los pequeños cambios en la concentración de impurezas. En condiciones aparentemente estables, los autores obtuvieron por mediación del efecto Doppler una concordancia razonable de los valores máximos de la temperatura de los iones con la temperatura de los electrones y la temperatura media, calculada esta última a partir del equilibrio de presiones que reina en plasmas de β elevado, obtenido en el dispositivo de construcción azimutal lineal de 5 kJ. De acuerdo con los primeros resultados obtenidos del experimento relativo a la construcción cuspidal, el comportamiento del plasma es al parecer estable hasta presiones iniciales de gas de 0,5 Torr.

1. Introduction

The theta pinch programme at the Kernforschungsanstalt Jülich has dealt for a number of years with the properties of magnetically compressed and heated plasmas. Plasma preionized by a radio frequency discharge, preheated by an electrodeless ring discharge, with or without a magnetic bias field, is used as initial plasma for fast magnetic compression /1/. These experiments have been made in different geometries, especially in straight linear and in cusp geometries /2/.

Lately spectroscopic observations in the soft x-ray region and time-resolved optical interferometric techniques have given quantitative information on space-resolved density and electron temperature distributions with a high precision.

Measurements have been performed with the following theta pinches:

1. 5 kJoule linear, coil diameter 4.5 cm, length 15 cm, $B_{\max} = 50 \text{ kGauss}$,
 $T/2 = 1.50 \mu\text{sec}$,
2. 5 kJoule linear, identical with 1.,

3. 600 kJoule linear, coil diameter 10.5 cm, length 128 cm, $B_{\max} \approx 100$ kGauss,
 $T/2 = 17 \mu\text{sec}$,

4. 10 kJoule spindle cusp theta pinch with $B_{\max} = 45$ kGauss at point and
line cusps, coil diameter 10.4 cm, length 8.5 cm.

All devices have provisions for: 1. preionization by a capacitively coupled low-power rf transmitter; 2. magnetic bias field of variable strength and polarity; 3. preheating by a pulsed electrodeless ring discharge; and 4. compression of the plasma by a fast capacitor bank.

Observations have been made using smear and framing camera photography, optical interferometry with Mach-Zehnder and differential interferometers, spectroscopy in the visible and the soft x-ray regions, and magnetic probes.

2. Preheating and Magnetic Bias Field

It is well known that reproducibility, homogeneity and low impurity level in a theta pinch require a good preheating of an initial plasma that was already preionized. As one of the more efficient methods an oscillating electrodeless ring discharge has been used, which is produced by discharging low inductance capacitors through the theta pinch coil. This has been done both in devices 1.-3. and in the Cusp Experiment 4. Measurements by magnetic probes in the Cusp Experiment first have indicated that each full wave of the preheating discharge produces a closed magnetic field configuration (that is, cusp shaped) that traps a certain amount of plasma and stays for some time [3], (Fig. 1). Consecutive periods deposit new layers and by this process an onion-peel structure of closed magnetic field configurations with trapped plasma can be produced. Due to magnetic diffusion these shells disappear later, the magnetic energy of the field being transformed into kinetic energy of the plasma. This way the initial plasma is preheated, and for several periods of the preheating discharge kept away from the walls. Temperatures between 2 and 6 eV have been obtained [1, 2]. In order to control the overall magnetic field configurations, a magnetic bias field has to be superimposed during the preionization or the preheating phase, allowing such extremes as the closed line configuration of the reverse field theta pinch or the low- β theta pinch with trapped parallel field.

3. Phases of the Main Compression

The compression of the preheated plasma by the rapidly rising magnetic field of the main discharge normally produces a radially converging shock wave in a homogeneous linear device or more complicated wave forms in the cusp case. The shock front is followed by the plasma which forms a more or less well-defined current carrying outer interface towards the magnetic field. Thickness and structure of this boundary layer depend on the preheating and on the speed of the build-up of the compressing field. By multiple reflection and collisions apparently the ordered motion of the shock front is destroyed and the energy dissipated. This "shock heating" leads to temperatures of the order of 10^6 degrees K. During this implosion phase the trapped magnetic flux from the bias field and the preheating discharge is compressed and largely conserved. This may even be true for the onion structure of the preheating discharge (see above), as radial density profiles obtained lately by unfolded side-on interferometer measurements suggest (Fig. 2).

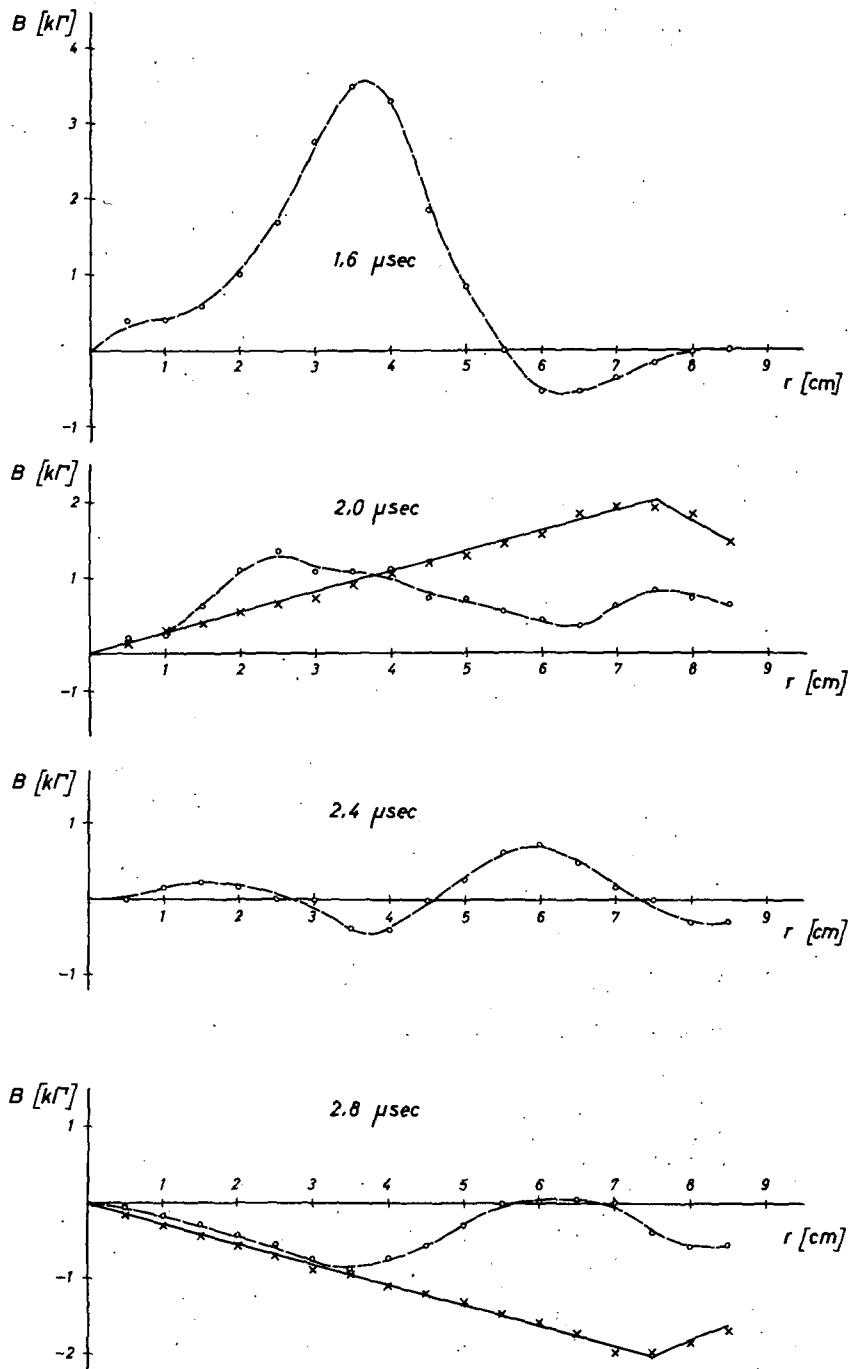


FIG. 1. Magnetic field in the midplane between the cusp coils from 1.6 to 2.8 μ sec after switching of the preheating discharge. (The distribution of the magnetic field along the axis of the cusp coils and under 45° is similar.)

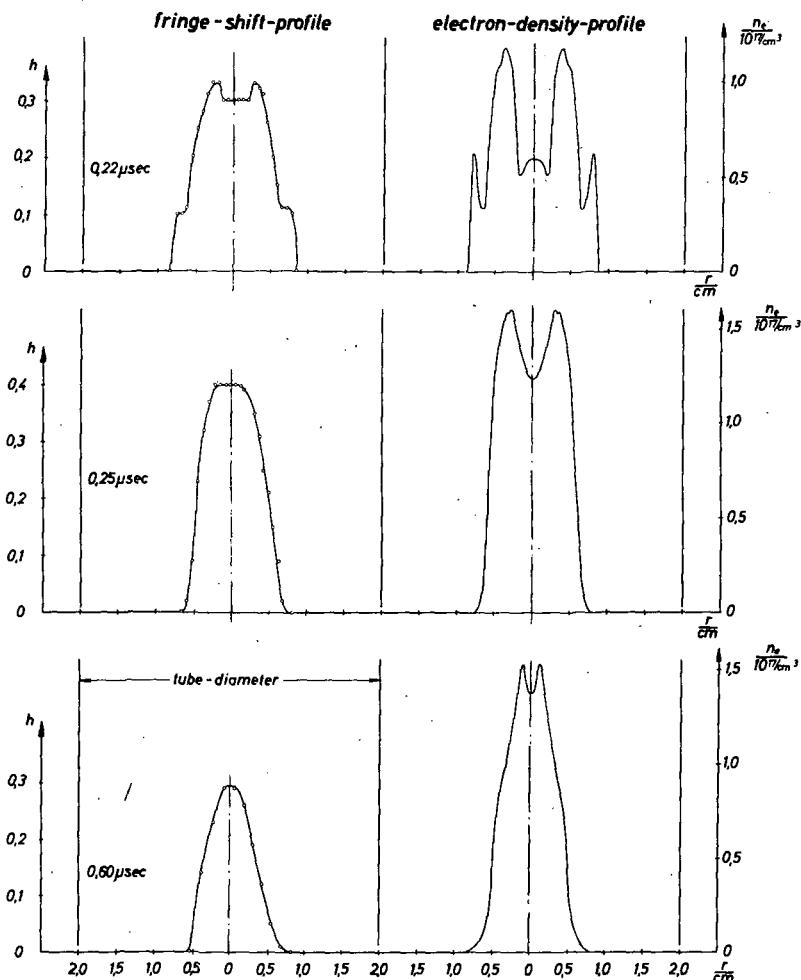


FIG. 2. Fringe shift profiles and calculated profiles of the electron density (experiment 1, 250 mTorr H₂, antiparallel bias field)

The implosion phase is followed by radial oscillations of the plasma column superimposed on a slow adiabatic compression. The oscillation period can be used for the determination of the line density of the mass. A detailed comparison between line densities determined by this method with line densities obtained by side-on optical interferometry has been made by Dippel /4/ and shows rather good agreement (Fig. 3). The picture shows the later phase, the earlier dynamic phase being more complicated. A trend from a shell to a homogeneous distribution may be noticed.

The oscillations die out after a while due to damping and the adiabatic compression may continue. During this phase the plasma is normally lost by streaming out of the ends of the system. The rate depends on the temperature, on the field configuration, on the density and on the amount of trapped parallel magnetic flux.

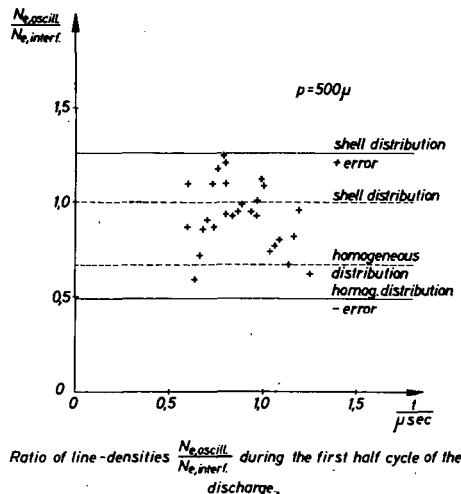


FIG. 3. Ratio of line densities (N_e , oscill.)/(N_e , interf.) as a function of time (experiment 1)

Loss rates can be taken from the line density versus time curves obtained by side-on interferometry (Fig. 4). The overshoot over the mean density shortly after the implosion is connected with axial motions.

4. Unstable and Stable Region of Linear Theta Pinches

Both unstable and stable plasmas have been observed in linear devices. Deviations from the initial symmetry of the plasma column can occur due to

- a) drifts connected with spatial inhomogeneities of the magnetic field,
- b) axial motions, and contractions in the case of antiparallel fields or rarefaction waves due to end losses,
- c) rotations,
- d) cross-sectional distortions, regular star-shaped instabilities and irregular plasma eruptions.

Whereas drifts and axial motions are directly connected with the magnetic field configuration and relatively insensitive to other parameters, cross-sectional distortions and eruptions depend critically on the initial conditions of the plasma.

The stability behaviour has been studied by end-on interferometry with infinite fringe width, with a Mach-Zehnder interferometer on experiment 1, and a differential interferometer on 3.. Time resolution was obtained by smear cameras, Kerr cells and image converters.

The observations cover the range from 25 - 500 m Torr H₂ (and partly for D₂) initial pressure, the influence of preionization, preheating, bias field, peak compression field, impurity concentration and degree of disturbance of the tube symmetry.

The results are briefly as follows:

1. Almost no instabilities could be observed during the initial implosion at the outer surface. With a trapped parallel magnetic field, incipient instabilities can be detected at the inner surface of the hollow plasma cylinder that disappear later on (Fig. 5).
2. Instabilities of more or less regular star-shaped structure appear around the expansion maximum of the first or following radial oscillations

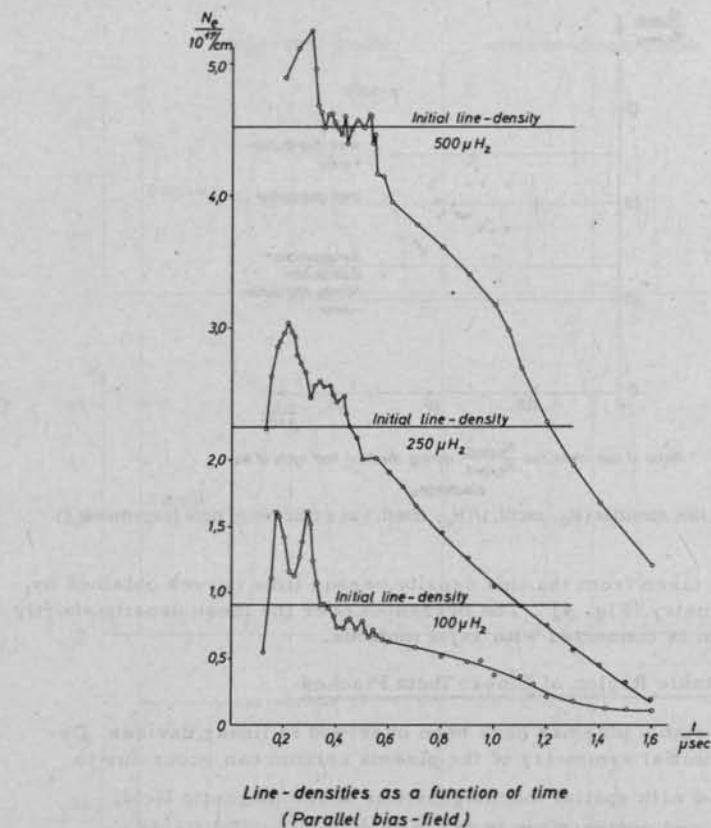


FIG. 4. Line densities as a function of time (experiment 1, parallel bias field)

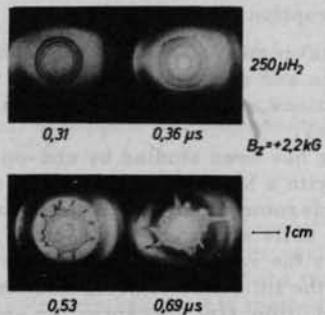


FIG. 5. Time sequence of end-on interferograms taken with a Kerr cell at the indicated times (experiment 1, 250 mTorr H_2 , parallel bias field)

(Fig. 5, 6). Around the compression maximum of the radial oscillation some stabilization of small scale instabilities can be inferred from smear pictures.

3. During the adiabatic compression the "wavelength" of the instability as well as the amplitude normally grow. Towards the end of the halfwave

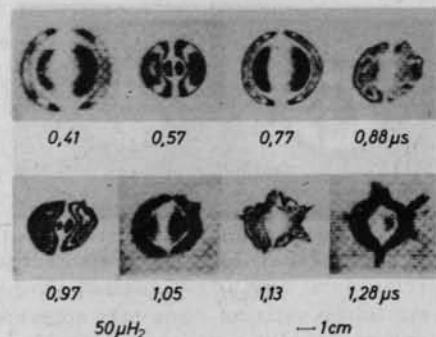


FIG. 6. Differential interferograms end-on taken with an image converter at the indicated times (experiment 3; stored energy reduced to 120 kJ; 1st, 2nd, 3rd compression at 0.55, 0.93, and 1.22 μ sec, resp.)

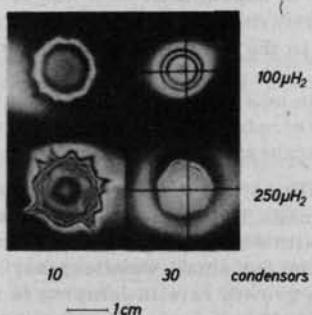


FIG. 7. End-on interferograms taken with a Kerr cell 0.55 μ sec after the beginning of the main discharge at different pressures and stored energies (experiment 1; without bias field, 30 condensors \cong full blank)

the plasma column tends again to rotational symmetry, except for cases where rotations or oscillations start.

4. With increasing initial pressure the degree of instability grows, while the wavelength decreases. An example is shown in Fig. 7.
5. The same figure contains also a typical example for the dependence of the growth rate of instabilities on the amount of stored energy of the bank: The plasma tends to be more stable with growing energy and the wavelength increases. Increased stored energy of the bank means both increased voltage at the coil and increased peak compression field, therefore normally both increased initial and final temperatures.
6. The superposition of a magnetic bias field increases the tendency for instability. With parallel fields the wavelengths of instabilities are smaller than with antiparallel fields. In the parallel case the plasma is also more unstable than in the antiparallel one. Fig. 8 shows two typical examples.
7. The stability of the plasma increases with increased temperature of the preheated initial plasma.
8. The addition of small amounts of impurities (for example 0.1% Ar) increases the tendency for instability at higher pressures (for example 250 m Torr H₂ in experiment 1.). At low initial pressures even 1% Ar seems to have no effect.
9. By disturbing the symmetry of the discharge tube (for example by introducing a glass rod at the wall), instabilities can be stimulated even during

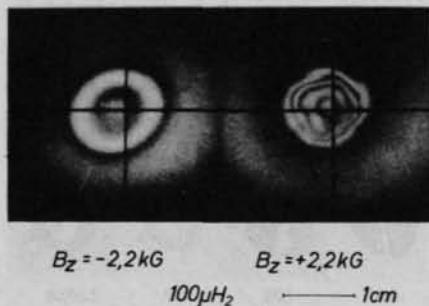


FIG. 8. End-on interferograms taken with a Kerr cell at about 0.7 μsec after the beginning of the main discharge with reversed and parallel bias field (experiment 1)

the implosion phase. In experiment 1. a rod of 1 mm diameter produced only a small disturbance, which disappeared later on, while a rod of 4 mm leads to the break-up of the plasma.

All observations seem to be consistent with an explanation by Rayleigh-Taylor instabilities, as already discussed by Green and Niblett /5/ and Bodin et al. /6/ for unpreheated theta pinches.

Rayleigh-Taylor instabilities are to be expected during phases of inward acceleration of the magnetic field/plasma interface. Without damping the growth rate increases with decreasing wavelength of the disturbance. As damping is more effective for small wavelengths, one obtains a finite wavelength of maximum growth rate if damping is taken into account /5/. At low temperatures resistive damping (field diffusion) is more effective, whereas at higher temperatures ($> 10^5 \text{ K}$) viscous damping becomes dominant. In all described experiments 1.-3. the temperatures soon become so high that only the viscosity has to be considered. The wavelength of maximum growth rate in this case is

$$\lambda_m \approx 2\pi a^{-2/3} v^{2/3} \sim n^{-2/3} T_i^{5/3}$$

where a = inward radial acceleration of the boundary, v = kinematic viscosity, T_i = ion temperature, n = ion density.

Stability is obtained when λ_m is larger than a characteristic length of the plasma, for example the diameter.

This simple theory holds only when λ_m is larger than the mean free path of the ions and the growth time is larger than the ion collision time. In the case of an ion mean free path comparable to the plasma dimensions, the concept of viscosity is no more applicable, but due to momentum transfer over larger distances increased stability is also to be expected.

In a magnetic field the viscosity decreases as soon as the ion Larmor radius becomes smaller than the mean free path.

Radially inward acceleration occurs during the initial implosion and in the radial oscillation phase in the neighbourhood of the expansion maxima (where the curvature in the $r(t)$ diagram points into the plasma).

The absence of observable instabilities during the implosion may be due to the short duration of the radially inward acceleration and the resistive dam-

ping at the initially low temperature. During a large part of the implosion the velocity is almost constant.

Deformations of the inner plasma surface (Fig. 5) shortly before the first compression point to the fact that due to the compression of the trapped field the acceleration vector points again into the plasma.

Instabilities during the oscillation phase are all observed to begin around the expansion maxima, consistent with the above explanation.

The dependence of the growth rate of instabilities on the initial pressure and the stored energy of the bank can be understood by the strong dependence of the viscosity on the (ion) temperature. This temperature is normally larger with a higher compression rate and a smaller initial pressure. The wavelength λ_m correspondingly increases, while the growth rate decreases (cf. Fig. 7). The increased instability in the case of a superimposed magnetic field can be related to the decrease in viscosity due to the finite Larmor radius effect. This effect is enhanced in the parallel field case due to the lower temperature.

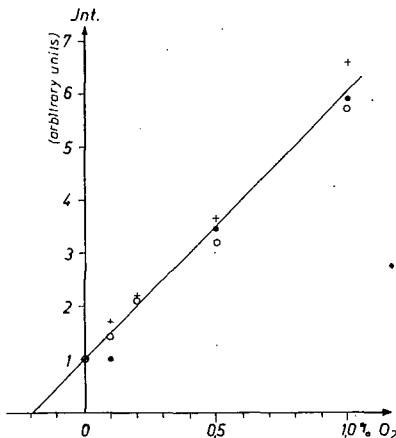
In a similar way the influence of preheating can be interpreted:

With increasing temperature of the preheated plasma the compression field penetrates less and less into the plasma while the heating during the implosion phase becomes more effective. Both effects tend to increase the viscosity and thereby the stability.

The addition of impurities decreases the final temperature. Plasmas with high initial densities and low degree of stability are strongly influenced by the decrease in temperature whereas hot plasmas (obtained at small initial densities) are barely disturbed even by larger amounts of impurities. Growth rates and corresponding wavelengthstaken from the simple theory /5/ are in rather good agreement with observed ones, if the acceleration is taken from the smear pictures and the temperature from the pressure balance and previously measured values.

No, or only negligible, instabilities are observed under optimum preheating conditions with full power operation of the main bank for zero bias field and initial gas pressures below 250 m Torr at experiment 1. and 60 m Torr at experiment 3.

On experiment 2. high- β plasmas free from visible instabilities could be obtained at initial pressures between 0.10 and 0.23 Torr. The impurity concentration was measured by adding known amounts of oxygen to the hydrogen. The equal increase of OV - 2781 Å, OVII - 18.63 Å and OVIII 18.97 Å spectral lines indicates a constant impurity concentration of 0.2% over the whole half cycle (Fig. 9). An analysis of density distribution, electron temperature from the x-ray continuum and Doppler temperature from the CV-spectral lines 2270 Å has been made by Bogen and Schlüter /7/. It could be shown that in the stable phase of the compression the maximum values of the electron temperature, the Doppler temperature (both determined side-on and end-on) and the mean temperature taken from pressure balance agree within rather narrow error limits, the electron temperature lagging behind. The agreement between Doppler temperature and "mean temperature" indicates the absence of gross turbulence and axial motions (see Table I). The agreement between side-on and end-on measurements shows that the velocity distributions are nearly isotropic. Since at the densities measured both electron-electron and ion-ion collision times are short compared to the lifetime of the compressed plasma in the device ($\approx 1/4$ cycle, see Table I) the establishment of an electron and an ion temperature can be expected. The above-mentioned



Maximale Intensitäten der $\text{OV} - 2781 \text{\AA}$ -(+),
 $\text{OVII} - 18.63 \text{\AA}$ -(○) und $\text{OVIII} - 18.97 \text{\AA}$ -(●) Spektrallinien als Funktion der Sauerstoffkonzentration.

FIG. 9. Maximal intensities of the $\text{OV} - 2781 \text{\AA}$ (+), $\text{OVII} - 18.63 \text{\AA}$ (○), and $\text{OVIII} - 18.97 \text{\AA}$ (●) spectral lines as a function of the concentration of oxygen.

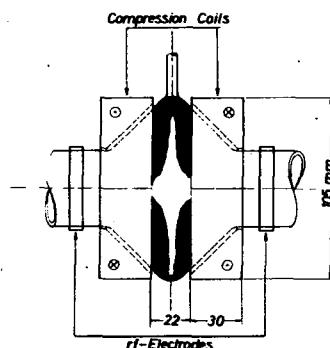


FIG. 10. Image-converter picture of the plasma compressed inside the cusp coils (experiment 4)

result then shows that $T_e \approx T_i \approx T_D$ for the maximum values and that therefore a thermal plasma is observed.

5. Cusp Experiment

In the cusp experiment 4, even at rather high pressures (0.2 - 0.6 Torr) no instabilities can be observed if an effective preionization and preheating are used. The cusped shape of the plasma remains unchanged (Fig. 10) and quiet - apart from the earlier-mentioned oscillations - almost over the full half period of the magnetic field (2 to 2.5 μsec). At electron densities up to $5 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ the electron temperature estimated from the appearance of different impurity lines lies between 20 and 70 eV so far.

TABLE I a) Relaxation times for $T = 1.5 \times 10^6$ °K, $n_e = 3 \times 10^{17}$ cm $^{-3}$.

b) T_e -electron temperature, T_D -temperature derived from Doppler-broadening, $(T_i + T_e)/2\beta$ - mean temperature, n_e -electron-density, t - time delay between start of the main bank and observation. (The estimated errors for temperatures and densities are 25%.)

t_{ee}	t_{DD}	t_{De}	t_{DCV}	$t_{CV\text{ ioniz.}}$
$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-2}$	0.2 μsec

a)

	Pressure [Torr]	T_e [°K]	T_D [°K]	$\frac{T_i + T_e}{2\beta}$ [°K]	n_e [cm $^{-3}$]
D_2	0.23	$1.5 \cdot 10^6$	$1.5 \cdot 10^6$	$1.2 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^{17}$
D_2	0.10	$2.4 \cdot 10^6$	$3.0 \cdot 10^6$	$2.5 \cdot 10^6$	$1.5 \cdot 10^{17}$
H_2	0.23	$1.7 \cdot 10^6$	$2.0 \cdot 10^6$	$1.5 \cdot 10^6$	$2.5 \cdot 10^{17}$
t [μsec]	0.95	0.65	0.75	0.75	

b)

Table I

a) Relaxation times for $T = 1.5 \cdot 10^6$ °K, $n_e = 3 \cdot 10^{17}$

b) T_e -electron temperature, T_D -temperature derived from Doppler-broadening, $\frac{T_i + T_e}{2\beta}$ -mean temperature, n_e -electron density, t -time delay between start of the main bank and observation; The estimated errors for temperatures and densities are 25%.

By means of a power crow-bar arrangement, the period of the magnetic field will be extended up to 25 μsec and the peak field enlarged. It is hoped that longer containment times and higher temperatures can thereby be obtained.

Acknowledgments

The authors wish to express their thanks to Dr. H. Kever and Dr. K. Schindler for many stimulating discussions. They also are indebted to Mr. W. Anger for his advice during the operation of the large theta pinch device. Many thanks are due to Mr. W. Hopmann for his supplying the image converter and the electronic equipment. The collaboration of the engineering and the technical staff engaged in the reported experiments is greatly appreciated.

References

- /1/ a) Jordan, H.L.; b) Beerwald, H. et al.; c) Hintz, E.; d) Bogen, P.; Hintz, E.; e) Kever, H.; Nuclear Fusion, 1962 Supplement, Part 2, 589-616.
- /2/ Arbeitsberichte des Instituts für Plasmaphysik der KFA Jülich 1964 (therein further references).
- /3/ Belitz, H.J. Kugler, E.; Proc. Seventh Internat. Conf. Phenomena in Ionized Gases, Belgrad (1965) to be published.

- /4/ Dippel, K.H., Proc. Seventh Internat. Conf. Phenomena in Ionized Gases, Belgrad (1965) to be published.
- /5/ Green, T.S., Niblett, G.B.F.; Nuclear Fusion 1 (1960) 42-46.
- /6/ Bodin, H.A.B. et al.; Nuclear Fusion 1 (1961) 139-143.
- /7/ Bogen, P., Schlüter, J.; Nuclear Fusion, to be published.

ENERGY DISTRIBUTION OF PARTICLES LEAVING A THETA PINCH

R. L. BINGHAM, L. M. GOLDMAN AND R. W. KILB
GENERAL ELECTRIC RESEARCH LABORATORY,
SCHENECTADY, N.Y., UNITED STATES OF AMERICA

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

ENERGY DISTRIBUTION OF PARTICLES LEAVING A THETA PINCH. Previous measurements of ion energies in theta pinches have involved either the energy distribution of the reaction products or the Doppler shift of impurity ions not forming the bulk of the plasma. We have attempted to obtain a more direct indication of the ion energy in the plasma by measuring the energy distribution of the ions escaping through the mirror. The electrostatic analyser, a 127° focussing type, had a resolution of 1 per cent with the slits used. As the instrument measured only one energy interval at a given setting, it was necessary to use many discharges to examine the whole energy spectrum. The observed raw data were corrected for the focussing effects of the axial field and the charge exchange loss in the passage from the plasma to the detector. The contribution of fast ions other than deuterium was checked by using a magnetic momentum analyser following the energy analyser. No measurable quantity of contaminant was found. Measurements have been made both with and without reversed trapped field at initial deuterium pressures around 0.01 Torr.

The most significant result of the experiment is the broadness of energy distribution suggesting a plasma in which the bulk of the particles are heated, rather than a select few in a far tail. In the zero trapped field cases, both the mean energy and the dispersion of the distribution increased with time up to peak field time. For reversed field cases the heating occurred at a much earlier part of the cycle with the peak of the mean energy occurring well before peak field. The peak energy was 25 per cent greater than for the zero trapped field case. To determine the velocity distribution inside the plasma, we must make an assumption about the energy dependence of the loss. If one assumes the losses are dominated by coulomb collisions, then the mean energy of the ions in the plasma is about 5 keV for a peak field of 44 kG. This is in excellent agreement with the energy derived from the D-³He reaction product rates.

DISTRIBUTION DES PARTICULES SELON L'ENERGIE A LA SORTIE D'UN DISPOSITIF DE STRCTION AZIMUTALE. Jusqu'à présent, pour mesurer les énergies des ions dans les strctions azimutales, il fallait connaître la distribution des produits de la réaction selon l'énergie ou le déplacement par effet Doppler, pour les ions des impuretés ne constituant pas la masse du plasma. Les auteurs se sont efforcés d'obtenir des indications plus directes sur l'énergie des ions du plasma en mesurant la distribution, selon l'énergie, des ions qui s'échappent à travers le miroir. L'analyseur Électrostatisque, un appareil à focalisation de 127°, avait un pouvoir de résolution de 1% avec les fentes utilisées. Comme cet appareil ne mesurait qu'un seul intervalle d'énergie pour un positionnement donné, il a fallu utiliser un grand nombre de décharges pour étudier tout le spectre d'énergie. Les auteurs ont corrigé les données brutes observées pour tenir compte des effets de focalisation du champ axial et de la perte due à l'échange de charge au cours du passage du plasma vers le détecteur. Ils ont contrôlé l'apport d'ions rapides autres que le deutérium en utilisant, à la suite de l'analyseur d'énergie, un analyseur de moment magnétique. Ils n'ont pas trouvé de quantités mesurables d'impuretés. Les mesures ont été effectuées avec et sans champ inversé, à des pressions initiales de deutérium d'environ 0,01 Torr.

Le résultat le plus significatif de l'expérience a été de mettre en évidence la largeur de la distribution selon l'énergie, qui donne à penser que l'on est en présence d'un plasma dans lequel la plus grande partie des particules est chauffée, et pas seulement certaines particules privilégiées appartenant à la queue de la distribution. Dans le cas des champs piégés nuls, l'énergie moyenne comme la dispersion de la distribution augmentaient en fonction du temps jusqu'au moment où le champ atteint son maximum. Dans le cas des champs inversés, le chauffage des particules s'est produit beaucoup plus tôt dans le cycle, l'énergie moyenne accusant un pic bien avant celui du champ. L'énergie maximale était de 25% supérieure à celle observée dans le cas des champs piégés nuls. Pour déterminer la distribution des vitesses dans le plasma, il faut faire une hypothèse quant aux variations de la perte en fonction de l'énergie. Si l'on suppose que les pertes sont déterminées

essentiellement par des collisions de Coulomb, l'énergie moyenne des ions du plasma est d'environ 5 keV pour un champ maximal de 44 kG. Cette valeur concorde parfaitement avec celle du calcul de l'énergie à partir des taux des produits de la réaction D- ^3He .

ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТИЦ, ВЫХОДЯЩИХ ИЗ ТЕТА-ПИНЧА.

Предыдущие измерения энергии ионов в тета-пинчах были связаны с энергетическим распределением продуктов реакции или с допплеровским смещением ионов примесей, не являющихся основной частью плазмы. Мы предприняли попытки получить более непосредственные указания относительно энергии ионов в плазме путем измерения энергетического распределения ионов, уходящих через зеркало. Разрешение электростатического анализатора (фокусирующего типа с углом 127°) с использовавшимися щелями составляло один процент. Поскольку прибор измерял только один энергетический интервал при данной установке прибора, было необходимо использовать много разрядов для изучения всего энергетического спектра. Наблюдавшиеся грубые данные были исправлены с учетом фокусирующих эффектов аксиального поля и потерь при перезарядке во время прохождения из плазмы в детектор. Вклад быстрых ионов, не являющихся ионамидейтерия, проверялся с помощью магнитного импульсного анализатора, расположенного после энергетического анализатора. Не было обнаружено никакого измеримого количества примесей. Были проведены измерения с обратным полем, вморо-женными в плазму и без него при первоначальных давлениях дейтерия приблизительно в 0,01 тор.

Наиболее значительным результатом эксперимента является наличие широкого энергетического спектра. Это указывает, по-видимому, на то, что происходит нагрев основной массы плазмы, а не малой части вдалеке хвоста энергетического распределения. В случаях отсутствия захваченного поля, средняя энергия и ширина распределения увеличивались со временем вплоть до максимума поля. В случае обратного поля нагревание происходило в значительно более ранней части периода, причем средняя энергия достигала своего максимального значения задолго до максимума поля. Максимальная энергия на 25% превышала максимальную энергию в случае нулевого поля, вморо-женного в плазму. Для определения распределения скоростей в плазме необходимо сделать предположение об энергетической зависимости потерь. Если предположить, что на потери преобладающее влияние оказывают кулоновские столкновения, то тогда средняя энергия ионов в плазме составляет приблизи-тельно 5 кэВ для максимального поля в 44 кГ. Это очень хорошо согласуется с энергией, получаемой на основании скоростей продуктов D- ^3He реакции.

DISTRIBUCION ENERGETICA DE LAS PARTICULAS EMERGENTES DE UN DISPOSITIVO DE CONSTRICION AZIMUTAL. Hasta el presente, para medir las energias iónicas en constricciones azimutales era preciso conocer la distribución energética de los productos de la reacción, o bien el desplazamiento por efecto Doppler debido a los iones de impurezas que no constituyen la parte principal del plasma. Los autores han tratado de obtener indicaciones más directas de la energía iónica del plasma, midiendo la distribución energética de los iones que escapan a través del espejo. El analizador electrostático empleado, un aparato enfocable de 127°, permite alcanzar una resolución de 1% con las ranuras empleadas. Como con cada ajuste el instrumento sólo mide un intervalo de energía, fue necesario usar numerosas descargas para estudiar la totalidad del espectro energético. Los datos observados se corrigieron para tener en cuenta los efectos de enfoque del campo axial y la pérdida debida al intercambio de cargas durante el paso del plasma hacia el detector. Los autores verificaron la contribución de iones rápidos distintos del deuterio, empleando un analizador de momento magnético a continua- ción del analizador de energía. No hallaron cantidades medibles de impurezas. Efectuaron las mediciones con y sin campo inverso atrapado, con compresiones iniciales del deuterio del orden de 0.01 Torr.

El resultado más significativo del experimento fue poner en evidencia la amplitud de la distribución energética, que sugiere que se trata de un plasma en el cual se calienta la mayor parte de las partículas y no algunas partículas privilegiadas que pertenecen al extremo de la distribución. En los casos de campo atrapado nulo, tanto la energía media como la dispersión de la distribución aumentaron con el tiempo hasta el momento en que el campo alcanza su máximo. Para los casos de campo inverso, el calentamiento se produjo mucho más al comienzo del ciclo, apareciendo el pico de la energía media antes del pico correspondiente al campo. La energía máxima superó en 25% a la observada en el caso de campo atrapado nulo.

Para determinar la distribución de velocidades en el plasma es preciso formular una hipótesis sobre la variación de las pérdidas en función de la energía. Si se supone que las pérdidas están regidas por los choques coulombianos, la energía media de los iones contenidos en el plasma es del orden de 5 keV para un campo máximo de 44 kG. Este valor concuerda satisfactoriamente con la energía calculada a partir de los productos de la reacción D- ^3He .

1. Introduction

The ion energies produced in energetic θ -pinches have been the subject of much work and interest over the past several years. Previous measurements have involved either the high-energy tail of the distribution, i.e., measurements using the nuclear reaction products[1,2], or doppler shift of radiation from impurity ions[3] not forming the bulk of the plasma. In this experiment, we have attempted to obtain a more direct measurement of the ion energies in the plasma by measuring the energy distribution of particles leaving the θ -pinch along the z axis, using a focusing electrostatic energy analyzer.

To relate the detected distribution function outside the plasma to that trapped inside requires some knowledge of the energy dependence of the loss mechanism. In our discussion, we shall initially avoid this problem and describe the results in terms of a distribution function $f_s(E,t)$ evaluated at the end surface of the plasma. We take this surface to be located at the plane of the mirror field maximum. The principal efforts have been concentrated on the zero bias case at 9 mTorr. For comparison purposes, plasmas with positive and negative bias magnetic fields of 0.9 kG were also examined.

The distribution function of the deuterons leaving the plasma falls off approximately exponentially above 4 keV for all conditions. However, there is a much smaller number of low energy particles than would be given by a true Maxwellian for both the zero and negative bias cases. The positive bias results do approximate a Maxwellian.

From self consistency checks involving pressure balance, neutron production rates, and the number of ions observed in the center of the loss cone, we infer that up to 6 μ sec the energy dependence of the trapped distribution $f(E,t)$ in the center of the plasma differs little from the f_s distribution of the deuterons escaping from the end surface. Past 6 μ sec it is possible that some energy dependent correction is needed. There is no need to invoke the presence of a specially accelerated group of ions to explain any of the observations.

2. Details of Experiment

2.1 Experimental Apparatus

This experiment was performed on the large θ -pinch device at General Electric Research Laboratory[4], with the main capacitor bank enlarged to 500 kJ. A slotted copper coil 36.2 cm long with a vacuum mirror ratio of 1.24 was used in these experiments, giving a peak mirror magnetic field of 67 kG with a rise time of 7.4 μ sec. In other respects, the θ -pinch is as previously described.

As shown in the schematic diagram of the experimental apparatus (Fig. 1), the ion analyzer is of the focusing electrostatic deflection type. The analyzer used here is essentially equivalent to that previously described by Eubank and Wilkerson[5]. It has an energy acceptance band width of 1.5%. Ions of the desired energy pass through the deflection system and impinge on the aluminum high voltage knob, which is maintained at -15 kV. Secondary electrons

from the knob are then accelerated through a thin, grounded aluminum coating on the scintillator in which they are stopped. The light signal is viewed through a light pipe by an RCA 6342A photomultiplier tube, displayed on an oscilloscope, and photographed. Great care was taken to shield the phototube circuit magnetically and electrically and to avoid ground loops.

One of the most critical aspects of the experimental configuration is the differential pumping tube between the ion analyzer and the pinch coil. Because the cross section for charge exchange scattering of deuterons in deuterium gas is both large and strongly energy dependent in the energy range (0-15 keV) of interest[6], it is necessary to keep the effective ion path length between the pinch and the analyzer as short as possible. On the other hand space must be allowed for connection of the various vacuum systems and the preionizer electrode as well as for separation to reduce transient pickup. These considerations make it necessary for the differential pumping tube to be as close to the magnetic mirror as possible, thereby also making it a collimator for the accepted ion beam. As the pumping tube is metallic, it greatly distorts the local pulsed magnetic field of the pinch coil. This distortion has been measured with a magnetic probe and is incorporated in the magnetic lens effects to be discussed in Section 3. Ceramic pumping tubes were tried in an effort to avoid the field distortions, but they vaporized on the front surface and greatly attenuated the ion beam. With the geometry of Fig. 1, the typical operating pressures for this experiment were 9 mTorr in the plasma region, 0.9 mTorr in the connecting region and .05 mTorr in the analyzer with a constant flow of deuterium gas to maintain constant pressure.

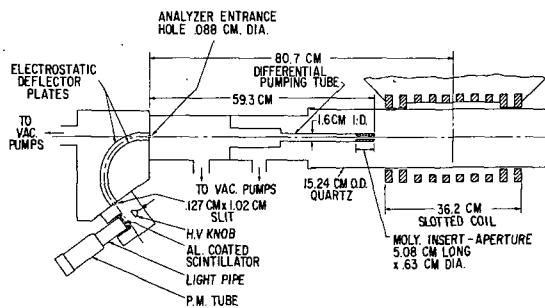


FIG. 1. Schematic diagram of the experimental apparatus

2.2 Experimental Procedure

The experimental procedure consisted of setting the analyzer to detect particles of a given energy and examining approximately 10 discharges at each energy, the system being pumped out and refilled with deuterium for each shot. In cases where the dynamic range was large, data was taken at different gain settings and these statistics were satisfied for each gain setting separately. The range of phototube supply voltages and oscilloscope settings available permitted the collection of data over a

dynamic range of 10^4 . In order to reduce the effects of systematic errors no more than four consecutive shots were taken at any one setting. The possibility of a background signal due to impurity ions being accepted by the analyzer has been examined[7] by inserting a magnetic deflector between the electrostatic plates and the counter in the analyzer. No measurable impurity signal was found and the magnetic deflector was removed.

The data was analyzed by using a pantograph to magnify and superpose on a piece of graph paper the oscilloscope traces corresponding to the same experimental conditions. In this way it was possible to obtain an average curve of yield versus time at a given energy. The values were then normalized to compensate for the different gain settings used and divided by the acceptance bandwidth of the analyzer to obtain the quantity $d^2N'/dTdE$, where N' is a relative yield of particles at the detector. For a comparison with the theory to be outlined in Section 3, we need the quantity,

$$\frac{d^2N}{dTdE} = K\sigma \frac{d^2N'}{dTdE} \quad (1)$$

where $d^2N/dTdE$ is the absolute counting rate per unit energy corrected for charge exchange losses of the ion beam. The factor σ is the reciprocal of the charge exchange attenuation computed on the basis of the cross sections of Fite et al.[6] and the path length of the deuterons through the deuterium gas of known density. The K represents the absolute flux calibration of the ion analyzer.

We have obtained an absolute calibration of the energy analyzer by placing a gridded cup collector directly in the undeviated ion flight path behind the tungsten-mesh outer deflector plate in the analyzer. When no voltage is applied to the deflector plates, the ion beam is caught by the collector. When the deflector voltage is applied, the collector current disappears. The tungsten deflector plate is effectively 34% open in this arrangement. The calibration was made using a d-c ion source of the type described by Carlson and Magnuson[8]. This ion source has a very monoenergetic output, so that the entire ion flux is within the analyzer band width. The current to the gridded collector was measured with an electrometer and calibrated against the observed photomultiplier output, the entire measurement being made without turning off the ion source or making any adjustment other than turning on the deflector voltage. We obtained a value of $K = 2.1 \times 10^{10}$ particles/sec volt at our standard gain settings.

3. Velocity Distribution at Plasma Surface

Although we are ultimately interested in the trapped distribution function f in the main body of the plasma, we shall first relate the detection rate to the distribution function f_s at the surface of the plasma. The latter relationship can be derived in a straightforward manner, whereas the relationship to the trapped distribution involves the detailed loss mechanism of the plasma which will be discussed in Section 5. By definition, the loss cone angle of the ion velocity distribution is 90° at the end of the plasma in the peak of the mirror magnetic field. Some of the ions in this velocity space hemisphere of ejected ions will be detected

by the analyzer. If we assume that the detected ions undergo no collisions in their transit from the plasma end to the analyzer entrance hole, then by Liouville's theorem the velocity distribution function f_s is constant along the ion path. The counting rate at the entrance hole is therefore[9]:

$$6E \frac{d^2N}{dTdE} = \iint dXdY \iiint v_z f_s dv_x dv_y dv_z = \frac{2E_d}{M^2} \iint dXdY \iint \sin\theta \cos\theta f_s d\theta d\psi \quad (2)$$

where M is the deuteron mass, $dXdY$ is integrated over the entrance hole area, and $dV_x dV_y dV_z$ is integrated over the section of velocity space at the entrance hole which is accepted by the analyzer. The Cartesian velocity coordinates (v_x, v_y, v_z) have been transformed to spherical coordinates (E_d, θ, ψ) where E_d is the ion energy at the entrance hole, θ is the angle which the velocity vector makes with the coil symmetry axis, and ψ is the azimuthal angle. By symmetry, the integrand cannot depend on ψ , so the integral over $d\psi$ yields 2π . Since the entrance hole is quite small compared to the plasma diameter, f_s is generally not a sensitive function of (X, Y) and the integral over $dXdY$ may be replaced by the hole area A_d . The integration over θ is from zero (when the velocity vector is along the coil axis) up to some limiting value θ_d . The counting rate per unit energy for a small detector on the symmetry axis is therefore:

$$\frac{d^2N}{dTdE} = \frac{4\pi E_d A_d}{M^2} \int_0^{\theta_d} d\theta \sin\theta \cos\theta f_s(\theta_s, E_s, T-\tau) \quad (3)$$

The velocity angle θ_s and ion energy E_s at the plasma surface are related to (θ, E_d) at the entrance hole by means of the corresponding ion path. The ion transit time τ is also a function of (θ, E_d). If the fields are time-independent, then E_s equals E_d . If we further replace f_s by a mean value over the observed region of θ , then we obtain approximately:

$$\frac{d^2N}{dTdE} \approx \frac{2\pi}{M^2} E_d A_d \sin^2 \theta_d \langle f_s \rangle \quad (4)$$

For a small aperture the limiting angle θ_d is determined by the aperture radius and aperture-to-hole distance. But if the mirror magnetic field is sufficiently high or ion energy sufficiently small, then θ_d may be smaller than the aperture value. These field-limited θ_d must be determined by detailed numerical integration of the ion paths. The small aperture of 0.63 cm diameter was aperture-limited for ion energies above 0.5 keV, with $\sin^2 \theta_d$ equal to 0.00003. The larger aperture of 1.6 cm diameter was field-limited up to 7 keV at peak field, and the θ_d were calculated as functions of ion energies and magnetic field for this case.

4. Experimental Results

In this section we shall discuss those features of the experimental data which are revealed by the velocity distribution func-

tion at the plasma surface, the function defined as f_s in the previous section. We shall defer a discussion of the velocity distribution inside the plasma to the following section as this will require further assumptions about the plasma loss mechanism and is therefore less closely related to the experimental observations. The results to be discussed will apply chiefly to experiments having an initial deuterium pressure of 9 mTorr, no bias magnetic field and a main bank voltage of 50 kV, which gives 54.6 Kgauss peak field at the centerplane in 7.4 μ sec.

A typical set of results is shown in the curves of Fig. 2. Here we show the values of f_s as a function of ion energy for the first seven microseconds of the discharge. These curves are based on data points at intervals of 0.5 keV up to 4 keV and then at 1 keV intervals up to 14 keV. The deviation of individual data points from the curves was generally less than a factor of two. It is immediately apparent that this is a broad distribution containing particles of a large energy range. The high energy tail of the distribution may be fitted by the function $\exp[-1.5E/E_{\text{slope}}]$ although a form such as $E^2 \exp[-1.5E/E_{\text{slope}}]$ is not ruled out. There is also a clear dip in the distribution function at low energies, ruling out a simple Maxwellian distribution function which would appear as a straight line in Fig. 2.

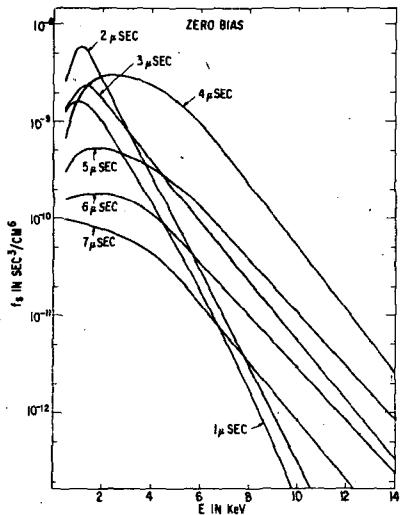


FIG. 2. Plot of the three-dimensional velocity distribution function f_s at the plasma surface as a function of deuteron energy. Curves are given for the first seven microseconds of the discharge. These curves are for the case of no bias field and a peak confining field of 54.6 kG at 7.5 μ sec.

The curves of Fig. 2 have been used to obtain both a mean energy $\langle E \rangle$ for the distribution and a characteristic energy E_{slope} obtained from the high energy tail. For a simple Maxwellian distribution E_{slope} would equal $\langle E \rangle$ but due to the lack of low energy ions, it will be less than $\langle E \rangle$ in distributions of the form shown. The values of both these quantities as functions of time are given in Table I.

We can obtain a rough estimate of the ion density n_s at the plasma boundary by assuming that f_s is isotropic and integrating over the emitted hemisphere in velocity space. The densities obtained in this way are shown in column 4 of Table I. In the next column of the table we show the ratio of the ion density at the center of the plasma to the density at the escape surface--the factor of two accounting for emission at both ends of the device. The ion density at the center of the coil is obtained from a measurement of the electron bremsstrahlung intensity[4] and charge neutrality. The last column of Table I gives the loss rate per

Table I. Distribution Function Data at Plasma Mirror Surface

Time μsec	$\langle E \rangle$ keV	E_{slope} keV	n_s cm^{-3}	$n_{center}/2n_s$	Loss Rate $\text{sec}^{-1} \text{cm}^{-2}$
1	2.0+20%	1.3+20%	.4x10 ¹⁵	3.1	0.8x10 ²²
2	1.85	1.4	1.0	2.4	2.1
3	2.5	2.1	.7	8.6	1.7
4	4.0	2.0	2.2	4.0	6.8
5	3.8	2.4	.4	30.	1.0
6	3.55	2.5	.1	87.	.34
7	3.3	2.2	.05	150.	.13

unit surface area per unit time for the plasma ions where we have again assumed f_s to be isotropic and integrated over the escape hemisphere in velocity space. These computed loss rates are in rough agreement with the observed plasma loss e-folding time of $1.8 \pm .2 \mu\text{sec}$.

We note that for the first four microseconds of the discharge the ion density at the escape surface as computed from the measured distribution curves is only about a factor of 4 down from the density in the interior of the plasma. As the energy analyzer only looks at the central portion of the plasma loss cone in velocity space, this result implies that at early times the plasma loss cone in velocity space is substantially filled. At later times the ratio of the density at the center to that at the surface rises markedly showing the center of the loss cone to be strongly depressed and thus indicating a change in the plasma confinement. It should be remembered that the assumption of isotropy in velocity space will give only a lower bound to the values of n_s and the loss rate. As the center of the velocity space loss cone becomes more depleted, these estimates of n_s and loss rate fall increasingly short of the true values.

Lastly, we observe the effects of adding a bias field of $\pm .9 \text{ kG}$ to the plasma before applying the main compressing field of the discharge. Figure 3 shows the curves of f_s at 3 μsec for the bias conditions. We note that the mean energy is clearly lower with positive bias than with no bias and also the low energy dip in f_s has been reduced. With the negative bias field it was necessary to operate with the peak confining field reduced to 49.1 kG and it is clear that even under this condition the mean energy is still higher and the low energy depletion greater than for the zero bias case. In general the mean energies were between 1 and 2 keV with positive bias and between 4.0 and 5.5 keV with negative bias.

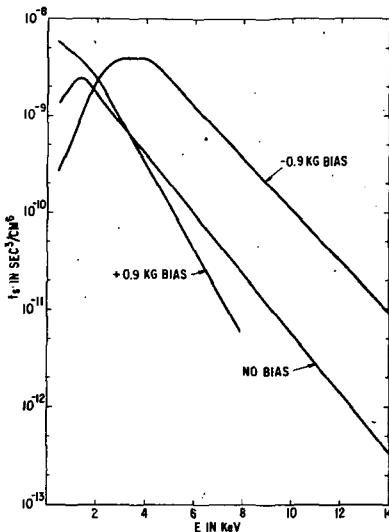


FIG. 3. Plot of the three-dimensional velocity distribution as a function of deuteron energy at 3 μ sec. Curves are shown for a peak confining field of 54.6 kG with +900-G bias field and no bias and for a 49-kG peak confining field with -900-G bias.

5. Trapped Distribution Function

In the previous sections, we have considered only the distribution function f_s at the plasma surface, where by definition all the ions are in the velocity space loss cone. We now wish to map this surface distribution back into the trapped velocity distribution of the plasma ions at the center of the coil. The connection between these distributions is given by the plasma loss mechanism, about which we do not have detailed knowledge. We shall therefore only be able to determine some of the properties of the trapped distribution function f here.

We first note that one might expect a deficiency of low energy particles in a mirror device [10] and the observed distributions are consistent with a potential difference between the center and the end of the plasma of about 500 eV[11]. Such a low potential would have a negligible effect on our results and conclusions, and we shall ignore it.

We can now make some assumptions about the plasma loss mechanisms and relate the trapped distribution to the observed surface distribution f_s in each case. We shall then use considerations of pressure balance and neutron yield to check these assumptions. A first possible loss mechanism is the case in which the ion mean free path is much longer than the coil length and losses are caused by infrequent Coulomb scatterings into the loss cone. In this situation ions are injected into the loss cone at a rate proportional to $E^{-3/2}$ [12] and due to their velocity make a contribution proportional to $1/v \propto E^{-1/2}$ to the phase space density. We thus obtain $f \propto E^2 f_s$.

If, on the other hand, the ion mean free path is assumed to be quite short, the loss cone would be filled to roughly the same phase space density as the trapped distribution and we would have $f = f_s$. An energy independent loss mechanism would also lead to the result of $f \propto f_s$.

As we noted in Section 4, the particle density n_s computed from the center of the loss cone was comparable to the measured internal density during the first four microseconds. We infer from this that $f \propto f_s$ over most of the energy range. After 5 μ sec, however, the observed loss cone center is strongly depleted compared to the trapped distribution and it is possible that at these times $f \propto E^2 f_s$, particularly for the high energy ions.

We shall now compute the mean energy of the trapped distribution using pressure balance. We use the formula

$$\beta B^2 / 8\pi = n \left(T_e + \frac{2}{3} E \right) \text{pressure} \quad (5)$$

and make use of the experimental quantities given in Table II. The density was determined by bremsstrahlung intensity; the plasma radius was measured by streak photographs; and the values of T_e and β were those previously reported[4]. We now note that if $f \propto f_s$ the mean energy of the trapped ions should be the same as $\langle E \rangle$ in Table I whereas $f \propto E^2 f_s$ would give a higher mean energy. A comparison of E_{pressure} and $\langle E \rangle$ shows reasonable agreement and implies that $f \propto f_s$ is the appropriate choice. This is especially true over the lower half of the energy distribution which chiefly determines $\langle E \rangle$. The anomalously high value of E_{pressure} for 2 μ sec is due to the low measured density at that time.

Table II. Experimental Plasma Data at Centerplane

Time μ sec	B kG	n_{center} 10^{16} cm^{-3}	Radius cm	T_e keV	β	E_{pressure} keV
1	12.3	.24 ± 15%	3.4 ± 10%	(.050)	.997	2.25
2	22.9	.5	1.8	(.140)	.99	3.65
3	33.0	1.25	1.1	(.200)	.97	2.8
4	41.6	1.8	.9	(.250)	.96	3.1
5	47.9	2.15	.7	(.300)	.91	3.2
6	52.6	2.1	.55	(.300)	.76 - .86	3.3 - 3.8
7	54.4	1.5	.45	(.300)	.5 - .7	3.2 - 4.6

We see, however, that if the value of β , which is uncertain at later times, is assumed to be as high as 0.7 at 7 μ sec a higher mean energy might be required. The assumption $f \propto E^2 f_s$ would yield a mean energy of 5.5 keV which is higher than the required value 4.6 keV. It is of course possible to combine the distributions over different parts of the energy range to obtain an appropriate mean energy.

We shall now turn to the neutron production rate to test our assumptions about the high energy end of our distribution function. Assuming $f \propto f_s$ and that f is isotropic in velocity space, we have computed the average neutron production $\langle ov \rangle$ as shown in Table III. This is given for the neutron branch of the D-D reaction only. These values of $\langle ov \rangle$ and the measured plasma volume and density, also shown in Table III, yield a neutron production rate as shown

Table III. Neutron Yield Data

Time usec	$\langle \sigma v \rangle$ $10^{-22} \text{cm}^3/\text{sec}$	n_{center} 10^{16}cm^{-3}	Volume cm^3	Calc. N. Rate 10^{12}sec^{-1}	Exp. N. Rate 10^{12}sec^{-1}
1	1.6	0.24	(700)	0.32	<0.05
2	1.0	0.5	(150)	0.18	~ 0.08
3	7.7	1.25	(40)	2.4	$2.2 \pm 10\%$
4	42.	1.8	(13)	8.8	4.5
5	41.	2.15	(7)	6.7	6.0
6	33.	2.1	(5)	3.6	6.3
7	23.	1.5	(3)	0.8	5.4

in Column 5 of Table III. We note that the agreement between the calculated values and the observed neutron production rate is good for the first six microseconds. At 7 μsec the calculated rate is much too low but the choice $f \propto E^2 f_s$ would yield a calculated rate of 6.9×10^{12} neutrons sec^{-1} in better agreement with the experimental value. It thus appears again that $f \propto f_s$ is a reasonable choice for the first six microseconds and at 7 μsec a distribution of the form $f \propto E^2 f_s$ might be more appropriate.

We may summarize these results by the following:

a. The plasma has a broad energy distribution which differs from a Maxwellian due to the lack of low energy ions. The mean energy $\langle E \rangle$ of such a distribution is higher than the characteristic energy E_{slope} computed from the high energy tail.

b. The energy distribution contains enough high energy particles to account for observed neutron yields. No special acceleration mechanisms working on small parts of the distribution are required.

c. For the first six microseconds, the trapped particle distribution function is similar to the observed surface distribution f_s , indicating that this is not a classical low density mirror system [13]. At 7 μsec the neutron yield indicates the possibility of $f \propto E^2 f_s$ for at least the high energy ions.

d.. With a positive bias field, the curves of f_s show that the distribution has a very small dip in the low energy end and the mean energy is greatly reduced. With a negative bias field the low energy dip in f_s becomes more pronounced and the mean energies are greatly increased.

6. Acknowledgments

The authors take pleasure in acknowledging the many profitable discussions of this experiment with Drs. H. Hurwitz, Jr., D. Ben-Daniel and S. Tamor. The technical assistance of Messrs. H. Rej and S. Sebis has been invaluable.

REFERENCES

1. D. E. Nagle, W. E. Quinn, F. L. Ribe, W. B. Riesenfeld, Phys. Rev. 119 (1960) 857.
2. L. M. Goldman, R. W. Kilb, H. C. Pollock, Physics of Fluids 7 (1964) 1005.

3. F. L. Ribe, I. Henins, F. C. Jahoda, G. A. Sawyer, Bull. Amer. Phys. Soc. 8 (1963) 148.
4. L. M. Goldman, R. W. Kilb, H. C. Pollock, J. A. Reynolds, Phys. Fluids 8 (1965) 522.
5. H. P. Eubank and T. D. Wilkerson, Rev. Sci. Inst. 34 (1963) 12.
6. W. L. Fite, R. T. Brackmann, W. R. Snow, Phys. Rev. 112 (1958) 1161.
7. R. L. Bingham, L. M. Goldman, Bull. Am. Phys. Soc. 10 (1965) 224.
8. C. E. Carlson and G. D. Magnuson, Rev. Sci. Inst. 33 (1962) 905.
9. R. W. Kilb, Gen. Elec. Res. Lab. Rpt. 65-RL-3998E.
10. D. J. BenDaniel, Phys. Fluids 4 (1961) 1447.
11. D. J. BenDaniel, Plasma Phys. (J. Nuc. Energy, Part C) 3(1961) 235.
12. L. Spitzer, Jr., Physics of Fully Ionized Gases, (Interscience Pub., 2nd Ed. 1962) p.133.
13. R. F. Post, Proc. Second U.N. Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, 32 (1958) 245.

DISCUSSION

A.C. KOLB: Your data involving a comparison of calculated and measured neutron yields indicate a collision dominated plasma (three degrees of freedom). However, the classical collision times are long compared with your experiment times. How does this "turbulence" come about?

L.M. GOLDMAN: You are quite right; the collision times for the high-energy ions are long and we have no explanation of the apparent three-dimensional character of the distribution. I think it should be pointed out that it is also difficult to explain the rather high mean energy observed in the early stages. Quite possibly the two effects have a common cause.

W.E. QUINN: Do you observe any significant difference in the plasma containment time with negative bias fields as compared with zero bias fields at a given pressure in the low-pressure regime?

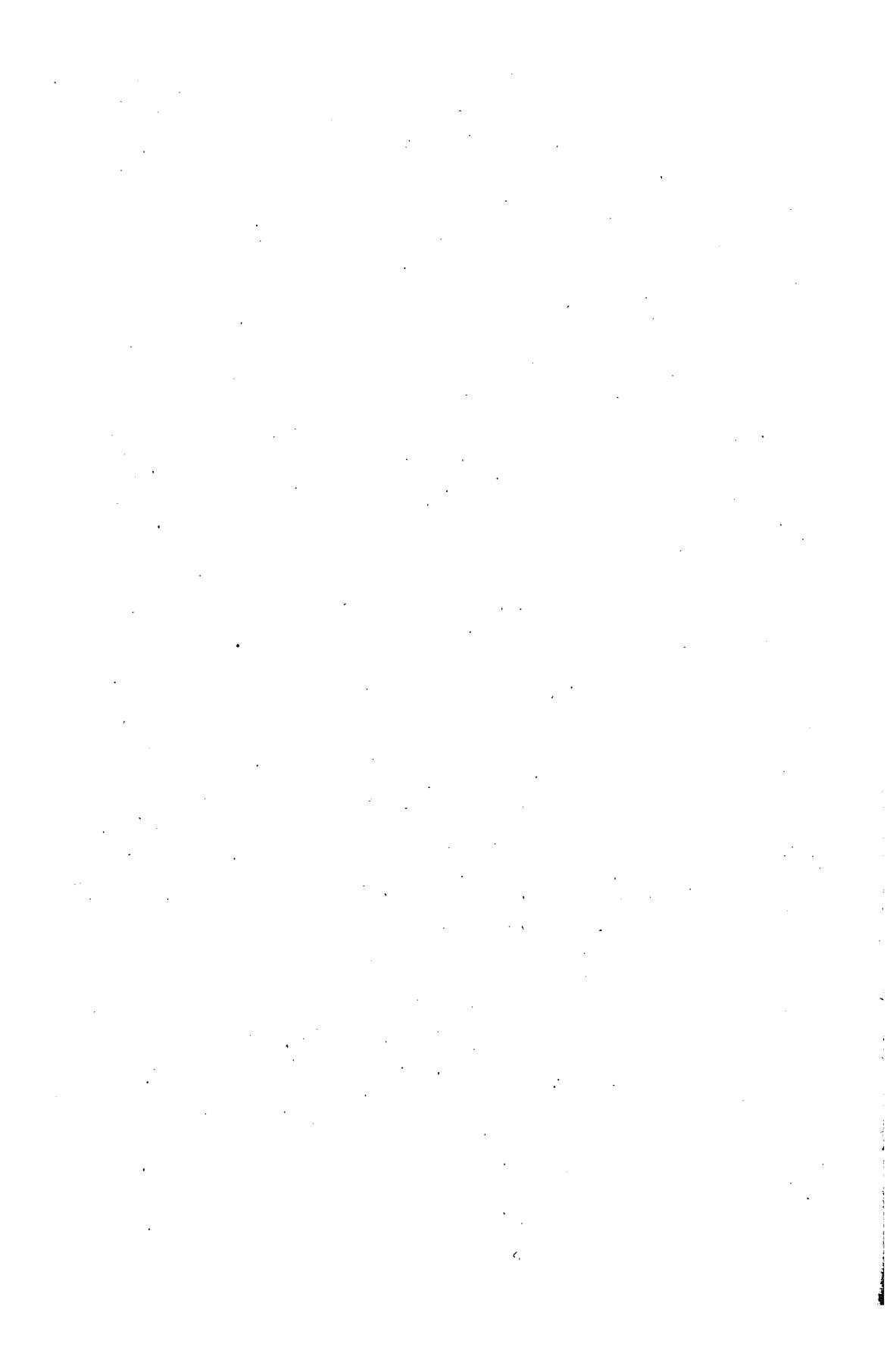
L.M. GOLDMAN: No, in our plasma there is no striking difference in plasma containment with negative bias fields. The measurements are, however, not good enough to exclude a factor of 1.5 to 2.

F. WAELBROECK: Have you any information on the plasma potential during these experiments?

L.M. GOLDMAN: We have no direct measurements of the plasma potential. We have considered trying to explain the fall-off of the low end of the distribution by a plasma potential, but this would seem to require a potential which is an order of magnitude too large.

J. W. MATHER: Do you find an electron flow from the ends of the plasma? If so, how does the sign of the bias field affect this?

L. M. GOLDMAN: We have not measured electron flow by itself. However, we know that the average life of a particle in our plasma is of the order of a few microseconds, so electrons must be leaving at the same fast rate as the ions.



DOPPLER SHIFT MEASUREMENTS TO INVESTIGATE PLASMA ROTATION IN THE THETA PINCH

M. KEILHACKER AND H. HEROLD

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK,

MUNICH-GARCHING, FEDERAL REPUBLIC OF GERMANY

AND

J. COOPER AND D.E. ROBERTS

IMPERIAL COLLEGE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, LONDON, ENGLAND

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

DOPPLER SHIFT MEASUREMENTS TO INVESTIGATE PLASMA ROTATION IN THE THETA PINCH. Whereas so far experimental investigation of plasma rotation in the theta pinch has been based on the photographic observation of instabilities associated with this rotation, this paper describes experiments to determine the mass rotational velocity and the related angular momentum from the Doppler shift of impurity lines.

As these shifts can be small compared with the line widths, a Fabry-Perot interferometer was used in the first experiments (carried out at Culham Laboratory on 22.5-kJ theta pinch). A suitable line (C II, 4267 Å) was selected by a 10-Å interference filter and the line profile recorded photoelectrically via an eight-channel fibre bundle array which was crossed with one of the Haidinger fringes produced by the Fabry-Perot. The Doppler shifts measured at different positions across the plasma diameter showed the plasma to rotate as a rigid body. The first detectable shift of the C II line, corresponding to an angular velocity of 5×10^4 rev/s, was measured during the first implosion of the plasma.

As the C II line was burned out after one microsecond the Doppler shifts of the C V 2271 Å line were measured in a second experiment carried out at Garching on a 32.5-kJ theta pinch. The profiles were recorded using a high resolution monochromator and a profile-dividing mirror system. In this experiment rotation was only observed at pressures below 30 mTorr D₂ and was then again in the direction of the ion current. It was possible to induce rotation and instabilities at higher pressures in an otherwise stable plasma by superimposing a stationary transverse magnetic field. In this case rotation seems to start in the direction of the electron current but the instabilities showing up later still rotate in the ion current direction. On the other hand the tendency of the plasma to rotate (at pressures of D₂ below 30 mTorr) can be reduced and rotational instabilities suppressed by superimposing a transverse field of the same polarity that causes "opposite" rotation for a usually non-rotating plasma. The results are discussed in the light of existing theories on the origin of rotation and on instabilities.

MESURES DU DEPLACEMENT DU A L'EFFET DOPPLER APPLIQUEES A L'ETUDE DE LA ROTATION DU PLASMA DANS LA STRICTION AZIMUTALE. Alors que l'étude expérimentale de la rotation du plasma dans la striction azimutale reposait jusqu'à présent sur l'observation photographique des instabilités associées à cette rotation, le mémoire décrit des expériences visant à déterminer, à partir du déplacement des raies des impuretés dû à l'effet Doppler, la vitesse de rotation des masses et le moment cinétique correspondant.

Etant donné que ces déplacements peuvent être faibles par rapport aux largeurs des raies, les auteurs ont utilisé un interféromètre Fabry-Pérot pour les premières expériences, effectuées au Laboratoire de Culham sur une striction azimutale de 22,5 kJ. Ils ont isolé, au moyen d'un filtre d'interférences de 10 Å, une raie adéquate (C II, 4267 Å) et ont enregistré photoélectriquement le profil de cette raie au moyen d'un dispositif en faisceau à huit canaux traversé par l'une des franges de Haidinger produites par l'interféromètre de Fabry-Pérot. D'après des mesures des déplacements dus à l'effet Doppler effectuées en différents points du diamètre du plasma, ils ont constaté que la rotation du plasma est semblable à celle d'un corps rigide. Le premier déplacement de la raie C II qu'il a été possible de détecter, déplacement qui correspondait à une vitesse angulaire de $5 \cdot 10^4$ tours/s, a été mesuré pendant la première implosion du plasma.

Etant donné que la raie C II a disparu en 1 µs, les auteurs ont mesuré les déplacements Doppler de la raie C V de 2271 Å dans une deuxième expérience effectuée à Garching avec un appareil à striction azimutale de 32,5 kJ. Ils ont enregistré les profils au moyen d'un monochromateur à fort pouvoir de résolution et d'un système de miroirs qui sépare les profils. Dans cette expérience, une rotation n'a été observée qu'à des pres-

sions inférieures à 30 mTorr de deutérium et l'a été également dans la direction du courant d'ions. Il a été possible de provoquer une rotation et des instabilités à des pressions plus élevées dans un plasma normalement stable, en superposant transversalement un champ magnétique stationnaire. Dans ce cas, la rotation semble démarrer dans la direction du courant des électrons, mais les instabilités qui se manifestent ultérieurement tournent encore dans la direction du courant des ions. Par ailleurs, on peut diminuer la tendance du plasma à subir une rotation (aux pressions inférieures à 30 m Torr de deutérium) et on peut supprimer les instabilités rotationnelles en superposant transversalement un champ ayant la même polarité que celui qui entraîne une rotation «opposée» pour un plasma normalement non tournant. Les auteurs discutent les résultats obtenus, en fonction des théories actuelles sur l'origine de la rotation et sur les instabilités.

ИЗМЕРЕНИЯ ДОППЛЕРОВСКОГО СМЕШЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВРАЩЕНИЯ ПЛАЗМЫ В ТЕТА-ПИНЧЕ. До сих пор экспериментальные исследования вращения плазмы в тета-пинче основывались на фотографическом наблюдении неустойчивостей, связанных с этим вращением. В настоящем докладе описываются эксперименты по определению массовой скорости вращения и связанного с ней момента количества движения на основании допплеровского смешения линий примесей.

Поскольку эти смешения могут быть невелики по сравнению с шириной линий, в первых экспериментах, проведенных в Калэмской лаборатории на тета-пинче с энергией в 22,5 кдж использовался интерферометр Фабри-Перо. Фильтром в 10 Å была выбрана подходящая линия (C II 4267 Å) и профиль линии зарегистрирован фотоэлектрическим способом с помощью восьмиканальной разделительной системы, которая пересекалась одной из полос Хайдингера с интерферометром Фабри-Перо. Допплеровские смешения, измеренные в различных положениях по диаметру плазмы, показали, что плазма вращается как твердое тело. Первое обнаруженное смешение линии C II, соответствующей угловой скорости 5×10^4 обор /сек, было измерено в течение первого сжатия плазмы.

Поскольку линия C II перегорала через одну микросекунду, допплеровское смешение линии C V 2271 Å было измерено во втором эксперименте, проведенном в Гархинге на тета-пинче с энергией 32,5 кдж. Профили регистрировались с помощью монохроматора с высокой разрешающей способностью и зеркальной системы, делящей профиль. В данном эксперименте вращение наблюдалось лишь при давлении ниже 30 мтор D₂ и затем вновь в направлении потока ионов. Оказалось возможным вызвать вращение и неустойчивости при более высоких давлениях в плазме, устойчивой в других отношениях, с помощью наложения постоянного поперечного магнитного поля. В этом случае представляется, что вращение начинается в направлении потока электронов, однако неустойчивости, появляющиеся позднее, все равно вращаются в направлении потока ионов. С другой стороны, тенденция плазмы вращаться (при давлениях ниже 30 мтор D₂) может быть уменьшена и неустойчивости вращения устранины путем наложения поперечного поля той же полярности, которая вызывает "обратное" вращение для обычной не вращающейся плазмы. Результаты рассматриваются в свете существующих теорий происхождения вращения и неустойчивостей.

ESTUDIO DE LA ROTACION DEL PLASMA EN LA CONSTRICCIÓN AZIMUTAL POR MEDICIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DOPPLER. Hasta la fecha, el estudio experimental de la rotación del plasma en la constricción azimutal se ha basado en la observación fotográfica de las inestabilidades vinculadas a dicha rotación; la presente memoria describe, en cambio, experimentos destinados a determinar la velocidad de rotación de las masas y el momento angular correspondiente, sobre la base del desplazamiento de las líneas de las impurezas, debido al efecto Doppler.

Como estos desplazamientos pueden ser pequeños comparados con el ancho de las líneas correspondientes los autores utilizaron un interferómetro de Fabry-Pérot en los primeros experimentos, realizados en el Laboratorio de Culham con una constricción azimutal de 22,5 kJ. Aislaron una línea adecuada (C II, 4267 Å) mediante un filtro de interferencias de 10 Å y registraron fotoeléctricamente el perfil de la línea con ayuda de un dispositivo de haz de ocho canales, atravesado por una fase de las franjas de Haidinger producidas por el interferómetro de Fabry-Pérot. Los desplazamientos debidos al efecto Doppler, medidos en distintos puntos situados sobre el diámetro del plasma pusieron de manifiesto que éste gira como un cuerpo rígido. El primer desplazamiento observable de la línea C II, que corresponde a una velocidad angular de 5×10^4 rev/s, se midió durante la primera implosión del plasma.

Como la línea C II desapareció al cabo de 1 μs, los desplazamientos de Doppler de la línea C V 2271 Å se midieron en un segundo experimento efectuado en Garching con una constricción azimutal de 32,5 kJ. Los perfiles espectrales se registraron mediante un monocromador de elevado poder de resolución y un sistema de espejos separador de perfiles. En este experimento, la rotación se observó solamente a presiones inferiores a 30 mTorr de D₂, y también tuvo lugar en la dirección de la corriente iónica. Superponiendo un campo

magnético transverso estacionario, fue posible inducir la rotación e inestabilidades a presiones más elevadas en un plasma de por sí estable. En este caso, la rotación parece iniciarse en la dirección de la corriente electrónica, pero las inestabilidades que aparecen más tarde giran en la dirección de la corriente iónica. En cambio, puede atenuarse la tendencia del plasma a girar (a presiones de D_2 inferiores a 30 mTorr) y suprimirse las inestabilidades de rotación superponiendo un campo transverso de la misma polaridad que hace girar en sentido opuesto a un plasma habitualmente carente de rotación. Los resultados se examinan a la luz de las teorías actuales sobre el origen de la rotación y sobre las inestabilidades.

A. Introduction

One of the factors that limit the lifetime of the plasma in theta pinch experiments is rotation and subsequent instability of the plasma. So far experimental investigation of this rotation has been confined mainly to measurements of the rotational velocities of these instabilities by high speed photographic techniques [1-6], i.e. limited to the later stages of rotation.

This paper describes experiments to determine the azimuthal velocity of the plasma by observing the Doppler shift of radiation emanating from impurity ions in such a plasma. Apart from the fact that this method provides a means of measuring rotational velocities with greater precision than is obtained by photographic observation, it enables the rotation to be detected and measured in its early stages before instabilities set in. It is thus possible to compare the time variation of the rotational velocity with the predictions of several theoretical models postulated to explain the origin of rotation [7-12]. In addition it can be checked whether the rotating plasma, before getting unstable, satisfies the stability criteria put forward by these theories.

The first part of this paper describes the measuring systems that have been used to detect the small Doppler shifts. The second summarizes the results on rotation and instability obtained by the Doppler shift measurements, by high speed photography and magnetic probe measurements made over a wide range of experimental conditions. Finally these results are compared with the predictions of existing theories.

B. Diagnostic Technique for Measuring Small Line Shifts

As the expected shifts are only a few tenths of an Angström and the percentage of impurity ions must be kept to a minimum, the measuring system must have high spectral resolution together with maximum light gathering power and high time resolution.

1. Fabry-Perot Interferometer

For lines in the visible part of the spectrum, emitted while the plasma is only moderately hot, a Fabry-Perot interferometer was used (for the theory of the Fabry-Perot interferometer see [13]). Fig. 1 shows the optical system. A suitable, intense impurity line was isolated by a 10 Å bandwidth interference filter to reject unwanted light in other orders and its profile recorded photoelectrically via an eight channel fibre bundle array which was crossed with one of the off-axis Haidinger fringes produced by the 2-inch diameter Fabry-Perot (see top half of Fig. 1). The whole apparatus was mounted on a table which could be shifted vertically to scan across the plasma diameter. The relative sensitivities of the 8 photomultipliers and associated fibre bundle channels were determined by calibration with a carbon arc or with the C II line itself using the set up shown in Fig. 1 (but with the Fabry-Perot removed). The relative calibration could be assumed accurate to $\pm 4\%$. The spatial resolution, defined by the height of the fibre bundle array and the magnification of the two lenses was 0.6 mm.

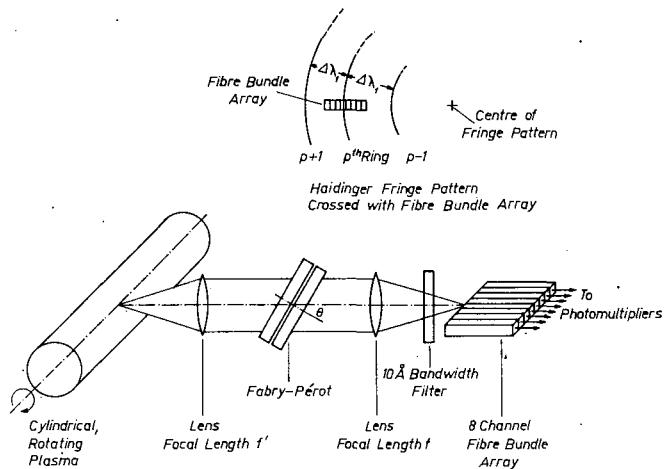


FIG. 1. Experimental arrangement for recording line profiles via an 8 channel fibre bundle array crossed with one of the fringes produced by a Fabry-Perot interferometer.

In order to record a well-defined line profile the free spectral range $\Delta\lambda$ of the Fabry-Perot was chosen to be approximately three times the half width of the line to be measured ($\Delta\lambda = 2.54 \pm 4\%$ for the C II 4267 line).

In addition, to obtain the maximum dispersion, the lengths of the 8 channel fibre bundle array should correspond to one free spectral range, so that the line profile covers most of the 8 channels. This leads to the following condition (see Fig. 1)

$$s = f (\theta_{p+1} - \theta_p) = \frac{f\Delta\lambda}{2d\theta_p} \quad (\text{for small } \theta_p)$$

where d is the separation of the Fabry-Perot plates. Since s is proportional to the focal length f of the focussing lens this condition can be satisfied for any ring p of the pattern by means of varying f and rotating the Fabry-Perot about a vertical axis until this ring is focussed on the centre channel of the fibre bundle.

The Fabry-Perot plates were coated with Ag. The reflection finesse at the wavelength used was $12.5 \pm 12\%$ and the etalon transmission 53%. The plates were flat to $\lambda/40$ at this wavelength giving an associated finesse of approximately 20. Thus the overall finesse was > 8 . It was not important in this experiment to have a finesse of much greater than 8 since we were limited by the fibre bundle channels to 8 resolution elements. It is worth pointing out that the instrument width limits the accuracy of line profile measurements but is less important for the measurement of line shifts.

2. Monochromator with Profile-Dividing Mirror System

During the later stages of theta pinch discharges the intense line radiation is due to high stages of ionization and is emitted in the UV part of the spectrum. Since with the Fabry-Perot interferometer observation was confined to the visible range by the use of glass etalons and of glass fibre bundles, a mirror system (developed by M.J. Bernstein [14]) was used together with a high resolution, high optical speed monochromator ($f/12$, 8.3 Å/mm) for channelling off spectral profiles in the ultraviolet range.

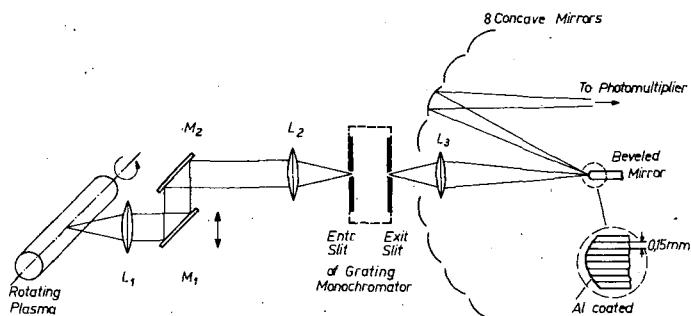


FIG. 2. Experimental arrangement for recording line profiles using a monochromator and a profile-dividing mirror system. L_3 profile-magnifying lens, M_3 profile-dividing mirror.

Fig. 2 shows the optical system. The plasma which is in the focal plane of lens L_1 , is imaged on the entrance slit of the monochromator via two mirrors M_1 , M_2 and a second lens L_2 . By moving L_1 and M_1 vertically, plasma light emitted along different chords can be focussed on the entrance slit, which was normally set to 40μ . The line profile which appears at the exit slit of the monochromator is magnified by a quartz lens L_3 and imaged on a set of very narrow, beveled mirrors. These profile-dividing mirrors then reflect the various parts of the line profile on to a set of photomultipliers. For a relative calibration of the different channels the line under investigation itself was used by opening the monochromator slits sufficiently to illuminate each channel with the entire line intensity. The spatial resolution was 1.5 mm .

All mirrors were Al-coated. The channel width chosen was about $0.25 \text{ \AA}/\text{photomultiplier}$. Asymmetric line shifts of about 0.05 \AA could be detected with this system. The reliability of the mirror system was checked by recording line profiles emitted by a stationary Hg-Cd lamp.

C. Experimental Results

Fig. 3 shows the time behaviour of the intensities of a C III, C IV and C V line emitted by the plasma in the Garching theta pinch experiment, in which the maximum electron temperature is in the 100 eV range. In order to detect line profiles during the whole half cycle of the discharge radiation from different stages of ionization had to be used.

1. Investigation of Early Rotation Using a C II Line

In the first experiment carried out at the Culham Laboratory the early stages of rotation were investigated by measuring the Doppler shifts of the C II 4267 line using the Fabry-Perot interferometer described before. In this theta pinch experiment (see first column of Tab. I for technical data) axial streak and framing photographs showed a rotation of the plasma throughout the operating range of initial pressures, i.e. from 45μ to $120 \mu D_2$. The C II 4267 line burnt out before rotation became visible on the streak photographs. Therefore, in order to make the best comparison between the angular velocity observed from Doppler shifts and that observed on streak photographs, an initial pressure was chosen such that the rotation showed up earliest. This was at a filling pressure of $60 \mu D_2$ when the gas broke down just before the 3rd half cycle (no pre-ionization was applied) and the plasma trapped a small amount of reverse flux.

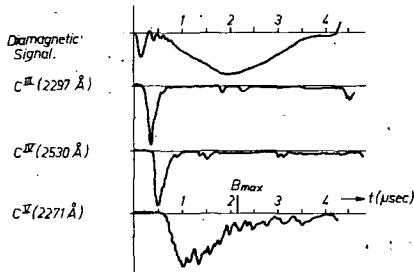


FIG. 3. Time behaviour of diamagnetic signal and intensities of C III, C IV and C V lines. Initial pressure 20 mTorr D_2 . Reverse bias field $B_{Z0} = -1$ kG.

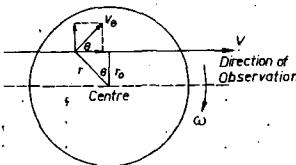


FIG. 4. Plasma rotating rigidly with angular velocity ω .

Provision was made for introducing known quantities of CH_4 impurity into the plasma via a gas mixer. It was found that 1% atomic C impurity was sufficient to give suitable signals with the C II 4267 line.

In order for the Doppler shift measurements to give unambiguous results in terms of rotational velocities all regions of the plasma have to rotate with constant angular velocity ω , i.e. the plasma has to rotate as a rigid body. In this case we have (see Fig. 4)

$$v_\theta = r \omega \\ v = r \omega \cos \theta = r_0 \omega$$

i.e. at a particular chord distance r from the centre, all the ions of a particular species will be travelling with the same velocity v along the line of observation and the radiation is therefore subject to a constant Doppler shift.

The magnitude of this Doppler shift is given by

$$(1) \quad \Delta \lambda = \lambda \frac{v}{c} = \lambda \frac{r_0 \omega}{c}$$

Thus on scanning across the plasma in the direction of r , one would expect to see a Doppler shift varying linearly with r_0 and in opposite directions on either side of the centre.

Fig. 5 shows the shifts of the C II 4267 line at various distances across the plasma diameter for three points of time (t_1 : during initial implosion, t_2 : 1st max. compression, t_3 : 2nd max. compression). The result is consistent with the interpretation that the plasma rotates as a rigid body. The direction of rotation is that of a positive ion in the driving magnetic field B . The angular velocities of the plasma Ω , found from the gradients of the lines through the measured shifts by resorting to eq.(1) are indicated in the diagram. Rotation is already detectable during the initial implosion. Its angular velocity is 5.3×10^6 rev/s and increases slightly with time. The rotational velocity of the

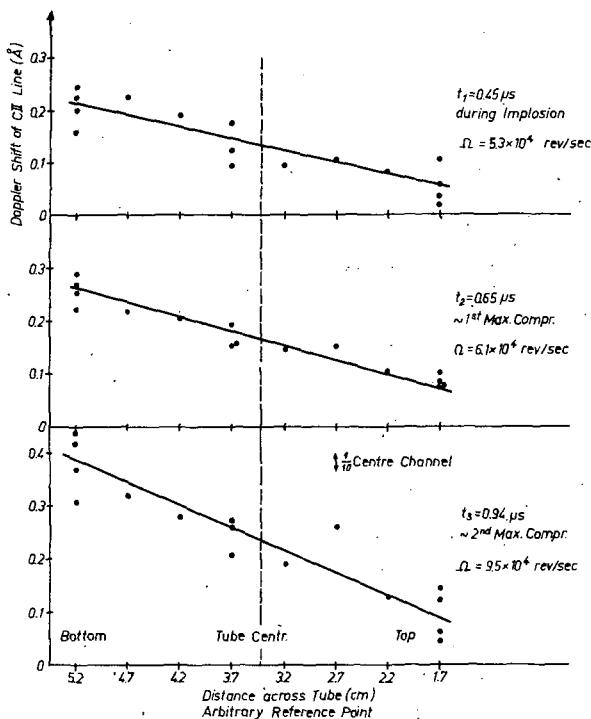


FIG. 5. Doppler shift $\Delta\lambda$ of C II 4267 line at various distances across tube. Arbitrary reference point for $\Delta\lambda$ and distance across tube. 60 mTorr D_2 . Small reverse bias field B_{z0} .

Table I Technical data of theta pinch experiments

	Culham θ-Pinch	Garching θ-Pinch
Bank Energy (kJ)	22.5	32.5
Bank Voltage (kV)	15	36
Max. B_z Field (kG)	40 (3rd h.c.)	57 (1st h.c.)
Half Period (μsec)	7.2	4.2
Coil Length (cm)	21	30
Coil Diameter (cm)	5.5	7
Preionization	1st and 2nd half cycle of main discharge	high frequency theta pinch

$m = 2$ instabilities as detected from streak photographs at the earliest possible time (at 2.25 μsec) is $1.9 \times 10^6 \text{ rev/s}$. This corresponds to an increase in angular momentum per particle by a factor 3 (taking into account the measured change in plasma diameter).

2. Investigation of Rotation over an Extended Time Scale Using a C V Line

To investigate the later stages of rotation the Doppler shift measurements were continued at Garching on the C III 2297 and, in particular, on the C V 2271 line using the profile-dividing mirror system described before. These measurements cover the time period up to 2 μ sec when rotational instabilities start to show up on streak photographs.

The second column of Tab. I summarizes the technical data of the theta pinch. Initial pressure was in the range $20 - 100 \mu D_2$. Usually 1 - 2% atomic C were added to give reasonable line intensities. In all experiments reported here a reverse bias field B_{zo} of 1 kG was superimposed.

Streak photographs showed that in this experiment rotational instabilities developed only at a pressure below $30 \mu D_2$. Thus it was possible to induce rotation and instabilities at higher pressures in an otherwise non-rotating and stable plasma by superimposing a transverse magnetic field B_{tr} and to study its influence on rotation.

2.1 Measurements without superimposed Transverse Field

These measurements were carried out at an initial pressure of $20 \mu D_2$. The diamagnetic signal, B_{eg} -signal and streak photograph in Fig. 6 show the characteristic behaviour of such a discharge. The $m = 2$ instabilities showing up on the streak photograph in the last third of the half cycle rotate at an angular velocity in the range $1 - 2 \times 10^6$ rev/s. The time variation of the B_{eg} -field was measured by a probe which was placed between theta pinch coil and discharge tube and oriented and balanced to maximize the B_{eg}/B_{zo} signal. The B_{eg} signal shows two regions of relatively well defined oscillations, one in the first and one in the last third of the half cycle. The oscillations at the beginning correspond according to ref. [5] to the frequency of the azimuthally rotating electrons transporting B_r -fields (e.g. small stray fields) for times which are short compared with the characteristic field diffusion time. The frequency of the oscillations in the last third of the half cycle agrees with the frequency of the $m = 2$ instabilities as observed on streak photographs, thus indicating that the B_r -field is now distorted by the $m = 2$ instabilities.

Doppler shift measurements show rotation of the plasma column long before it is detectable on photographs. Fig. 7 shows two C V line profiles measured at radial distances $r_o = +4$ and -4 mm at time $0.85 \mu\text{sec}$. They show a line shift of approximately 0.4 Å corresponding to a rotational velocity of 1×10^6 rev/s. The direction of rotation determined from such Doppler shift measurements as well as from stereoscopic side-on streak photographs is again that of the ion current.

Fig. 8 shows the time behaviour of the rotational velocity as determined from Doppler shift measurements, B_{eg} probe signals and streak photographs. Before discussing the results in detail two general remarks concerning these measurements should be made. First it is important to point out that the three diagnostic techniques measure three different types of rotational velocity: During the early stages of rotation the B_{eg} probes measure the rotational velocity of the electrons, whereas the Doppler shifts give the one of the C-ions. After instabilities have set in both the streak photographs and B_{eg} probes give the rotational velocity ω/m of an instability of mode m . Secondly with respect to the question as to whether the measured velocities of the C-ions are representative for the plasma as a whole, i.e. of the deuterons, it can be shown that the difference in the two velocities becomes less than 10% of the absolute velocity of the deuterons in a characteristic time t_c which is approximately $10(m_C/m_D - z_C) t_D$, where t_D is the

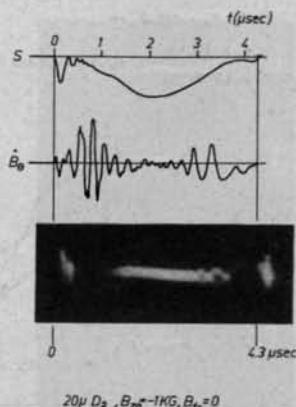
 $20\mu\text{D}_2, B_{z0} = 1\text{kG}, B_{tr} = 0$

FIG. 6. Diamagnetic signal S , B_θ probe signal and streak photograph of a discharge at 20 mTorr D_2 .
 $B_{z0} = -1\text{kG}$, $B_{tr} = 0$.

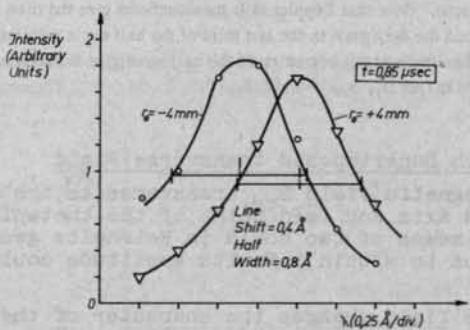


FIG. 7. Line profiles of C V 2271 line taken at two radial positions ($r_0 = +4\text{ mm}$ and -4 mm) across tube.
 $20\text{ mTorr }D_2, B_{z0} = -1\text{kG}$.

"deflection time" calculated by Spitzer [16]. Since the factor $(mc/mp - Z_C)$ is 5 for C II and 2 for C V and t_D is of the order 10^{-8} sec for our experimental conditions, t_c is of the order 10^{-7} sec which is approximately equal to the time in which the velocity changes, i.e. the Doppler shifts give the rotational velocity of the plasma column to within 10%, which is within the experimental error.

Qualitatively the angular velocities obtained from Doppler shifts and those from B_θ signals show a similar time dependence. The difference in the absolute values is a measure for the percentage of I_θ current carried by the ions and electrons respectively. Rotation is detectable at the second maximum compression ($t = 0.5\text{\mu sec}$), increases to a maximum at $1.2 - 1.4\text{\mu sec}$ and then decreases rapidly to an almost constant (usually slowly decreasing) value. The rapid decrease in angular velocity coincides with the time when the plasma contracts axially and is partly due to an increase in plasma diameter. The rotational velocity ω of the $m = 2$ instabilities is about a factor 3 higher than the angular velocity of the plasma. This will be discussed in part D.

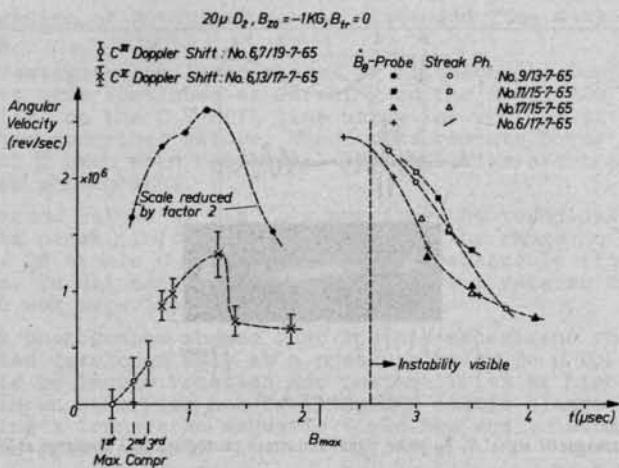


FIG. 8. Time behaviour of angular velocities as determined from Doppler shifts of C III and C V line, B_g probe signals and streak photographs. Note that Doppler shift measurements give the mass rotational velocity Ω , whereas the streak photographs and the B_g signals in the last third of the half cycle give the rotational velocity of an instability wave ω . The B_g signals at the beginning of the half wave give the rotational velocity of the electrons. Initial pressure 20 mTorr D_2 , $B_{z0} = 1$ kG, $B_{tr} = 0$.

2.2 Measurements with Superimposed transverse Field

A stationary magnetic field B_{tr} transverse to the axis and to the plane through axis and feed point of the theta pinch coil was superimposed by means of two coils in Helmholtz geometry. The field was homogeneous to within 10%. Its amplitude could be varied from 0 to 1000 G.

This transverse field changes the character of the discharges considerably. At initial pressures of $40 \mu D_2$ and $80 \mu D_2$ transverse fields of > 300 and > 700 G respectively cause rotation of an otherwise non-rotating plasma. Fig. 9 shows that with increasing amplitude of the transverse field the onset time for the $m = 2$ instabilities is reduced, the plasma diameter decreases and the frequency of the first detectable $m = 2$ instability increases linearly as shown in Fig. 10. End losses and irreproducible plasma drift are greatly enhanced under these conditions, the trapped reverse flux already dissipates during the early stages of the discharge and no axial contraction can be observed.

The Doppler shifts of the C V line at various distances across the tube (Fig. 11) seem to indicate that in discharges with transverse field the plasma region emitting the C V line also rotates rigidly before instabilities set in. Fig. 12 shows the time behaviour of the angular velocity for a discharge at $40 \mu D_2$ with a superimposed transverse field of 560 G. In contrast to the "naturally" rotating plasma at $20 \mu D_2$ rotation becomes detectable later (at $\sim 1 \mu\text{sec}$) and is then in "opposite" direction, i.e. in the direction of the electron current. On the other hand the $m = 2$ instabilities which start to show up on streak photographs at $\sim 1.6 \mu\text{sec}$ rotate in the direction of the ion current. This might indicate that the plasma does not rotate rigidly at later times, but that rather the inner region of the plasma, which emits the C V line, rotates with different velocity compared to the plasma surface from which the instabilities develop. It must also be considered that the accuracy of the Doppler shift measurements is greatly reduced under these conditions due

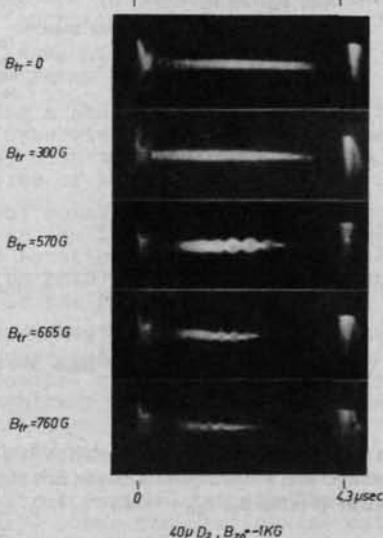


FIG. 9. Streak photographs of discharges at 40 mTorr D_2 showing the influence of a superimposed transverse field B_{tr} on the rotation. $B_{z0} = -1\text{ kG}$.

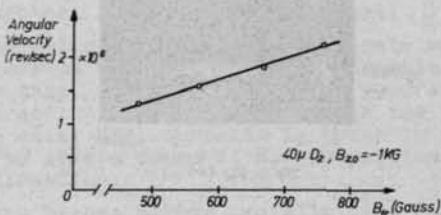


FIG. 10. Angular velocity as determined from streak photographs as a function of superimposed transverse field B_{tr} . Initial pressure 40 mTorr D_2 , $B_{z0} = -1\text{ kG}$.

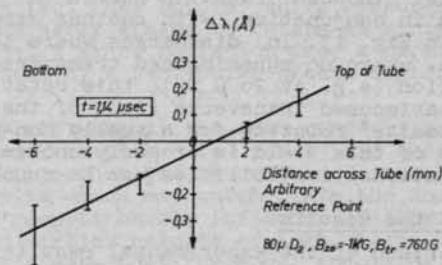


FIG. 11. Doppler shift of C V 2271 line at various distances across tube. 80 mTorr, $B_{z0} = -1\text{ kG}$, $B_{tr} = 760\text{ G}$.

to irreproducible plasma drift. "Induced" rotation at $80\mu D_2$ shows qualitatively the same behaviour, especially it also starts in "opposite" direction.

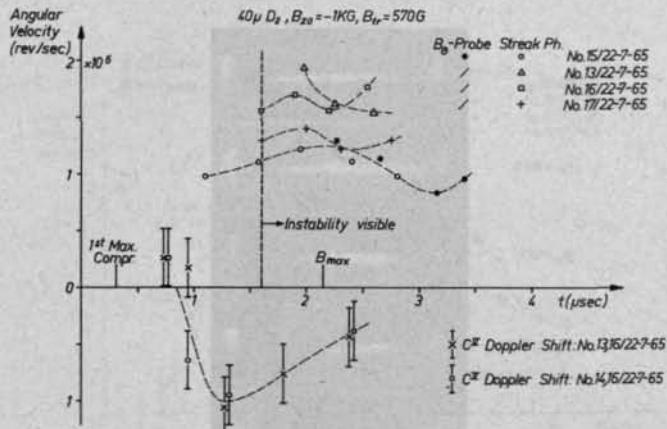


FIG. 12. Time behaviour of angular velocities as determined from Doppler shifts of C V 2271 line, B_0 probe signals and streak photographs for discharges with a superimposed transverse field of 570 G. See note at Fig. 8 for explanation of results. Initial pressure 40 mTorr D_2 , $B_{z0} = -1$ kG.

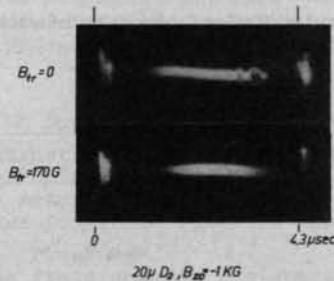


FIG. 13. Streak photographs of two discharges at 20 mTorr D_2 showing that rotational instabilities can be suppressed by superposition of a transverse field B_{tr} . $B_{z0} = -1$ kG.

The fact that "induced" rotation starts in "opposite" direction should be viewed in conjunction with another experimental result which is shown in Fig. 13. In discharges where the plasma rotates "naturally", i.e. where no superimposed transverse field is needed for rotation (e.g. at $20 \mu D_2$), this rotation can be reduced by a superimposed transverse field of the same polarity that causes "opposite" rotation for a usually non-rotating plasma. If the magnitude of this field is properly chosen (e.g. 170 ± 10 G) at $20 \mu D_2$, rotational instabilities can be suppressed.

D. Discussion of the Results

For a comparison of the experimental results with the predictions of various theories on plasma rotation the following experimental findings seem to be important:

- The tendency of the plasma to rotate increases with temperature, i.e. it is higher at low initial pressure and with low impurity concentration. In our experiments rotation occurred only if a reverse B_z field was initially trapped in the plasma.
- Rotation, if present, is already detectable during the very early stages of the discharge (an angular velocity of 5×10^4 rev/s

was measured during the initial implosion) and reaches its maximum angular velocity (approximately 1×10^6 rev/s) after 1 - 1.5 μ s.

c) In the early stages of the discharge, i.e. before instabilities set in, the plasma seems to rotate as a rigid body.

d) By superimposing a stationary transverse field rotation can be imposed on an otherwise non-rotation plasma. The angular velocity increases linearly with the magnitude of this transverse field, while the onset time of the instabilities is reduced.

e) The direction of rotation without superimposed transverse field is that of an ion in the driving B_z field. With superimposed B_{tr} , field rotation starts in "opposite" direction but instabilities which show up later on photographs still rotate in the direction of the ion current.

f) The tendency of the plasma to rotate and become unstable can be reduced by a superimposed transverse field of the same polarity which causes "opposite" rotation for a usually non-rotating plasma. If the magnitude of the field is properly chosen rotational instabilities can be suppressed.

Various theoretical models have been postulated to explain the origin of rotation, i.e. how the plasma acquires its angular momentum. An excellent review of these theories was recently given by Haines [17]. One can distinguish between three basic models, according to where the mechanical reaction is transferred:

a) Reaction on the wall of the discharge tube, either by radial currents circulating between the plasma and conducting walls thereby shorting out the radial electric sheath field [8,9] (in the following referred to as model A) or by collisions during the initial stage of contact between plasma and wall [17] (model A').

b) Reaction on external conductors which generate magnetic fields with azimuthally varying B_r -components via magnetic stress [10] (model B). In this case, angular momentum is generated in the plasma by the interaction of the B_r field with the plasma I_θ current to produce axial Hall currents I_z which in turn react with the B_r field to give a force $I_z B_r$, proportional to B_r^2 , in the azimuthal direction.

c) Separation of the plasma either radially [12] (model C) or axially [11] (model C') into two or more parts which rotate in opposite direction.

As far as our experiments are concerned model C' can be excluded, since end-on streak photographs show the plasma to rotate uniformly along its length. The fact that Doppler shift measurements show the plasma at least during early stages to rotate as a rigid body does not rule out model C since radiation from a particular stage of ionization is emitted by a particular plasma region, but makes it appear unlikely.

Since model A and B yield roughly the same range of predicted terminal angular velocities (10^6 - 10^7 rev/s) and acceleration times (1 - 10 μ sec) it cannot yet be decided on the basis of our experimental results which mechanism plays the dominant part. But our experimental results on the influence of superimposed transverse fields and earlier results of Kolb [6,15] on the influence of Joffe bars show that the model involving B_r fields, which to some extent are always present in a theta pinch, describes at least one of the effects that cause rotation. Therefore we are now going to estimate the acceleration time and maximum angular velocity predicted by this model.

Under various simplifying assumptions (constant external magnetic field, incompressibility of the plasma a.o.) Thoneman and Kolb [18] derive the following expression for the rotational velocity for times $t \ll T_d$:

$$(2) \quad v_{\theta} \approx v_0 \left(\frac{T_v}{T_A} \right)^2 \cdot \frac{1}{T_D} (T_d + t)$$

with $v_{\theta} = I_{\theta}/ne$ = drift velocity of electrons at time $t = 0$, T_v = drift time of electrons around the plasma column, T_A = transit-time of Alfvén-wave through B_r -field, T_D = resistive decay time of the I_{θ} current.

In a time of the order T_v the rotational velocity jumps to a finite value

$$(v_{\theta})_{T_v} \approx v_0 \left(\frac{T_v}{T_A} \right)^2$$

and increases to twice that value within time T_D . Numerical calculations [18] for conditions which were rather similar to ours show that the rotational velocity reaches its maximum value $(v_{\theta})_{\max}$ of approximately 10 times $(v_{\theta})_{T_v}$ after about $2 \cdot T_D$ and then decays exponentially due to field diffusion.

For the conditions of the Garching theta pinch $V_r \approx 1.4 \times 10^7$ cm/s $T_v \approx 6 \times 10^{-8}$ sec, $T_A \approx 7 \times 10^{-7}$ sec and $T_D \approx 2.5 \times 10^{-8}$ sec we find that a maximum velocity of 1×10^5 cm/s should be reached within about 5 μ sec. The maximum velocity agrees very well with our experimental result whereas the predicted time scale is too slow by about a factor 4.

Finally the stability of the plasma shall be considered using the theoretical condition for stability against an $m = 2$ instability which is the fastest growing mode [17]

$$-0.4 < \frac{2\Omega}{W_1} < 2.4$$

where Ω is the angular velocity of the plasma and W_1 the angular velocity associated with the ion diamagnetic current. Since the angular velocity ω of an $m = 2$ instability wave is given by [17]

$$-\mathcal{R}\omega = \Omega - \frac{W_1}{2}$$

W_1 can be estimated from the measured rotational velocities Ω and ω at later times when the instabilities show up on photographs. On the other hand it follows from the definition of $W_1 = 1/2r \partial (\frac{P_{ii}}{\Omega_i})/\partial r$ that it is negative in sign if $\partial B_z/\partial r > 0$ and $\partial P_{ii}/\partial r < 0$, $\partial r / \partial r$ which are likely conditions (P_{ii} is the transverse ion pressure). This shows qualitatively that the "naturally" rotating plasma, where Ω is in the direction of ion motion, i.e. negative, is less liable to instability than the plasma where rotation is "induced" and starts in the direction of electron motion. A crude estimate shows that for our experimental conditions W_1 is approximately 10^5 rev/s which means that the "naturally" rotating plasma should be stable until it reaches approximately that velocity.

Acknowledgments

The authors are indebted to Dr. H.A.B. Bodin and Dr. G.B.F. Niblett and to Prof. E. Fünfer and Prof. A. Schlüter for their interest and support during the course of these experiments and to Dr. M.G. Haines and D. Düchs for many valuable discussions.

References

- [1] Rostocker, N., and Kolb, A.C., Phys. Rev. 124 (1961) 965
- [2] Little, E.M. et al., Nucl. Fusion, Suppl. 2 (1962) 497
- [3] Bodin, H.A.B. et al., Nucl. Fusion, Suppl. 2 (1962) 521

- [4] Bodin, H.A.B., and Newton, A.A., Phys. Fluids 6, 9 (1963) 1338
- [5] Kvartskhava, I.F., et al., Nucl. Fusion 3 (1963) 285
- [6] Hintz, E., and Kolb, A.C., Phys. Fluids 8, 7 (1965) 1347
- [7] Rosenbluth, M.N. et al., Nucl. Fusion, Suppl 1 (1962) 143
- [8] Roberts, K.V. discussed in Ref. [3]
- [9] Taylor, J.B., J.nucl.Energy C, 4, (1962) 401
- [10] Haines, M.G., Phys. Letters 6 (1963) 313
- [11] Bostick, W.H. and Wells, D.R., Phys. Fluids 6 (1963) 1325
- [12] Velikhov, E.P., J.nucl. Energy, C, 6 (1964) 203
- [13] Tolansky, W., "High Resolution Spectroscopy", Methuen and Co., London (1947)
- [14] Bernstein, M.J., Appl. Optics, (to be published)
- [15] Kolb, A.C. et al., Phys. Fluids 8, 5 (1965) 1005
- [16] Spitzer, L., "Physics of Fully Ionized Gases", Interscience Publ. Inc., New York (1965)
- [17] Haines, M.G., Advances in Physics 14 (1965) 167
- [18] Thoneman, P.C., and Kolb, A.C. Phys. Fluids 7 (1964) 1455

This work was performed as part of the joint research program of the Institut für Plasmaphysik GmbH, Garching and Euratom.

DISCUSSION

A. C. KOLB: According to your paper, you have repeated some of our theta-pinch experiments with a steady transverse field. There seem to be certain fundamental differences, however. For example, we found that the tendency to rotate was greater with decreasing electron temperature (which could be varied by adding impurities). Could you comment on this?

M. KEILHACKER: We have indeed found that the tendency for the plasma to rotate is higher at lower pressures and with small impurity concentrations, that is with higher electron temperatures. This result is in agreement with theory, according to which the acceleration time decreases with increasing electric conductivity.

A. C. KOLB: Could you discuss the difference between probe signals with and without a superimposed steady transverse field?

M. KEILHACKER: Within the limits of reproducibility the B_0 signals are similar in discharges with and without a superimposed transverse field.

A. C. KOLB: Finally, is there any relation at all between the B_0 frequency and the hydromagnetic oscillation frequency during the early phases of the discharge?

M. KEILHACKER: During the dynamic phase of the discharge the two frequencies are close together and the periodic structure of the signals cannot be correlated unambiguously with the rotation of the electrons. Therefore, we started the evaluation of the signals at a time when the amplitude of the hydrodynamic oscillations was very small (as can be seen from the diamagnetic signal in Fig. 6).

E. HINTZ: What do you think of the possibility that the angular momentum of the plasma (in the direction of the electron current) in the case of the superimposed transverse field may be acquired during the preheating discharge?

M. KEILHACKER: This cannot be ruled out on the basis of our measurements so far. But there are other explanations for the rotation in the direction of the electron current in discharges with superimposed transverse field that in our opinion are more likely. For example, gain of angular momentum by collisions between plasma particles and the wall of the discharge vessel during the initial stage of the discharge, which according to a private communication of M. G. Haines can be in the direction of the electron current. Another explanation may be given by model C mentioned in our paper; radial separation of the plasma column into two or more parts which rotate in opposite directions.

TOROIDAL THETA PINCH WITH SUPERIMPOSED MULTIPOLE FIELD

G. VON GIERKE, F.W. HOFMANN, W. LOTZ, F. RAU, E. REMY,

H. WOBIG AND G.H. WOLF

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PHYSIK UND ASTROPHYSIK,

MUNICH, FEDERAL REPUBLIC OF GERMANY

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

TOROIDAL THETA PINCH WITH SUPERIMPOSED MULTIPOLE FIELD. A toroidal theta-pinch discharge with superimposed hexapole field is investigated. The characteristic data of the discharge are: 10 kG maximum field, 50 eV maximum temperature and densities of about 10^{16} cm^{-3} . The loss rates are determined by measurements of continuum radiation. They are by more than an order of magnitude smaller than loss rates expected from a model which accounts for cusp losses, where the slit width of the line cusp is taken to be the ion Larmor radius. The losses are of the same order as expected by resistive diffusion only. Losses due to a slit width of the order of the electron Larmor radius may contribute. Furthermore the results prove that a toroidal theta pinch with superimposed hexapole field provides a stable toroidal high-beta equilibrium configuration.

DECHARGE TOROIDALE A STRCTION AZIMUTALE AVEC SUPERPOSITION DE CHAMPS MULTIPOLAIRES.

Les auteurs ont étudié une décharge torique à striction azimutale avec superposition d'un champ hexapolaire. Les caractéristiques de la décharge sont les suivantes: champ maximum de 10 kG, température maximum de 50 eV et densités d'environ 10^{16} cm^{-3} . Ils déterminent les vitesses de perte par des mesures du rayonnement du continuum. Elles sont inférieures de plus d'un ordre de grandeur aux vitesses de perte prévues d'après un modèle qui tient compte des pertes dans le champ cuspidé, où la largeur de fente de la «lance» est supposée être égale au rayon de Larmor des ions. Les pertes sont de l'ordre de celles que l'on peut prévoir par la seule diffusion résistive. Les pertes dues à une largeur de fente de l'ordre du rayon de Larmor des électrons peuvent les expliquer en partie. En outre, les résultats prouvent qu'une décharge torique à striction azimutale avec superposition d'un champ hexapolaire fournit une configuration d'équilibre torique stable à β élevé.

ТОРОИДАЛЬНЫЙ ТЕТА-ПИНЧ С НАЛОЖЕННЫМ МНОГОПОЛЮСНЫМ ПОЛЕМ. Исследуется торoidalный тета-пинч-разряд с наложенным шестиполюсным полем. Разряд имеет следующие характеристики: максимальное поле 10 кГ, максимальная температура 50 эв и плотности около 10^{16} см^{-3} . Скорости потери определяются путем измерения континуум-излучения. Они более чем на порядок меньше скоростей потери, вычисленных на основе модели, которая учитывает потери конусообразного типа, где ширина разреза линейного конуса берется равной радиусу иона Лармора. Имеют место потери того же порядка, как ожидается только при резистивной диффузии. Могут влиять потери из-за ширины разреза порядка радиуса электрона Лармора. Более того, результаты доказывают, что торoidalный тета-пинч с наложенным шестиполюсным полем обеспечивает устойчивую торoidalную конфигурацию равновесия с высоким содержанием бета-частиц.

DESCARGA TOROIDAL DE ESTRICCIÓN AZIMUTAL CON SUPERPOSICIÓN DE CAMPOS MULTIPOLARES.

Se investiga una descarga toroidal de estricción azimutal con campo hexapolar superpuesto. Las características de la descarga son: intensidad máxima del campo magnético, 10 kGs, temperatura máxima, 50 eV y densidad, 10^{16} cm^{-3} , aproximadamente. Las velocidades de pérdida se determinan por medición de las radiaciones en la región continua. Son menores, en mucho más que un orden de magnitud, que las calculadas sobre la base de un modelo que tiene en cuenta las pérdidas cuspidales y en el que se supone que el ancho de la ranura en la cúspide de las líneas es el radio iónico de Larmor. Las pérdidas son del mismo orden de magnitud que las calculadas para la difusión resistiva solamente. Pueden contribuir a ellas las pérdidas debidas a un ancho de ranura del orden del radio electrónico de Larmor: Además, los resultados demuestran que una descarga toroidal de estricción azimutal con campo hexapolar superpuesto constituye una configuración toroidal estable de elevado equilibrio beta.

Introduction

Attempts to force a theta-pinch plasma into a closed toroidal equilibrium configuration, without resulting azimuthal currents, have shown that the confinement time increases as the theoretically postulated plasma surface (M- and S surface) is approached [1]. Further improvement would depend on exact knowledge of the required external magnetic field and - due to the initial compression - of the required discharge vessel geometry. Another question concerns the stability in regions of disadvantageous field curvature. Both problems are investigated separately experimentally and theoretically (cf. e.g. [2]). On the other hand they may be avoided by superimposing magnetic multipole fields over the M-and-S configuration. Preliminary experiments appeared to be promising. The lack of magnetic field closure inherent in these configurations, however, should lead to additional plasma losses of the mirror or cusp type.

Consequently the superposition of such multipole fields over a purely azimuthal compression field was investigated. Hexapole fields appeared to be the most advantageous configurations [3]. Two toroidal theta-pinch discharges "Lupus" and "Spinne" with the same geometry of vessel and hexapole field cover a range of peak fields (crowbarred) from 10 - 20 kG and temperature up to 100 eV. In the present paper loss rates are determined for fields and temperatures up to 12 kG and 40 eV and compared with those expected from theoretical models.

		" Lupus "			" Spinne "		
		preionization	main	hexa	preionization	main	hexa
bank voltage	U (kV)	25	12	12	25	8	12
bank energy	E (kJ)	0.6	9	9	0.9	12	18
time to current maximum	$\frac{T}{4}$ (μs)	1.4	10	6.5	0.35	3.1	2.7
vacuum field B_{\max}	(kG)						
at $r = 3$ cm		-	13	8.3	-	10.3	7.0
at $r = 1$ cm		-	13	1.2	-	10.3	1.0

Table I: Technical data of the experiments.

Apparatus

"Lupus" and "Spinne" are toroidal theta-pinches with the same geometry $R = 26$ cm major and $r = 3$ cm minor radius. The coil of "Lupus" has eight turns and that of "Spinne" one turn. The field rise B is about $1.3 \cdot 10^9$ and $5 \cdot 10^9$ G/s, respectively. The hexapole field is generated by six conductors between the coil and the pyrex glass vessel. Some data of the discharge circuits are given in Table I. Each circuit is crowbarred and its energy is characterized by the voltages applied to the condenser-bank; e.g., 8/12 kV means 8 kV at the theta-pinch bank, 12 kV at the hexapole bank. Both circuits have approximately the same discharge frequency and are fired at the same time.

Measurements

The plasma radius is obtained from streak pictures (integral light) and from scanning continuum intensities across the plasma. A streak picture and intensity contour lines are shown in Fig. 1. The values indicated at the contour lines give the fraction of intensity relative to the spatial maximum at each time. The measurements of the plasma radius obtained from continuum light and from integral light of streak photographs show damped oscillations which are opposite in phase and cancel when averaged. These oscillations of about 100 kHz are not yet understood. For the following mean values of the plasma radius are used (Fig. 2 and 5). The error $\Delta r_p / r_p$ is estimated to be $+30\%$ -25% .

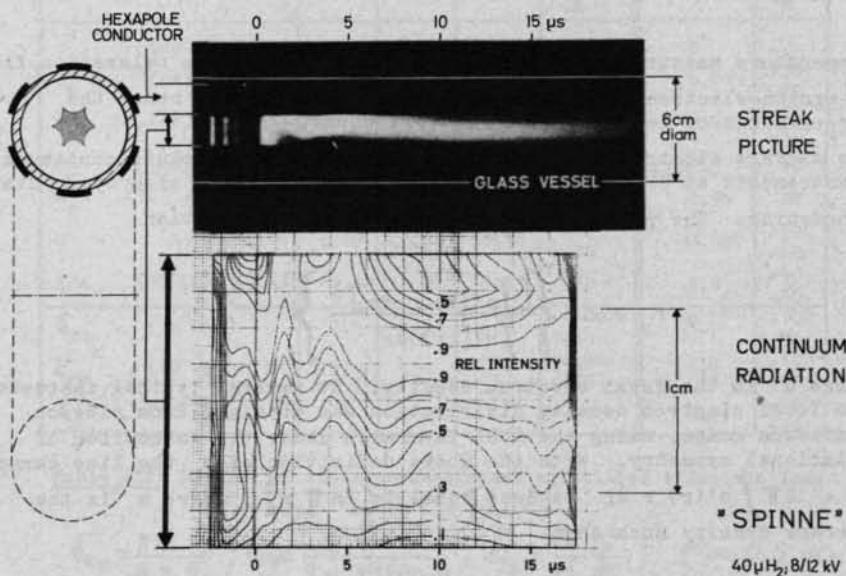


FIG. 1. Streak picture in integral light and continuum intensity contour lines of a discharge in Spinne at 40 mTorr hydrogen. To the left: schematic diagram of the torus with hexapole conductors; the theta pinch coil is not shown.

The electron temperature of the "Lupus" plasma is obtained from the ratio $H_B/\text{continuum}$. Viewing parallel to the plane of the torus the signal remains unaffected by the plasma-drift in the cases without hexapole-field. Local temperatures are higher by a factor of two [4] than the value of the electron temperature which is averaged over the line of sight. So in Fig. 3 twice the value of the averaged electron temperature is plotted.

Electron temperatures of the "Spinne" plasma (Fig. 6) are obtained in three time-intervals of the main discharge. The first part of the temperature curve is evaluated from the times of appearance of succeeding stages of ionization of oxygen impurities (Table II) [5] using the rate coefficients given by Hinnov et al. [6]. Near the current maximum at $t = 3 \mu$ s the temperature curve is continued under the assumption of adiabatic compression. For $t > 6 \mu$ s temperatures proportional to $H_B/\text{continuum}$ values are taken. The error $\Delta T/T$ of this

ionization stage	line (Å)	energy		time of max.intensity (μs)
		excit.	ioniz.	
O ^{II}	3749	26	35	0.40
O ^{III}	2984	38	55	0.70
O ^{IV}	3063	48	77	0.85
O ^V	2781	72	113	1.55
O ^{VI}	3811	82	137	2.1

Table II: Used oxygen impurity lines for the evaluation of the electron temperature (experiment Spinne).

temperature measurement is estimated to be +40% -30%. The relaxation time of proton-electron collisions is smaller than 0.2 μs, hence the temperatures of ions and electrons are equal.

The average electron density n is determined by absolute continuum measurements at 5285 ± 50 Å and in the Lupus discharge also by H_B Stark broadening. The plasma radius is defined by the relation

$$r_p = 2 \cdot \left\{ \frac{\left[\int n'(r) r dr \right]^2}{\int n'^2(r) dr} \right\}^{1/3}$$

where n' is the local electron density. At several typical instants the local electron density distribution was obtained from side-on continuum scans, using the Abé inversion under the assumption of rotational symmetry. With the above definition of r_p the line density $N = 2 \pi \int n'(r) r dr$ becomes equal to $n \pi r_p^2$, where n is the average density such that

$$n = \left(\frac{1}{r_p} \int n'^2 dr \right)^{1/2}.$$

Fig. 4 shows the measured electron densities in "Lupus" discharges of 12/0, 12/12 kV theta-pinch/hexapole bank voltages. Fig. 8 shows the electron density of a "Spinne" discharge 8/12 measured in two positions. The slopes used for the evaluation of loss rates are indicated. Electron density (Fig. 8), magnetic field (Fig. 7) and electron temperature (Fig. 6) yield the β of the "Spinne" discharge (Fig. 9) which is found to be near unity during the first six microseconds.

As only the relative change of electron density with time, $\Delta n/n$, is of interest, most systematic errors (absolute calibration, influence of ff- and fb-radiation due to impurities) cancel out. From a comparison of $\Delta n/n$ measured by Stark broadening and by continuum radiation the error $\frac{\Delta n/n}{n/n}$ is estimated to be 20 %. According to the density measurements in two positions 4 mm apart (see Fig. 8) n/n is not sensitive to a displacement of the plasma. Changes induced by varying β and/or changes of the pressure gradient with time can contribute to the error. The discussion of this point leads to the conclusion that this error is covered by the limit given.

The effective experimental loss width δ_{exp} is evaluated from $N = 6 n \bar{v} \delta_{\text{exp}}$ (cf. discussion). With $r_p = \text{const.}$ we have:

$$\delta_{\text{exp}} = \frac{\pi \eta r_p^2}{6 n \bar{v}} .$$

The results of the measurements and the related errors are summarized in Table III and plotted in Fig. 10.

	"Spinne"				"Lupus"	
	S ₁	S ₂	S ₃	error ±%	L	error ±%
t (μs)	4	8	12	-	10	-
r _p (cm)	0.85	0.77	0.77	+30 -25	0.97	+30 -25
T _e (eV)	40	21	13	+40 -30	5.4	+70 -40
B (kG)	9.1	6.3	5.2	10	12.5	10
n _e (10 ¹⁶ cm ⁻³)	2.24	1.55	0.93	20	0.96	20
δ	0.87	0.66	0.36	+40 -30	0.027	+70 -40
a/n (10 ⁴ s ⁻¹)	7.0	11.7	13.5	20	3.0	+40 -30
δ_{exp} (10 ⁻³ cm)	2.5	4.6	6.8	+100 -50	3.7	+100 -50
$\delta_{r\varphi}$ (10 ⁻³ cm)	2.5	5.4	6.1	+100 -50	1.8	+100 -50
δ_{th} (10 ⁻³ cm)					4.9	+100 -50

Table III: Results of the experiments and calculated effective loss width δ_{exp} , $\delta_{r\varphi}$, and δ_{th} .

$$\delta_{\text{exp}} = \frac{\pi n r_p^2}{6 n \bar{v}} ; \delta_{r\varphi} = \frac{\pi \eta}{3 \mu_0 \bar{v} (2/\beta - 1)} ; \delta_{\text{th}} = \frac{\pi r_p^2}{12 \ell'} ; \ell' \approx 0.5 \text{ m.}$$

Further formulae:

$$\delta_B = 3.9 \cdot 10^{17} \frac{2\pi m_i \bar{v}}{3 B \sqrt{1 - \beta/2}} ; \varrho_i = \frac{m_i \bar{v}}{e B} .$$

Discussion

In a toroidal hexapole cusp geometry neglecting the azimuthal field B_φ , particle losses may be described by a flux of particles of density n and mean thermal ion velocity \bar{v} through six slits of width δ . This model defines the loss width δ . Per unit length of the torus the change of line density N is then

$$N = 6 n \bar{v} \delta .$$

In the case of plasma with $B = 1$ and zero resistivity, δ is of the order of the ion Larmor radius ϱ_i [7]. Taking into account the electric field in the plasma boundary layer δ turns out to be of the order of the electron Larmos radius ϱ_e [8]. In Fig. 10 both ϱ_i and ϱ_e are

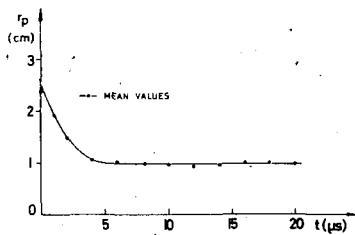


FIG. 2. Discharge parameters of Lupus at 40 mTorr hydrogen with and without hexapole field.

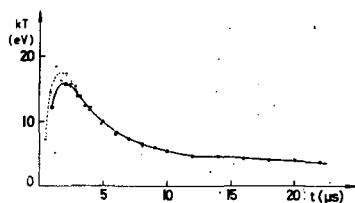


FIG. 3. Discharge parameters of Lupus at 40 mTorr hydrogen with and without hexapole field.

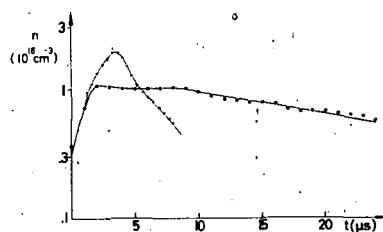


FIG. 4. Discharge parameters of Lupus at 40 mTorr hydrogen with and without hexapole field.

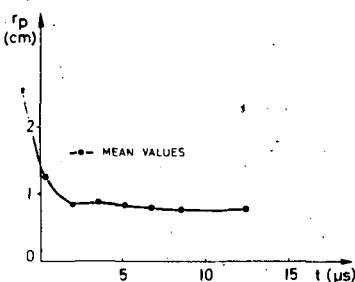


FIG. 5. Discharge parameters of Spinne at 40 mTorr hydrogen with hexapole field.

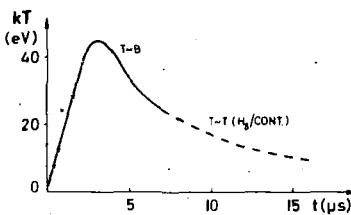


FIG. 6. Discharge parameters of Spinne at 40 mTorr hydrogen with hexapole field.

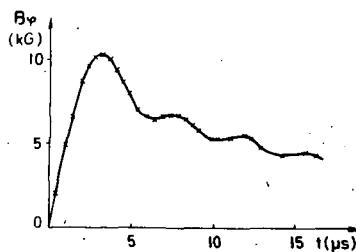


FIG. 7. Discharge parameters of Spinne at 40 mTorr hydrogen with hexapole field.

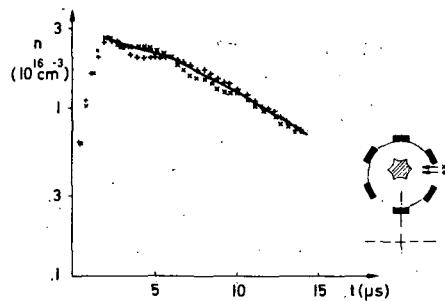


FIG. 8. Discharge parameters of Spinne at 40 mTorr hydrogen with hexapole field.

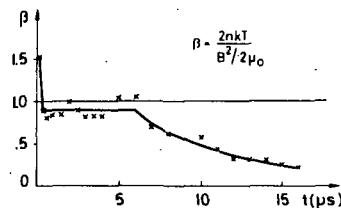


FIG. 9. Discharge parameters of Spinne at 40 mTorr hydrogen with hexapole field.

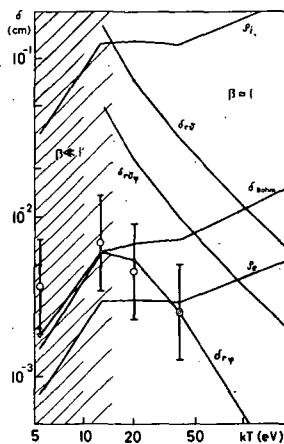


FIG. 10. Measured effective loss widths δ_{exp} with error bars. The theoretical curves are adjusted for the discharge parameters of our experiments and therefore are not straight lines. Best fit seems to be classical diffusion across the azimuthal field B_φ resulting in an effective loss width $\delta_{r\varphi}$ (small circles).

plotted versus temperature for the respective magnetic fields of our experiments which are of the order of 10 kG. In an azimuthal field B_φ with superimposed hexapole field B_6 , the particle losses may be smaller by a factor $\gamma = \sqrt{1 + (B_\varphi/B_6)^2}$. In our experiments γ is about 10 on the plasma surface (compare Table I).

Resistive cusp losses may be described in terms of a corresponding cusp width δ_r given by the expression

$$\delta_r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta \ell (2/\beta - 1)}{\mu_0 \bar{v} \gamma}}$$

$\gamma = 1$ corresponds to the case of pure B_φ (cusp) field with resistive cusp width $\delta_{r\varphi}$ [9]. On the surface of the plasma of our experiments B_φ/B_6 is about 10, hence the cusp width is reduced by a factor of 3. A further reduction of δ_r might result from an improved model of the resistive boundary layer and from a mirror effect due to the field increasing towards the wall. $\delta_{r\varphi}$ for $\gamma = 1$ and $\delta_{r\varphi\gamma}$ for $\gamma = 10$ are plotted in Fig. 10. The equilibrium cross section of the plasma in a hexapole cusp geometry [10] is similar to a hexagon, so ℓ in the above expression of δ_r is of the order of the plasma radius r_p .

Considering the azimuthal field B_φ only (linear theta pinch of infinite length) plasma losses due to classical diffusion are described by $N = n v_\perp 2 \pi r_p$. The resistive diffusion velocity is $v_\perp = (\eta \nabla p)/B^2$. ∇p is estimated to be p/r_p . The intermediate value B^2 in the plasma layer is $B^2 \approx B^2(1 - \beta/2)$, where B is the external field. To obtain a fictitious loss width $\delta_{r\varphi}$ corresponding to the above treated models

in cusp geometry, the losses N are set equal to $N = 6 n \bar{v} \delta_{rp}$ as defined above. The values of δ_{rp} obtained in this way are plotted in Fig. 10. The measurements of N cover only that part of diffusing particles that escape out of the plasma volume defined by r_p ; the diffusion of magnetic field into the plasma volume will lead to lower plasma losses by reducing the effective v_a .

In replacing v_a by the Bohm diffusion velocity $v_B = (3.9 \cdot 10^{17} \nabla p)/n\bar{B}$ (mkgsVA-units) the corresponding loss width δ_B is nearly proportional to the electron Larmor radius and has the same order of magnitude.

In the low β case plasma confinement is limited by free thermal expansion along the field lines that intersect the wall. Accordingly an equivalent loss width δ_{th} may be defined: $\delta_{th} = \pi r_p^2 / 12 \ell'$.

To calculate δ_{th} we assume an average length ℓ' of the magnetic field lines of 50 cm (Table III). In the case of the resistive cusp losses described by δ_r , confinement times determined by free thermal expansion along magnetic field lines should also be taken into account.

The experimental data agree best with the resistive diffusion models (Fig. 10, Table III). In the low β range there is also good agreement with δ_{th} (Table III). In the high β range experimental loss widths are about an order of magnitude lower than δ_i , but are comparable to $\delta_i = \varphi_i/\psi$ as well as δ_B .

The actual losses may be partially compensated by a flux of neutrals from the wall which are ionized upon entering the plasma. A similar effect may result from a flux of impurities which increase the continuum radiation. On the other hand a change of the ionization stage of impurities due to decreasing temperature may simulate higher plasma losses. These effects are probably covered by the quoted limits of error.

We obtain as a preliminary result that the losses in a toroidal theta pinch with superimposed hexapole field in the temperature range investigated are essentially of the resistive type. They are described by resistive losses across the magnetic field B_p (δ_{rp}). To get further information and to verify the trend of δ_{exp} our investigations are being extended to higher temperatures.

Furthermore the results prove that a toroidal theta pinch with superimposed hexapole field provides a stable toroidal high β equilibrium configuration.

R E F E R E N C E S

- [1] LOTZ, W., REMY, E. and WOLF, G.H., Nucl. Fusion 4 (1964) 335.
- [2] PFIRSCH, D. and WOBIG, H., 2nd Conf. PPCNFR, Culham, CN-21/55 (1965).

- [3] v.GIERKE, G., LOTZ, W., RAU, F., REMY, E., and WOLF, G.H., Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München, Report MPI-PAE/Pl 4/1965.
- [4] JUNKER, J., Phys. Verhandl. DPG 5 (1965) 65.
- [5] GOLDMAN, L.M. and KILB, R.W., General Electric Research Laboratory, Schenectady, Report No. 63-RL-(3414 E) (1963).
- [6] HINNOV, E., BISHOP, A.S., GIBSON, A. and HOFMANN, F.W., Princeton University, Report MATT-251 (1964).
- [7] GRAD, H., New York University Report NYO-7969 (1957).
- [8] BERKOWITZ, I., New York University Report NYO-2536 (1959).
- [9] BICKERTON, R.J., Culham Laboratory Report CLM-M35 (1964).
- [10] MERKEL, P., Institut für Plasmaphysik, München, Report IPP-6/36 (1965).

DISCUSSION

W.E. QUINN: In these toroidal theta-pinch experiments with the superimposed hexapole magnetic field, was the current in each of the hexapole bars of equal magnitude?

G. WOLF: The current was fed in parallel to the (three) hexapole bars in each direction. In this way the current distribution was correlated with the inductance of each hexapole bar. Therefore the current was of somewhat higher magnitude in those bars having a smaller radius of curvature. In our recent experiments this effect is suppressed by using artificial inductances.

ROTATING PLASMA EXPERIMENTS

J. BERGSTRÖM, S. HOLMBERG AND B. LEHNERT
KUNGL. TEKNISKA HÖGSKOLAN,
STOCKHOLM, SWEDEN

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

ROTATING PLASMA EXPERIMENTS. Experiments have been performed in a rotating plasma device with a curved magnetic field, having large mirror ratios and radial ratios. The results are as follows: (1) The plasma is created by a discharge applied across the magnetic field. When the power input is below a certain level, there is only a partially ionized plasma with a small kinetic energy stored in its rotation. However, as soon as the power input exceeds a certain critical level, a burnout takes place of the neutral gas in the confinement region, and a fully ionized plasma is created. It has a density of about $2 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$. (2) The momentum balance of the fully ionized plasma is explained by classical theory. It is determined by transverse losses due to viscous drag between the plasma and the electrodes, and by longitudinal losses due to particles escaping to the end insulators. When the plasma is released from its energy source, the velocity of rotation decays exponentially. The corresponding time constant increases with the magnetic field and reaches 310 μsec . Further, the time constant of the azimuthal current is half as large as that of the velocity. Thus, there is a radial balance of forces at a ratio of about 0.1 between the centrifugal and magnetic "pressures". (3) The voltage across the plasma cannot exceed a certain critical value. This limitation can be explained by a plasma-insulator interaction. It takes place when the plasma velocity near the insulator surfaces reaches the value $v_c = (2e\phi_i/m)^{\frac{1}{2}}$, where ϕ_i is the ionization potential of the gas. (4) The losses mentioned in (2) are small, but losses which possibly arise from instabilities and anomalous diffusion are even smaller and cannot be distinguished from the former. High speed photography and electric probe measurements show that the outer plasma boundary is separated from the vessel wall and is sharply defined within 2 mm. The expansion of this boundary by the centrifugal force is reversible and agrees with classical theory. A short circuit of flute-type disturbances by the cathode is probably important.

EXPERIENCES SUR DES PLASMAS TOURNANTS. Les auteurs ont procédé à des expériences au moyen d'un dispositif produisant des plasmas tournants, à champ magnétique courbe, comportant des rapports de miroirs et des rapports radiaux élevés. Ils sont parvenus aux conclusions suivantes: 1. Le plasma est créé par application d'une décharge à travers le champ magnétique. Lorsque la puissance appliquée est inférieure à un certain niveau, il ne se forme qu'un plasma partiellement ionisé ayant une faible énergie cinétique de rotation. Toutefois, dès que la puissance appliquée excède un certain niveau critique, il y a épuisement du gaz neutre dans la région de confinement et création d'un plasma entièrement ionisé, d'une densité d'environ $2 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$. 2. La conservation des quantités de mouvement du plasma entièrement ionisé s'explique par la théorie classique. Elle est déterminée par des pertes transversales dues à un entraînement visqueux entre le plasma et les électrodes, et par des pertes longitudinales dues aux particules qui s'échappent en direction des isolateurs terminaux. Lorsque le plasma est éjecté de la source d'énergie, sa vitesse de rotation décroît exponentiellement. La constante de temps correspondante augmente avec le champ magnétique et atteint 310 μs . De plus, la constante de temps du courant azimutal est égale à la moitié de celle de la vitesse. Il s'établit donc un équilibre radial des forces qui correspond à un rapport d'environ 0,1 entre les «pressions» centrifuge et magnétique. 3. La différence de potentiel à travers le plasma ne peut pas dépasser une certaine valeur critique. Cette limitation peut s'expliquer par une interaction entre le plasma et l'isolateur, qui se produit lorsque la vitesse du plasma à proximité des surfaces de l'isolateur atteint la valeur $v_c = (2e\phi_i/m)^{\frac{1}{2}}$, où ϕ_i est le potentiel d'ionisation du gaz. 4. Les pertes dont il fait mention sous 2. sont faibles, mais celles qui peuvent résulter d'instabilités et d'une diffusion anormale sont encore plus faibles et ne peuvent être différencier des précédentes. La photographie ultrarapide et des mesures à la sonde électrique montrent que la limite extérieure du plasma est séparée de la paroi du récipient qui le contient et nettement définie, à 2 mm près. L'extension de cette limite sous l'effet de la force centrifuge est réversible et concorde avec la théorie classique. Un court-circuit des perturbations en cannelures par la cathode constitue probablement un facteur important.

ЭКСПЕРИМЕНТЫ С ВРАШАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМОЙ. Выполнены эксперименты с вращающейся плазмой на установке с искривленным магнитным полем, имеющим большие зеркальные и радиальные отношения. Получены следующие результаты: 1) Плазма образуется при пропускании разряда через магнитное поле. Когда подача энергии ниже некоторого уровня, образуется лишь частично ионизированная плазма с небольшой кинетической энергией, накапливаемой при вращении. Однако как только энергия на входе превышает некоторый критический уровень, происходит выжигание нейтрального газа в области удержания, и образуется полностью ионизированная плазма. Плотность такой плазмы составляет приблизительно $2 \times 10^{21} \text{ м}^{-3}$. 2) Баланс импульса полностью ионизированной плазмы объясняется в рамках классической теории. Он определяется поперечными потерями на вязкое трение между плазмой и электродами и продольными потерями, обусловленными утечкой частиц на концевые изоляторы. При выделении плазмы от источника энергии скорость вращения падает по экспоненте. Соответствующее время затухания увеличивается с магнитным полем и достигает 310 мксек. Далее, время затухания азимутального тока составляет половину времени затухания скорости. В итоге имеет место радиальное равновесие сил когда отношение центробежного давления к магнитному равно приблизительно 0,1. 3) Напряжение поперек плазмы не может превышать некоторого критического значения. Это ограничение можно объяснить взаимодействием плазмы с изолятором. Оно имеет место, когда скорость плазмы около поверхности изолятора достигает значения $v_c = (2e\phi_i/m_i)^{1/2}$, где ϕ_i — потенциал ионизации газа. 4) Потери, упоминаемые в пункте 2), незначительны, однако потери, которые могут возникать в связи с неустойчивостями и аномальной диффузией, еще меньше, и их невозможно отдельить от первых. Измерения, проведенные методами скоростей, фотографии и с помощью электрических зондов, показывают, что внешняя граница плазмы отделена от стенок сосуда и резко очерчена в пределах двух миллиметров. Расширение этой границы центробежной силой является обратимым и хорошо согласуется с классической теорией. Вероятно, важное значение имеет короткое замыкание желобковых возмущений, через катод.

EXPERIMENTOS EN UN PLASMA GIRATORIO. Se han realizado experimentos en un dispositivo de plasma giratorio con un campo magnético curvo, cuyas razones de espejo y radial son grandes. Los resultados son los siguientes: (1) Se crea el plasma aplicando una descarga a través del campo magnético. Cuando la potencia aplicada es inferior a un cierto nivel, se forma un plasma parcialmente ionizado, con poca energía cinética almacenada en su rotación. Sin embargo, en cuanto la potencia aplicada pasa de un cierto nivel crítico, se produce el quemado del gas neutro en la región de confinamiento y se origina un plasma totalmente ionizado, cuya densidad es aproximadamente $2 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$. (2) El balance de las cantidades de movimiento de plasma totalmente ionizado se explica por medio de la teoría clásica. Se determina por las pérdidas transversales debidas al desplazamiento viscoso entre el plasma y los electrodos, y por las pérdidas longitudinales debidas a las partículas que escapan a los aislantes terminales. La velocidad de rotación disminuye exponencialmente cuando se interrumpe el suministro de energía al plasma. La constante de tiempo correspondiente aumenta con la intensidad del campo magnético y alcanza el valor de 310 μs . Además, la constante de tiempo de la corriente azimutal es la mitad de la correspondiente a la velocidad. Por lo tanto, hay un equilibrio radial de fuerzas cuando el cociente de las «presiones» centrífuga y magnética es aproximadamente 0,1. (3) La tensión a través del plasma no puede exceder de un cierto valor crítico. Se puede explicar esta limitación por una interacción plasma-aislante. Se produce cuando la velocidad del plasma en las proximidades de las superficies del aislante alcanza el valor $v_c = (2e\phi_i/m_i)^{1/2}$, en donde ϕ_i es el potencial de ionización del gas. (4) Las pérdidas mencionadas en (2) son pequeñas, pero las pérdidas que probablemente se producen a causa de las inestabilidades y de la difusión anómala son aún menores y no pueden distinguirse de las primeras. La fotografía rápida y las mediciones con sondas eléctricas muestran que el límite exterior del plasma está separado de la pared de la vasija, encontrándose nítidamente definido dentro de un margen de 2 mm. La expansión de este límite por la fuerza centrífuga es reversible y está de acuerdo con la teoría clásica. Probablemente, tiene importancia un corto-circuito de perturbaciones del tipo estriado, producido por el cátodo.

1. Introduction

Several investigators have discussed the generation, confinement and heating of a rotating plasma in crossed electric and magnetic fields [1-4]. This paper concerns the plasma behaviour in the field produced by a current

loop [5]. The confinement of a rotating plasma is enhanced by the centrifugal force [6, 7]. It is especially pronounced in magnetic fields with a large ratio between their largest and smallest radial extensions [8, 9].

The authors have earlier obtained the following results [10-12]:

- (i) The momentum and energy losses are much smaller in the current loop configuration than in a straight Homopolar device.
- (ii) For magnetic fields up to 0.5 Vsec/m^2 the momentum losses decrease rapidly with increasing field strength and transverse dimensions of the confinement region. They can be explained by viscous forces.
- (iii) During the ionization process the plasma forms a radial spoke moving at a velocity given by the crossed fields. It vanishes when the plasma becomes fully ionized.
- (iv) The large momentum losses during the ionization process have been separated from those in the fully ionized plasma. More than 85 % of the input of angular momentum into the fully ionized plasma can be recovered.
- (v) Energies exceeding 300 joules have been recovered which correspond to a ratio between the "pressures" of the centrifugal force and the magnetic field being as high as 0.1.
- (vi) The plasma density is nearly constant, but is not necessarily formed by the same particles.

These results are extended in the present report to stronger magnetic fields and to a further analysis of the momentum and energy balance and the stability conditions. We will show that there exists a critical level of the power input above which the neutral gas is burned out in the confinement region and a fully ionized plasma is created. The momentum balance of the plasma will further be explained by the classical theory of transport phenomena across and along the magnetic field. The losses which possibly arise from instabilities are too small to be detected at this stage. We will also show that the outer plasma boundary behaves as expected in a stable state. Finally, the earlier observed voltage limitation will be explained by interactions with the end insulators.

2. Experimental arrangement

The magnetic field of Fig. 1 is generated by a main coil and two auxiliary coils. The plasma is created by a discharge running from two anode rings to a cathode plate.

The azimuthal plasma current I_ϕ balances the centrifugal force. It is recorded by a Rogowski coil in a plane through the axis of symmetry. Effects on the signals from the plasma pressure are small compared to those from the centrifugal pressure.

The outer plasma boundary has been investigated by a movable electric probe. The boundary has also been photographed from the top of the vessel.

The effect of an obstacle in the equatorial plane can be studied by introducing a tube of ceramics into the plasma, as shown by Fig. 1.

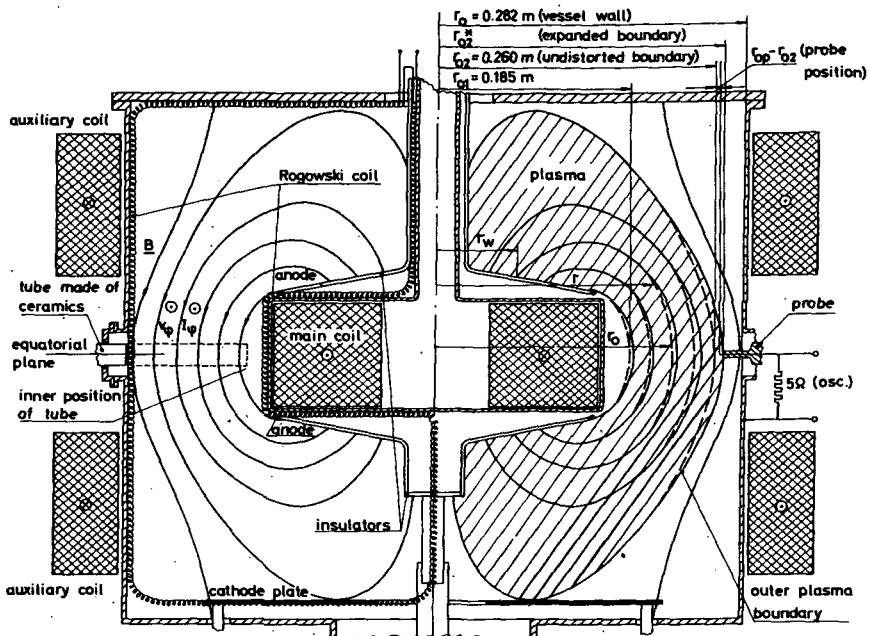


FIG. 1. The discharge chamber. The magnetic vacuum field obtained from numerical calculations [13] is sketched in left part of the figure. The shaded area in right-hand part shows the plasma position when the centrifugal pressure expands the magnetic field lines in the radial direction (full lines) as compared to the undistorted vacuum field (broken lines). The anode rings and the cathode plate are made of molybdenum and the insulators of Pyrex glass.

All discharges have been run with hydrogen. The gas pressure before the start is $p_0 = 31 \times 10^{-3}$ mm Hg in all cases except those indicated by dots in Fig. 8 where $p_0 = 26 \times 10^{-3}$ mm Hg.

In the experiments a number of operations have been made with the electric discharge circuit. They are all included in Fig. 2. The following circuit elements have been present:

Section 3: $C_{b1} = 82.5 \mu F$, R_{b1} and R_s .

Section 4: $C_{b1} = 41.4 \mu F$, $C_{b2} = 82.5 \mu F$, $R_{b1} = 1.14 \Omega$, R_{b2} and $R_f = 0.40 \Omega$ in the measurements of Figs. 6-8, and $C_{b2} = 144 \mu F$, $R_{b2} = 4.08 \Omega$, $R_{b2}' = 0.985 \Omega$ and $R_f \approx 0 \Omega$ in the measurements of Fig. 9.

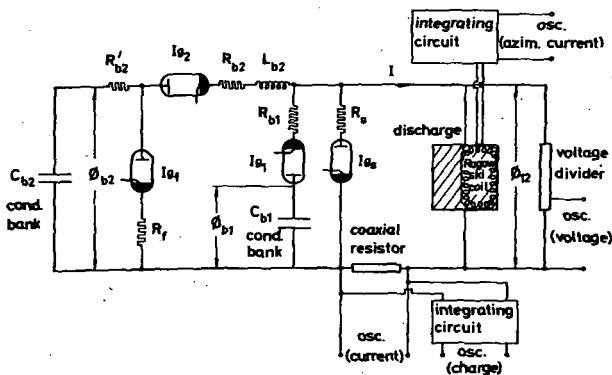


FIG. 2. The discharge circuit

Section 5: $C_{b1} = 82.5 \mu F$, $C_{b2} = 144 \mu F$, $R_{b1} = 0.985 \Omega$, $R_{b2} = R'_{b2} = 0 \Omega$ and $L_{b2} = 0.21 \text{ mH}$.

Section 6: $C_{b1} = 82.5 \mu F$, $C_{b2} = 144 \mu F$, $R_{b1} = 0.985 \Omega$, $R_{b2} = 3.15 \Omega$, $R_s = 0 \Omega$ in Figs. 11-13 and $R_{b2} = 6.05 \Omega$ in Fig. 14.

3. The burnout process

3. A. Experimental results

The starting process of the plasma depends critically on the power input as illustrated by Figs. 3 and 4:

- In Fig. 4 the initial voltage of the condenser bank is only 25 % higher than in Fig. 3.
- The discharge current I in Fig. 4 is slightly higher than in Fig. 3. Still the recovered electric charge Q_{ϵ} during the short-circuit at t_s is large in Fig. 4a, but negligible in Fig. 3a.
- During later parts of the discharge the plasma voltage ϕ_{12} is twice as high in Fig. 4a as in Fig. 3a. It is regular in Fig. 4a, but not in Fig. 3a.
- A large azimuthal current I_{ϕ} exists in Fig. 4b, but not in Fig. 3b.
- A small peak-shaped structure lasts during the entire discharge of Fig. 3b, but disappears after the starting process in Fig. 4b. It is probably due to a spoke-shaped plasma structure.
- Thus, the source voltage has to exceed a critical and sharply defined level ϕ_{b1c} to yield any detectable angular momentum of the plasma.

In Fig. 5 the quantities Q_{ϵ}/ϕ_{12} and I_{ϕ}/ϕ_{12}^2 are plotted as functions of the initial source voltage ϕ_{b10} .

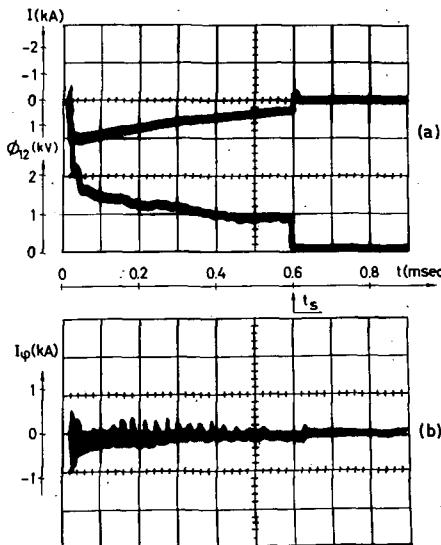


FIG. 3. Discharge starting with initial voltage $\phi_{b10} = 8$ kV and with $R_{b1} = 4.11 \Omega$. Short circuit applied at time t_s across $R_s = 0.05 \Omega$. $\bar{B}_0 = 0.42$ Vsec/m².
 (a) Discharge current I and plasma voltage ϕ_{12} .
 (b) Azimuthal current I_φ .

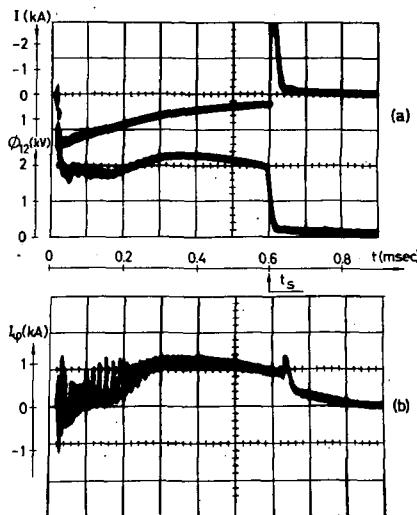


FIG. 4. The same as Fig. 3, but with $\phi_{b10} = 10$ kV.

A number of measurements like that of Fig. 5 were performed at different values of the external load R_{b1} and the magnetic field \bar{B}_0 . The critical discharge current I_c corresponding to the voltage ϕ_{b1c} became about $I_c = 430 / \bar{B}_0$ amps.

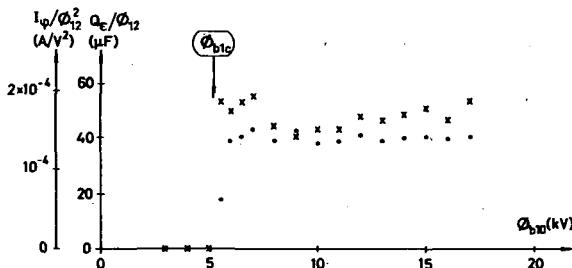


FIG. 5. Values of Q_e/ϕ_{12}^2 (dots) and I_ϕ/ϕ_{12}^2 (crossed marks) as functions of ϕ_{b10} for $R_{b1} = 1.48 \Omega$, $\bar{B}_0 = 0.52 \text{ Vsec/m}^2$.

3. B. Discussion

From the azimuthal and radial balance of forces the mean plasma density becomes

$$\bar{n} \approx \bar{B}_0^2 \ln(r_{o2}/r_{o1}) Q_e / 2\pi \phi_{12} mL \quad (1)$$

in terms of the recovered charge Q_e and

$$\bar{n} \approx I_\phi \bar{B}_0^3 (r_{o2}^2 - r_{o1}^2) / 2\phi_{12}^2 mL \quad (2)$$

in terms of the azimuthal current. Here L is the mean extension of the plasma along the magnetic field.

The results of Fig. 5 and eqs. (1) and (2) show that the density is small below the critical level ϕ_{b1c} , but jumps up to a constant value, as soon as ϕ_{b1c} is exceeded. This value becomes about $1.9 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$ according to eq (1) and $1.2 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$ according to eq. (2). If all neutral gas molecules in the confinement region are ionized at the start, the corresponding ion density would become about $2 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$.

From the theory of Appendix A.1 we obtain $K \approx 10^4$ from ex. (A.3) and $I_c \sim 350/\bar{B}_0$ amps. As far as can be expected from the involved approximations, the latter value agrees well with the experiments.

The results indicate that there is a burnout of the neutral gas in the plasma region when the critical current is exceeded:

- (i) No further increase takes place in Q_e/ϕ_{12}^2 and I_ϕ/ϕ_{12}^2 , i.e. in the plasma density, when the source voltage is increased beyond its critical value.
- (ii) The mean density given by the recovered charge and the Rogowski signal agrees with that obtained from the pressure recordings.
- (iii) The starting process is consistent with the deductions of Appendix A.1.

4. Free-wheeling

4.A. Experimental results

We shall now describe some measurements where the plasma is ionized and pre-accelerated by the condenser bank C_{b1} of Fig. 2, and is further accelerated by the bank C_{b2} at time t_2 . At time t_f a short-circuit is applied by ignitron Ig_f and both Ig_1 and Ig_2 stop conducting. The plasma is then in a free-wheeling mode. The results are demonstrated in Figs. 6 and 7. The time constants of the voltage ϕ_{12} and the azimuthal current I_φ are τ and τ_φ . The variation of τ with the magnetic field strength \bar{B}_0 is shown in Fig. 8. The free-wheeling time reaches 310 microseconds at strong magnetic fields, and this corresponds to $n\tau \approx 5 \times 10^{17} \text{ sec/m}^3$.

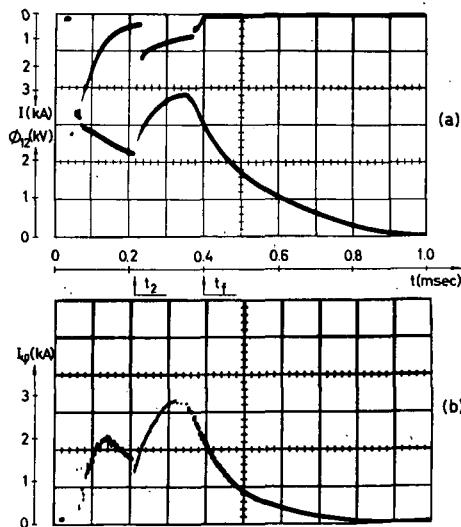


FIG. 6. Discharge in two stages. Free-wheeling starts at t_f . $\bar{B}_0 = 0.55 \text{ Vsec/m}^2$. (a) Current I and voltage ϕ_{12} . (b) Azimuthal current I_φ .

The free-wheeling of the plasma with an external load is demonstrated by Fig. 9. In Figs. 9a and 9c the power input is above the burnout level, and in Fig. 9b below it. The tube of ceramics shown in Fig. 1 is inside the plasma only in Fig. 9c.

4.B. Discussion

In this connection we notice the following results:

- (i) The ratio I_φ / ϕ_{12}^2 is constant during free-wheeling. The voltage ϕ_{12} and the azimuthal current I_φ decay exponentially and regularly

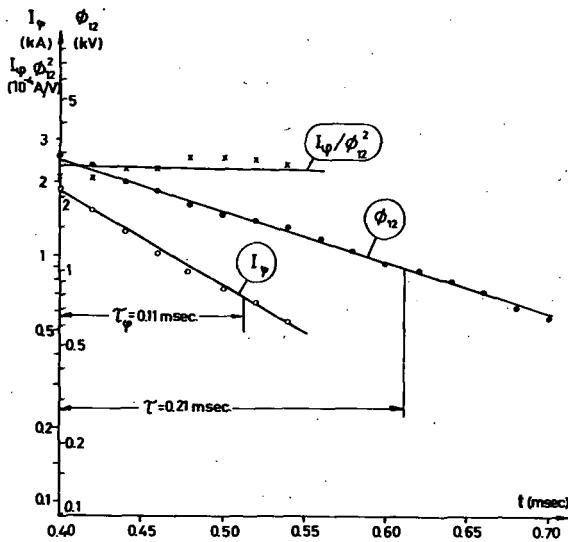
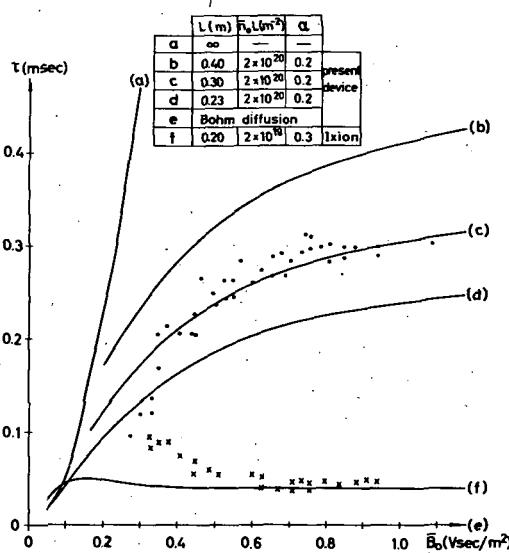


FIG. 7. The results of Fig. 6 during free-wheeling.

FIG. 8. Free-wheeling time τ at different values of the magnetic field strength. Dots refer to present device and crossed marks to Ixion [14]. The curves have been calculated from Eqs. (A.13) - (A.20) with $v_0 = v_{oc}$.

without any external power input, and with $\tau_\varphi \approx \tau/2$. These results and eq. (2) suggest that the plasma has a constant density and is stably confined by the magnetic field. The ratio between the centrifugal and magnetic "pressures" is as high as 0.1.

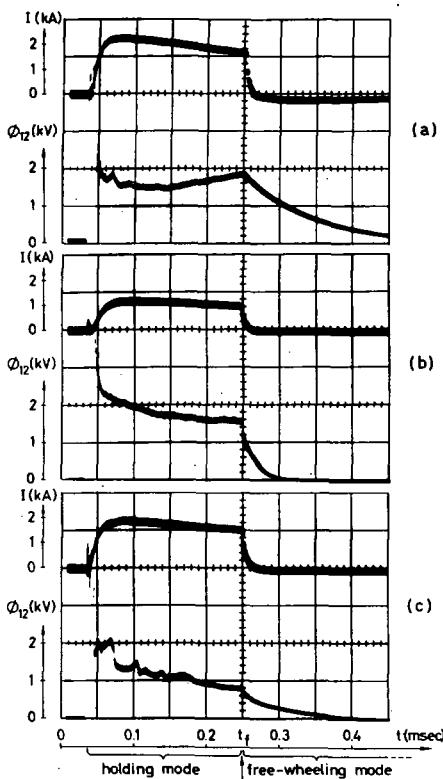


FIG. 9. Discharge in one stage. Plasma loaded with $R_{b2} = 4.08 \Omega$ during free-wheeling. $\bar{B}_0 = 0.46 \text{ Vsec/m}^2$.
 (a) $\phi_{b20} = 13 \text{ kV}$, (b) $\phi_{b20} = 8 \text{ kV}$, (c) $\phi_{b20} = 11 \text{ kV}$, with tube present.

- (ii) The magnitude and behaviour of the measured free-wheeling time is consistent with the theory of Appendix A. 2, with values of the transport coefficients given by Thompson [15] and Marshall [16]. Due to the experimental errors and the uncertainty in the mean value formation, it is not yet possible to decide whether the values by Thompson or by Spitzer [17] are in best agreement with the experiments. The theory also applies to the Ixion experiments [14].
- (iii) The experiments show a saturation of the free-wheeling time at strong magnetic fields. This is consistent with Appendix A. 2 which suggests that the longitudinal losses become larger than the transverse when \bar{B}_0 exceeds about 0.45 Vsec/m^2 . In absence of longitudinal losses we obtain curve (a) in Fig. 8 which deviates strongly from the experiments.
- (iv) For Bohm diffusion in curve (e) of Fig. 8 the free-wheeling time becomes several orders of magnitude less than the observed one.
- (v) Figs. 9b and 9a show that the free-wheeling time is much shorter

below than above burnout. The voltage decay in Fig. 9b for $t \approx t_f$ is close to that predicted by eq. (A.4) near the burnout level. This is a further proof that the plasma is fully ionized above the critical current I_c .

(vi) According to Fig. 9c even a small obstacle in the equatorial plane introduces considerable disturbances and losses. They can be explained by an extension of the theory in Appendix A. 2.

5. The voltage limitation

When the discharge current is increased, a level is suddenly reached where a further input of energy results in a damage of the insulators and a high gassing rate, and not into a further increase in the plasma voltage and velocity.

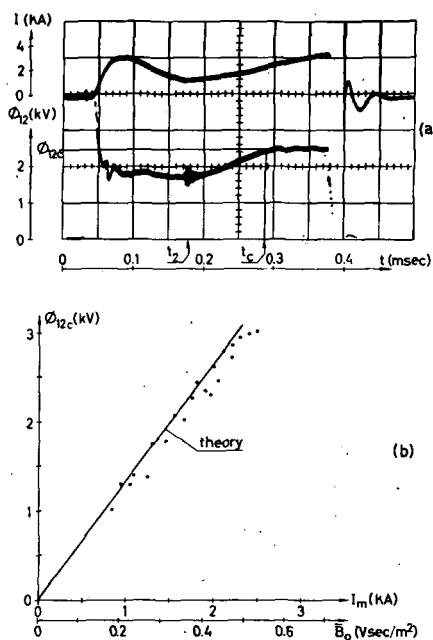


FIG. 10. Discharge in two stages. (a) The voltage reaches the saturation level ϕ_{12c} at $t = t_c$. $\bar{B}_0 = 0.44$ Vsec/m². (b) The voltage limit as a function of the magnetic field strength. I_m is the magnetization current of the coil system.

If the current is allowed to increase slowly by means of the series inductance L_{b2} of Fig. 2, this happens at a well-defined time t_c , as shown by Fig. 10a. The voltage limit increases linearly with the magnetic field strength of Fig. 10b. The line refers to the theory of Appendix A. 2. d. It agrees well with the experiments given by the dots.

6. The outer plasma boundary

6.A. Experimental results

The signals received by the probe of Fig. 1 are shown in Fig. 11. At a fixed radial position they depend on the plasma voltage of Fig. 12, where the probe signal is negligible when ϕ_{12} is below about 2.5 kV. The voltage ϕ_{12} at the onset of a measurable probe signal is plotted in Fig. 13 for different probe positions and magnetic field strengths.

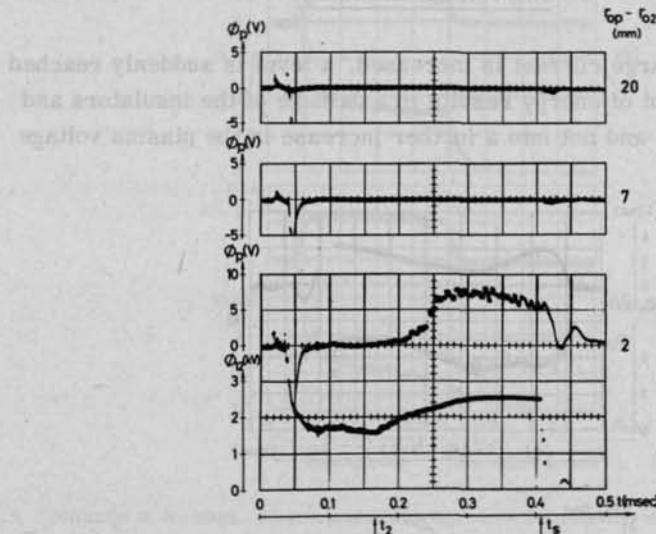


FIG. 11. Probe signals ϕ_p at different radial positions r_{op} of the probe. $\phi_{b10} = 6$ kV, $\phi_{b20} = 6.5$ kV, $B_0 = 0.41$ Vsec/m².

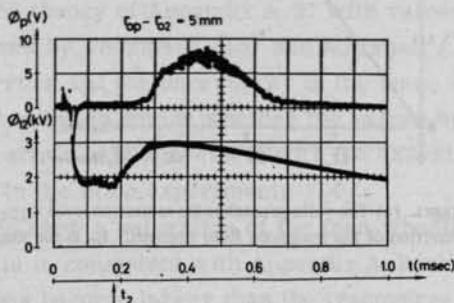


FIG. 12. Same data as in Fig. 11, except $\phi_{b20} = 8$ kV

In Fig. 14 a photograph has been taken of the outer plasma boundary from the top of the vessel during the entire time of the discharge. Here

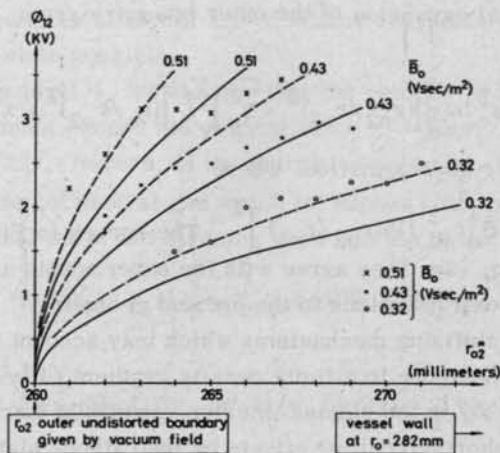


FIG. 13. Plasma voltage ϕ_{12} when probe signal appears at position r_{02}^* . Marks indicate experiments. Full and broken curves given by Eq.(3) for $\bar{n}_0 = 3 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$ and $2 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$.

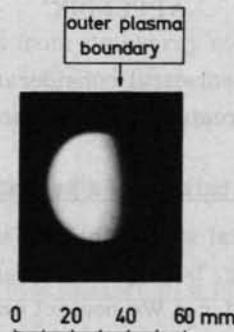


FIG. 14. View of plasma boundary from top of vessel. $\phi_{b10} = 6 \text{ kV}$, $\phi_{b20} = 10 \text{ kV}$, $R_{b2} = 6.05 \Omega$, $r_{02}^* = 0.243 \text{ m}$, $\bar{B}_0 = 0.54 \text{ Vsec/m}^2$.

the centrifugal expansion is about 1 mm. Kerr cell pictures with exposure times of 1 μsec give results similar to that of Fig. 14.

6.B. Discussion

We notice the following results:

- Both the probe measurements and photographs show that the outer boundary is sharply defined within about two millimeters.
- Fig. 12 shows that the radial expansion of the plasma is reversible, because the probe signal begins and ends at about the same voltage $\phi_{12} \approx 2.5 \text{ kV}$. This is consistent with a stably confined plasma. "frozen" to the magnetic field lines.

(iii) The centrifugal expansion of the outer boundary from r_{o2} to r_{o2}^* yields /18, 11/

$$(r_{o2}^*/r_{o2})^2 = 1 + x_o^2 \ln \left\{ \left[(r_{o2}^*/r_{o2})^2 + x_o^2 \right] / \left[(r_o/r_{o2})^2 + x_o^2 \right] \right\} \quad (3)$$

in the long cylinder approximation, where

$2x_o^2 \approx \mu_0 n_o m \phi_{12}^2 / B_o^4 r_{o2}^2 \left[\ln(r_{o2}/r_{o1}) \right]^2$. The curves in Fig. 13 are calculated from eq. (3). They agree with the experiments as far as can be expected from extrapolations to the present geometry.

(iv) There are stabilizing mechanisms which may account for the present results, such as those due to a finite density gradient /19/ and to magnetic inhomogeneities /20/ in the plasma interior, and finite Larmor radius effects /21/ and short-circuiting effects by the cathode plate at the outer plasma boundary.

APPENDIX¹

We summarize some theoretical considerations of the momentum and heat balance which will be treated in detail elsewhere.

A. 1. Momentum balance of a partially ionized plasma

We consider a cylindrical shell of plasma which is uniform in the axial z direction of a strong, homogeneous magnetic field B , and has the inner and outer radii r_1 and r_2 . We neglect energy losses due to ion-ion collisions, ion-wall interactions and ionization compared to those by collisions between ions and neutrals. This holds when the mean free path for ion-neutral collisions is short compared to the macroscopic dimensions. For an axial length L and in a stationary state, the equation of motion yields a radial current

$$I = 2\pi r L m n_n \sigma v^2 (1 + \delta) / B; \quad \sigma_{in} + \sigma_{ex} = \sigma \quad (A. 1)$$

Here $m = m_i + m_e$, n and n_n are the densities of ions and neutrals, σ_{in} and σ_{ex} are the cross sections for elastic and charge exchange collision, v is the azimuthal plasma velocity, and δ represents the thermal contribution to the collision rate which is of order unity. Eq. (A. 1) shows that the frictional drag vanishes both at low and high ionization degrees and has a maximum at some intermediate state. The discharge current should

¹ The appendix is due to one of the authors (B. L.) of this paper.

therefore exceed a critical level, I_c , to make a transition from a lowly to a fully ionized state possible.

To deduce the level I_c we assume that the velocity of the partially ionized plasma cannot exceed the critical value $v_c = (2e\phi_i/m_i)^{1/2}$ proposed by Alfvén [22]. Here ϕ_i is the ionization potential. We further consider the circulation of neutral gas which is "kicked out" by the moving plasma to the vessel walls and streams back into the plasma. Then,

$$I_c \approx \pi(r_2 + r_1)Lmn_o w_w v_c S / 4BW(1 - W/W_o), \quad (A. 2)$$

provided that

$$K \equiv 8\sigma n_o (W/S) (W_o/W - 1) (v_c/w_w) (1 + \delta) \gg 1, \quad (A. 3)$$

where n_o is the density of neutral gas molecules before the start of the discharge, w_w is the thermal velocity of the neutrals at the wall temperature, W and W_o are the volumes of the plasma and the vessel, and S is the surface of the plasma.

If the plasma is released from its energy source, the velocity decays as

$$v(t)/v(0) = 1 / \left[1 + n_o \sigma (1 + \delta) (1 - \chi) v(0) t / (1 + K\chi) \right] \quad (A. 4)$$

when $\chi = nW/2n_o W_o$ is nearly constant.

A. 2. Momentum and heat balance of a fully ionized plasma

A. 2. a. The total energy balance

The energy balance in the device of Fig. 1 depends on several effects:

(i) Transverse effects.

In the direction across the magnetic field there are losses due to the dissipation of momentum by viscous forces, due to the transport of particles by diffusion and of heat by thermal conduction. Heat is generated by viscous dissipation.

(ii) Longitudinal effects.

Ions and electrons escape along the magnetic field lines to the end insulators. A thin Debye sheath is formed here, as well as a thin neutral gas layer arising from recombination of the plasma particles. The escaping ions and electrons are assumed to have the same temperature T and the energy $\frac{1}{2}mv_w^2 + 3kT + e\phi_i$ per pair, where v_w is the velocity of rotation at $r = r_w$.

In a stationary state the escaping particles are balanced by an equal back-flux of plasma, created by ionization in the partially ionized boundary layer. Here the re-ionized ion-electron pairs receive the energy $mv_w^2 + e\phi_i$ from the discharge. The energy dissipation in the latter is somewhat increased by radiation losses and ion-neutral collisions. The energy balance is slightly modified if dissociation is included.

A. 2. b. The plane slab

We summarize earlier results /23/ for a plane slab of constantly density n , situated between two electrodes at $x = \pm d$ and immersed in a strong and homogeneous magnetic field B in the z direction. There is a uniform current density i in the x direction which keeps the plasma at the stationary velocity v and temperature T . A narrow boundary layer near the electrodes is excluded from the analysis. Both v and T are assumed to be much smaller near $x = \pm d$ than at the centre $x = 0$, where they have the values v_0 och T_0 .

The viscosity and heat conductivity in the transverse direction are given by

$$\mu^* = k_1 n^2 A^{3/2} (\ln \Lambda) / B^2 \sqrt{T} \equiv c_1 / \sqrt{T} \quad (A. 5)$$

and

$$\lambda^* = k_2 n^2 A^{1/2} (\ln \Lambda) / B^2 \sqrt{T} \equiv c_2 / \sqrt{T}, \quad (A. 6)$$

where $k_1 = 3.39 \times 10^{-48}$ and $k_2 = 1.87 \times 10^{-43}$ in Mks-units with values given by Thompson /15/ and Marshall /16/. The values given by Spitzer /17/ are both 8 times larger. In eqs. (A. 5) and (A. 6) Λ is the ratio between the Debye distance and the impact parameter, A is the mass number and the charge number $Z = 1$.

With $\alpha^4 = (iB)^2 / 2c_1 c_2$, $\chi = \alpha x$ and $\chi_d = \alpha d$ we obtain

$$F(\chi) \equiv \sqrt{T} / \sqrt{T_0} = 1 - \frac{\chi^4}{3 \cdot 4} + \frac{\chi^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} + \dots = \sqrt{2} (-\frac{1}{4})! \sqrt{\chi} J_{-1/4} \left(\frac{1}{2} \chi^2 \right) \quad (A. 7)$$

$$V(\chi) - v/v_0 = 1 - L(\chi) / L(\chi_d); \quad L(\chi) = \frac{\chi^6}{3 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{\chi^{10}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10} - \dots \quad (A. 8)$$

The first zero of F is $\chi = 2.00$, and we put $\chi_d \approx 2$. The ratio between the energy of the fluid motion and the thermal energy of the ions at $x = 0$ is

$$\theta_\perp = 2m_p k_2 L^2 (\chi_d) / 3k k_1, \quad (A. 9)$$

where m_p is the proton mass and $\theta_\perp = 6.9$ with the values by Thompson and

Spitzer. In this connection we mention the flat disc approximation, where the plasma is situated between two insulators being perpendicular to the z axis. If their separation is small compared to d , conditions become nearly uniform in the x direction. The temperature and velocity distributions are then given by $F \approx 1$ and $V \approx 1$, and not by eqs. (A. 7) and (A. 8).

A. 2. c. General assumptions in the case of an inhomogeneous magnetic field

With the uncertainty of an extrapolation from a plane slab to more complicated geometries, we apply the results of sections A. 2. b and A. 2. a to Fig. 1. We introduce a radial coordinate x where $x = -2$ corresponds to $r = r_{01}$ and $x = +2$ to $r = r_{02}$.

The thermal conductivity is high along a field line inside the plasma. All electrons which are reflected in the Debye sheaths at the insulators preserve their energy. The temperature is therefore nearly constant along a field line. Further, the angular velocity of rotation is also constant along such a line. The temperature and velocity fields are then given by

$$T = T_0 F^2(x), \quad v = v_0 (r/r_0) V(x), \quad (\text{A. 10})$$

where F and V are not identical with expressions (A. 7) and (A. 8). The latter solutions are better approximations to F and V when the transverse losses dominate the longitudinal than when the opposite is true.

We also introduce

$$\theta = m_i v_0^2 / 3kT_0 \quad (\text{A. 11})$$

which should approach eq. (A. 9) in the limit of small longitudinal losses.

The longitudinal balance of forces yields a density distribution

$$n = n_0 \exp \left[-\frac{3}{4} \theta (V/F)^2 (1 - r_w^2/r_0^2) \right] \quad (\text{A. 12})$$

along a field line.

A. 2. d. The voltage limitation

When the plasma velocity v_w at the insulator surface approaches the critical velocity v_c of section A. 1 we expect a violent ionization process to take place in the neutral layer close to the surface. A further increase in the power input will result in an intensified damage of the surface, and

not into a further increase in the plasma velocity. The voltage ϕ_{12} between the electrodes should therefore be limited to the value [3, 23]

$$\phi_{12c} = v_{oc} \int_{r_{01}}^{r_{02}} VB_0 dr; \quad v_{oc} = v_c / [V(r_w/r_o)]_{\max}. \quad (A.13)$$

The integration takes place across the field B_0 in the equatorial plane.

A.2.e. The momentum losses

(i) Transverse losses.

From the solution of section A.2.b we deduce an expression for the moment of force produced by viscosity. A corresponding time constant τ is obtained by dividing the moment of force by the angular momentum of the plasma. The result is

$$1/\tau_{\perp} = 16 \sqrt{2k_1 k_2} \bar{n}_o (\ln \Lambda) / m_p (r_{02} - r_{01})^2 \bar{B}_o^2 v_o \bar{V}. \quad (A.14)$$

For a density gradient n' a transverse diffusion of particles will add a contribution $v n' / n v' \sqrt{\Lambda \tau_{\perp}}$ to the expression (A.14). In the case of Bohm diffusion [24] the same contribution would become $10^4 \omega_e v n' / 32 \nu_{ei} n v' \sqrt{\Lambda \tau_{\perp}}$, where ω_e is the electron Larmor frequency and ν_{ei} the electron-ion collision frequency. When the diffusion is classical and a high plasma density is maintained at the electrodes, the transverse time constant should be given by eq. (A.14). Finally, the radial plasma current will produce a moment of force. It is negligible compared to that from viscosity, provided that the ion Larmor radius is much smaller than $r_{02} - r_{01}$.

(ii) Longitudinal losses.

The longitudinal losses yield a corresponding time constant τ_{\parallel} ;

$$1/\tau_{\parallel} \approx \frac{2(1+1/\sqrt{2\pi})}{\sqrt{3\theta}} v_o \overline{(r_w^2/r_o^2)(B_o/B_w)(F/L)} \left[1 + e\phi_i/mv_o^2(r_w^2/r_o^2)V^2 \right].$$

$$\cdot \exp(-\alpha\theta), \quad (A.15)$$

where bars indicate mean values over the plasma volume,

$$\exp(-\alpha\theta) = \exp \left[-\frac{3}{4}(V/F)^2 (1 - r_w^2/r_o^2) \right], \quad (A.16)$$

L is the mean extension along the magnetic field, and B_w is the field at the insulator surface.

(iii) The time constant.

The time constant τ of the angular momentum is given by

$$1/\tau = 1/\tau_L + 1/\tau_H \quad (A.17)$$

If the plasma is released from its energy source at $t = 0$, the equation of motion gives a velocity which decays nearly exponentially with the time constant τ . This applies as long as $t^2/2\tau^2 \ll 1$.

A. 2. f. The heat balance

The heat balance of the fully ionized plasma region includes heat production by viscous friction, heat losses by thermal conduction across the magnetic field, heat production by frictional drag at the insulators and heat losses by particles escaping to the insulators. The result becomes

$$K_{H'} \theta_L (B_0/B_w) (r_w^2/r_o^2) (FV^2) (\theta_{H'} - \theta) kT_o \approx \theta - \theta_L \quad (A.18)$$

where

$$K_{H'} = \frac{3(1 + 1/\sqrt{2\pi}) \sqrt{k} (r_{02} - r_{01})^2 \bar{B}_o^2 \exp(-\alpha\theta)}{8A \sqrt{m_p} k_2 (\ln \Lambda) \kappa_d [-F'(x_d)] \bar{n}_o L} \quad (A.19)$$

and

$$\theta_{H'} = 2 \left[\bar{F}^3 / (r_w^2/r_o^2) (FV^2) \right]_\infty \quad (A.20)$$

In eq. (A.20) mean values should be taken in the limit of negligible transverse losses, where the distributions F and V become flattened compared to the solutions (A.7) and (A.8). The heat balance is mainly governed by transverse losses when θ is close to θ_L and by longitudinal losses when it is close to $\theta_{H'}$.

The heating power by viscous friction can be increased by a factor of about $(n_r + 1)^2$ compared to the heat losses if n_r co-axial, ring-shaped conductors are placed at the insulator surfaces.

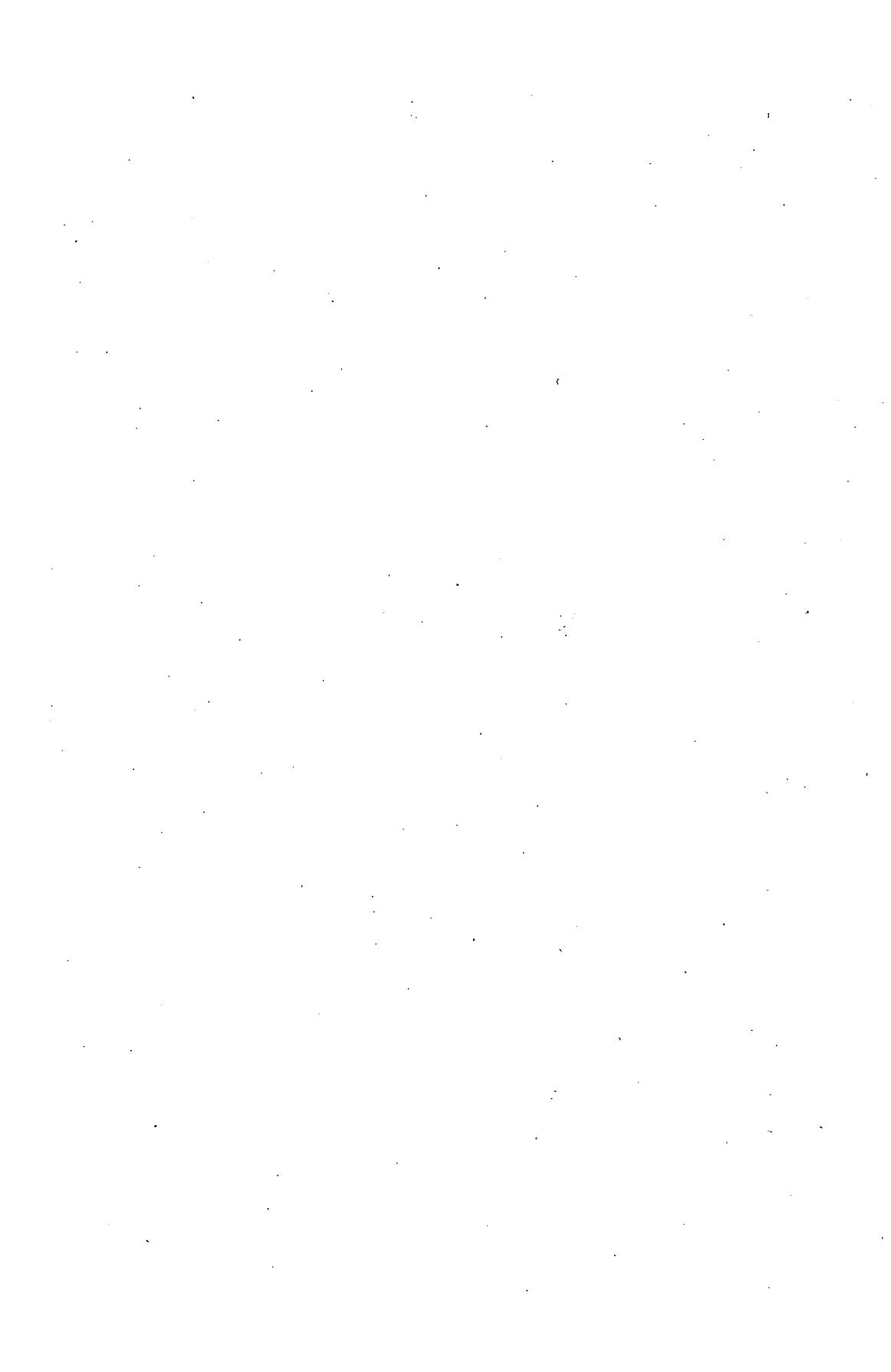
The authors are indebted to Mr. R. Ekman, Mr. E. Christoffersen, Mr. T. Wellroth and Mr. H. Sannemark for valuable help with the construction of the experimental equipment. The important assistance of Mr. G. Hägerström, Mr. G. Kindberg and Mr. L. Jonsson is also gratefully acknowledged.

This work has been supported financially by the Swedish Atomic Research Council, the Research Institute of National Defence and the Swedish Atomic Energy Company.

References.

1. WILCOX, J. M., Rev. Mod. Phys., 31 (1959) 1045.
2. LEHNERT, B., in Progress in Nuclear Energy, Ser. XI, Plasma Physics and Thermonuclear Research (LONGMIRE, C. L., TUCK, J. L. and THOMPSON, W. B., eds.) Pergamon Press, London, New York, Paris, Los Angeles (1963) 201-246.
3. LEHNERT, B., in Dynamics of Charged Particles, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam (1964) 149-169 and 212-215.
4. INSINGER, F. G., in A Rotating Plasma Experiment, thesis, Drukkerij Pasmans, v. d. Vennestraat 76, Hague (1965).
5. LEHNERT, B., Journ. Nucl. En., C, 1 (1959) 40.
6. ANDERSON, O. A., BAKER, W. R., BRATENAH, A., FURTH, H. P. and KUNKEL, W. B., Journ. Appl. Phys., 30, (1959) 188.
7. BOYER, K., HAMMEL, J. E., LONGMIRE, C. L., NAGLE, D., RIBE, F. and RIESENFIELD, W. B., Proc. Sec. U.N. Int. Conf. on the Peaceful Uses och At. En., United Nations, New York, 31 (1958) 319.
8. BONNEVIER, B. and LEHNERT, B., Arkiv Fysik, 16 (1960) 31.
9. LEHNERT, B., Rev. Mod. Phys., 32 (1960) 1012; Arkiv Fysik, 18 (1960) 251.
10. BERGSTRÖM, J., HOLMBERG, S. and LEHNERT, B., Nuclear Fusion, Suppl., Part 2 (1961) 705.
11. BERGSTRÖM, J., HOLMBERG, S. and LEHNERT, B., Arkiv Fysik, 23 (1963) 543.
12. BERGSTRÖM, J., HOLMBERG, S. and LEHNERT, B., Arkiv Fysik, 25 (1963) 49.
13. BONNEVIER, B. Private communication (1965).
14. BAKER, D. A. and HAMMEL, J. E., Phys. Fluids, 4 (1961) 1549.
15. THOMPSON, W. B., Reports on Progress in Physics, XXIV (STICKLAND, A. C. ed.) Inst. of Phys. and Phys. Soc. (1961) 363-424.
16. MARSHALL, W., AERE Rep. T/R 2247, Harwell (1957); AERE Rep. 2352, 2419, Harwell (1958).
17. SPITZER, L., Physics of Fully Ionized Gases, Interscience Publ., New York, London, Sec. ed. (1962).
18. LEHNERT, B., Nuclear Fusion, 1 (1961) 125.
19. LEHNERT, B., Phys. Fluids, 4 (1961) 525, 847, 1053; Nucl. Fusion, Suppl., Part 1 (1962) 135.
20. LEHNERT, B., Phys. Fluids, 5 (1962) 432; Journ. Nucl. En., C, 5 (1963) 259.
21. ROSENBLUTH, M. N., KRALL, N. A. and ROSTOKER, N., Nucl. Fusion, Suppl., Part 1 (1962) 143.

22. ALFVÉN, H., On the Origin of the Solar System, Oxford Univ. Press (1954) 30.
23. LEHNERT, B., Arkiv Fysik, 26 (1964) 407.
24. BOHM, D., in The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields (GUTHRIE, A. and WAKERLING, R.K. eds.) McGraw-Hill, New York - Toronto - London (1949) 201.



STABILITY AND DIFFUSION

(Session IV)



НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ТОРОИДАЛЬНЫХ РАЗРЯДАХ

Б.Б. КАДОМЦЕВ и О.П. ПОГУЦЕ
ИНСТИТУТ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ им. И.В. КУРЧАТОВА, МОСКВА
СССР

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

INSTABILITY AND RELATED MACROSCOPIC EFFECTS IN TOROIDAL DISCHARGES. The purpose of the paper is to consider from a common point of view the principal types of instability of the plasma in toroidal discharges and the macroscopic effects resulting from the non-linear plasma oscillations building up due to the instability. First discussed is the linear problem of the stability of an axially-symmetrical discharge (toroidality being simulated by the boundary conditions at the end joints). A classification of the instabilities is given on the basis of the kinetic equation with consideration of the collisions and the finiteness of the ion Larmor radius. The results of the solution of the linear problem are used as a basis for the subsequent discussion of non-linear processes in the discharge.

In discussing the non-linear problem attention is paid chiefly to the simpler case of a discharge in a strong longitudinal magnetic field, where the plasma pressure is considerably smaller than the pressure of the magnetic field. When neglecting the non-potentiality of the oscillations, only two instabilities remain — the drift instability and the current-convective instability. The latter instability leads to the development of large numbers of "convection cells" in which heat is transferred by convection. In the case of a very strong magnetic field the "convection cells" overlap and the macroscopic heat and particle fluxes may considerably exceed the classical fluxes determined by binary collisions. When the plasma pressure is increased the convection cells cease to overlap, and the macroscopic effect of the current-convective instability becomes small. If the plasma pressure increases further the nature of the unstable oscillations becomes non-potential, and they are associated with a curvature of the lines of force leading to a rearrangement of the magnetic surfaces.

In a low-pressure plasma, the drift instability develops simultaneously with the current-convective instability and has also been considered on the basis of non-linear theory. The interaction of the drift oscillations and the convection cells is also discussed.

INSTABILITES ET EFFETS MACROSCOPIQUES QUI LES ACCOMPAGNENT DANS LES DECHARGES TOROIDALES. Le mémoire a pour objet l'examen, d'un point de vue commun, des types principaux d'instabilité de plasma dans les décharges toroïdales, ainsi que des effets macroscopiques causés par les oscillations non linéaires du plasma dues aux instabilités. Les auteurs examinent d'abord le problème linéaire de la stabilité de la décharge symétrique par rapport à l'axe (on tient compte de la forme toroïdale en imposant des conditions limites aux jonctions des faces) en se fondant sur une équation cinétique qui tient compte des collisions du caractère fini du rayon de Larmor des ions, et ils donnent une classification des instabilités. Les résultats de la solution du problème linéaire servent de base pour l'examen ultérieur des processus non linéaires dans la décharge.

Lors de l'examen du problème non linéaire, les auteurs accordent une importance particulière au cas le plus simple de la décharge dans un champ magnétique longitudinal intense avec une pression du plasma sensiblement inférieure à la pression magnétique. Si l'on néglige la non-potentialité des oscillations, il ne reste que deux instabilités — l'instabilité de dérive et l'instabilité à convection de courant. Les auteurs montrent que l'instabilité à convection de courant entraîne la formation d'un grand nombre de cellules de convection, dans lesquelles la chaleur se transmet par convection. Dans le cas d'un champ magnétique très intense, les cellules de convection se recouvrent l'une l'autre et les flux macroscopiques de chaleur et de particules peuvent excéder dans une grande mesure les flux classiques, déterminés par des collisions binaires. En cas d'augmentation de la pression du plasma, les cellules de convection ne se recouvrent plus et l'effet macroscopique de l'instabilité à convection de courant devient plus faible. Si la pression du plasma croît encore, les oscillations

instables deviennent non-potentielles et s'accompagnent d'une déformation des lignes de force, à la suite de laquelle il se produit une transformation de la structure des surfaces magnétiques.

En plus de l'instabilité à convection de courant, il se développe dans le plasma à basse pression une instabilité de dérive, dont on a étudié la non-linéarité: Les auteurs ont examiné l'interaction des oscillations de dérive et des cellules de convection.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ТОРОИДАЛЬНЫХ РАЗРЯДАХ. Рассматриваются с единой точки зрения основные виды неустойчивости плазмы в тороидальных разрядах и те макроскопические эффекты, к которым приводят развивающиеся за счет неустойчивости нелинейные колебания плазмы. Прежде всего рассматривается линейная задача об устойчивости осесимметричного разряда (тороидальность имитируется граничными условиями свивки на торцах) на основе кинетического уравнения с учетом столкновений и конечности ларморовского радиуса ионов, дается классификация неустойчивостей. Результаты решения линейной задачи служат основой для последующего рассмотрения нелинейных процессов в разряде.

При рассмотрении нелинейной задачи основное внимание уделяется более простому случаю разряда в сильном продольном магнитном поле, когда давление плазмы значительно меньше давления магнитного поля. Если пренебречь непотенциальностью колебаний, то остается только две неустойчивости — дрейфовая и токово-конвективная. В работе показано, что токово-конвективная неустойчивость приводит к развитию большого числа конвекционных ячеек, в которых тепло переносится конвекцией. При очень сильном магнитном поле конвекционные ячейки перекрываются между собой, и макроскопические потоки тепла и частиц могут значительно превосходить классические потоки, определяемые парными столкновениями. При увеличении давления плазмы конвекционные ячейки перестают перекрываться, и макроскопический эффект от токово-конвективной неустойчивости становится малым. При еще большем давлении плазмы неустойчивые колебания становятся непотенциальными и сопровождаются искривлением силовых линий, вследствие которого происходит перестройка магнитных поверхностей.

Наряду с токово-конвективной неустойчивостью в плазме низкого давления развивается дрейфовая неустойчивость, для которой также проведено нелинейное рассмотрение. Рассмотрено взаимодействие дрейфовых колебаний с конвекционными ячейками.

INESTABILIDAD Y EFECTOS MACROSCÓPICOS CONEXOS, EN LAS DESCARGAS TOROIDALES. La presente memoria tiene por objeto el examen, con un criterio uniforme, de los aspectos fundamentales de la inestabilidad del plasma en las descargas toroidales y de los efectos macroscópicos que originan las oscilaciones no lineales del plasma, que se desarrollan como consecuencia de la inestabilidad. En primer lugar se presenta el examen del problema lineal relativo a la estabilidad de la descarga de simetría axial (se simula la forma toroidal por medio de las condiciones de contorno de la unión en los extremos); tomando como base la ecuación cinética y teniendo en cuenta las colisiones de los iones y el carácter finito del radio giromagnético de dichos iones, se hace una clasificación de las inestabilidades. Los resultados obtenidos como solución del problema lineal sirven de base para el examen ulterior de los procesos no lineales, en la descarga.

En el examen del problema no lineal se considera, fundamentalmente, el caso más sencillo de la descarga en un campo magnético longitudinal intenso, cuando la presión del plasma es considerablemente menor que la del campo magnético. Si no se tiene en cuenta la independencia, respecto del potencial, de las oscilaciones, quedan sólo dos clases de inestabilidad: la de deriva y la de corriente convectiva. En la memoria se muestra que esta última inestabilidad origina el desarrollo de gran número de celdas de convección, en las cuales el calor se transmite por convección. Si el campo magnético es muy intenso, las celdas de convección se superponen unas con otras y los flujos macroscópicos, de calor y de partículas, pueden ser considerablemente mayores que los flujos clásicos determinados por las colisiones binarias. Al aumentar la presión del plasma, las celdas de convección dejan de superponerse y el efecto macroscópico de la inestabilidad por corriente convectiva se hace pequeño. A presiones del plasma aún mayores, las oscilaciones inestables del plasma son independientes del potencial y van acompañadas de una curvatura de las líneas de fuerza, como consecuencia de lo cual se produce un reordenamiento de las superficies magnéticas.

Junto con la inestabilidad por corriente convectiva, en un plasma de baja presión se desarrolla una inestabilidad por deriva, de la cual también se presenta en la memoria un examen, basado en la teoría no lineal. Se examina asimismo la interacción de las oscilaciones por deriva con las celdas de convección.

I. Введение

Тороидальные разряды принадлежат к одному из основных направлений в исследованиях по термоизоляции высокотемпературной плазмы. Естественно, что они привлекают к себе большое внимание как экспериментаторов, так и теоретиков. В частности, в последние годы проводились интенсивные теоретические исследования устойчивости плазмы в линейном приближении, которые либо непосредственно относились к тороидальным системам, либо могли быть применены к ним с некоторыми оговорками.

Эти исследования показали, что в неоднородной плазме наряду с гидромагнитными неустойчивостями существует широкий класс дрейфовых неустойчивостей, связанных с наличием дрейфовых потоков. Хотя эти исследования не вполне закончены, и некоторые тонкие эффекты, связанные, в частности, именно с тороидальностью систем и неоднородностью магнитного поля, не рассмотрены, грубая картина дрейфовых неустойчивостей уже имеется, и можно поставить вопрос о том, какую же угрозу для тороидальных систем представляют неустойчивости и какие требования они предъявляют к экспериментальным установкам.

Исследование устойчивости плазмы в линейном приближении не дает прямого ответа на этот вопрос, поскольку условия стабилизации некоторых из дрейфовых неустойчивостей являются довольно жесткими, и поэтому трудно надеяться на возможность отыскания тороидальной конфигурации, свободной от всех неустойчивостей. Однако инкремент нарастания многих неустойчивостей сравнительно мал, и поэтому за счет нелинейности амплитуда колебаний, а следовательно, и макроскопический усредненный эффект должен быть невелик. Чтобы вполне убедиться в этом, желательно провести последовательное нелинейное рассмотрение. Такое рассмотрение удается провести для некоторых из дрейфовых неустойчивостей. Однако на первой стадии исследования более целесообразным представляется не вывод более или менее точных соотношений для коэффициентов усиленной диффузии и теплопроводности, связанных с той или иной неустойчивостью, а некоторая грубая классификация неустойчивостей по степени их опасности, основанная на порядковых оценках, использующих соображения размерности. Тем самым можно будет определить, какие из неустойчивостей требуют наибольшего внимания.

Настоящий доклад как раз и ставит своей целью оценку роли различных неустойчивостей плазмы в тороидальных системах по их макроскопическим эффектам. Пункт 2 содержит сводку, в основном, известных результатов линейной теории дрейфовых неустойчивостей, которые лишь слегка модифицированы на предмет учета эффекта пере-

крещенности силовых линий. В пункте 3 кратко рассмотрена нелинейная конвекция плазмы, развивающаяся за счет неустойчивостей, и даны оценки коэффициентов диффузии и теплопроводности. В пункте 4 обсуждаются некоторые следствия, вытекающие из проведенного рассмотрения.

2. Неустойчивость

2.1. Гидромагнитные неустойчивости

Напомним прежде всего, какие известные виды гидромагнитных неустойчивостей могут развиваться в тороидальных системах.

Для простоты мы рассмотрим прямой цилиндрический столб радиуса a и длины L , а тороидальность будем имитировать условиями сшивки на торцах. Полученные на такой модели результаты с небольшими изменениями могут быть перенесены на тороидальные системы довольно общего вида.

Как известно, рассмотрение в рамках идеальной гидродинамики показывает, что шнур с током подвержен двум видам неустойчивостей - винтовой и желобковой (конвективной). Первая неустойчивость стабилизируется при выполнении условия Шаффранова-Крускала

$$\frac{H_3}{H_2} < \frac{2\pi a}{L}, \quad (I.1)$$

где H_2 - продольное, H_3 - азимутальное магнитное поле.

Вторая неустойчивость не развивается, если выполнено условие Сайдема:

$$-\frac{8\pi}{a^2} \frac{dp}{dz} < \frac{2}{4} \left(\frac{d \ln q}{dz} \right)^2, \quad (I.2)$$

где p - давление плазмы, $q = \frac{2\pi z H_2}{L H_3}$ - величина, равная отношению шага силовой линии к длине L . Значение q на краю шнура согласно (I.1) можно назвать "коэффициентом запаса" по винтовой неустойчивости.

Мы будем считать, что коэффициент q составляет величину порядка нескольких единиц, и так как отношение $2\pi a/L$ из геометрических и конструктивных соображений не превышает 1/2-1/3, то отношение $H_3/H_2 \sim 10^{-1} \ll 1$.

Введем в рассмотрение еще "шир" $\theta = \frac{H_3}{H_2} \frac{q}{9} \frac{dq}{dz}$, т.е. величину, характеризующую эффект перекрещенности силовых линий.

Предположим далее, что давление плазмы значительно меньше давления магнитного поля, т.е. $\beta = 8\pi p/H_2 \ll 1$. Это допущение связано, в частности, с отсутствием эффективных методов нагрева плазмы, которые могли бы обеспечить большое значение

β, а с другой стороны, согласно (1.2) оно гарантирует нам отсутствие желобковой неустойчивости.

2.2. Дрейфовые неустойчивости.

2.2.1. Дрейфовые волны. Неустойчивости дрейфового типа развиваются на возмущениях, сильно вытянутых вдоль магнитного поля. Для цилиндрического столба плазмы возмущения следует выбрать в виде $\exp(-i\omega t + \frac{2\pi n}{L} + i\vartheta\varphi)$. Производная вдоль силовых линий для таких возмущений равна $\vec{H}_P = \frac{H_0}{r}(m-nq)$. В тех точках $r = r_0$, где $q(r_0) = m/n$, эта производная обращается в нуль, т.е. возмущение оказывается постоянным вдоль силовых линий. Именно вблизи таких точек и развиваются дрейфовые возмущения с данными m, n . Полагая $\vec{H}_P = iH_k$, получим для проекции волнового числа на магнитное поле k_u вблизи точки $r = r_0$: $k_u = k_y \theta x/a$, где $k_y = m/r_0$, $x = r - r_0$. Если θ не очень мало, что мы и предположим в дальнейшем, то нам достаточно ограничиться случаем малых x .

Наибольшую опасность представляют потенциальные колебания $E = -v\varphi$, при которых силовые линии магнитного поля остаются неподвижными. Если продольная фазовая скорость волн ω/k_u значительно меньше тепловой скорости электронов $v_e = \sqrt{T/m_e}$, то у электронов успевает установиться распределение Больцмана вдоль силовых линий, т.е. возмущение их плотности n'_e равно

$$n'_e = \frac{e\varphi}{T} n. \quad (2.1)$$

Если, с другой стороны, $\omega/k_u > v_e = \sqrt{T/m_e}$, то можно пренебречь продольным движением ионов, а их попоперечная скорость при $\omega \ll \Omega_i = \frac{eH}{m_i c}$ равна дрейфовой $\bar{v}_d = c[\bar{h}\varphi]/H$, где $\bar{h} = \bar{H}/H$. Если считать приближенно $H \approx \text{const}$, то из уравнения непрерывности для ионов получим:

$$n'_i = - \frac{k_y c}{\omega H n} \frac{dn}{dr} \varphi. \quad (2.2)$$

Используя условие квазинейтральности $n'_i = n'_e$, получим согласно (2.1), (2.2):

$$\omega = \omega_* = - \frac{k_y c T}{e H n} \frac{dn}{dr}. \quad (2.3)$$

Таким образом, в этом приближении возмущение плотности распространяется в виде волны поперек градиента плотности в азимутальном направлении с частотой ω_* . По порядку величины

$\omega_* \sim \frac{m}{a^2} \beta: v_e$, где $\beta: = v_e/\Omega_i$ — средний ларморовский радиус ионов. Такие волны называются дрейфовыми [2]. Продольная

фазовая скорость дрейфовых волн $\omega_{\lambda_n} \sim v_{\parallel} \beta / \theta x$, следовательно, $\omega_{\lambda_n} > v_{\parallel}$ при

$$x < \beta / \theta . \quad (2.4)$$

При $x > \beta / \theta$ ионы также успевают прийти в равновесие вдоль силовых линий, и если $\frac{d \ln T}{d \ln n} < 2$ (см. [6]), то возмущение плазмы возникает только при наличии искривления силовых линий. В этом случае неустойчивость, если она имеет место, является магнитогидродинамической непотенциальной, т.е. она сводится либо к винтовой, либо к желобковой, либо представляют собой их комбинацию (с учетом конечной проводимости). Таким образом, условие (2.4) ограничивает область собственно дрейфовых волн.

При учете отброшенных выше диссипативных эффектов дрейфовые волны нарастают во времени. В зависимости от того, какой именно диссипативный эффект играет основную роль, можно говорить о том или ином виде дрейфовой неустойчивости.

2.2.2. Токово-конвективная (спиральная) неустойчивость

Токово-конвективная неустойчивость развивается при наличии продольного тока [1]. Рассмотрим сначала столкновительный случай. При этом неустойчивость связана с попутеренным градиентом проводимости. Если колебания потенциальны, то магнитное поле не возмущается, и следовательно, возмущение продольного тока $j'_{\parallel} = 0$. Пренебрегая продольным ионным током, и пользуясь гидродинамическим уравнением движения для электронов, можно найти связь между возмущениями плотности n'_e , потенциала φ и температуры T' . Выражая затем T' через φ с помощью уравнения теплопроводности, можно в квазиклассическом приближении получить следующее дисперсионное уравнение:

$$1 - \frac{\omega^*}{\omega} \left(1 + i \mu \frac{u}{v_e} \frac{1}{\lambda_e} \right) - \frac{\omega_{*T}}{\omega + i \chi_{\parallel} \chi_{\perp}^2 + i \chi_{\perp} \chi_{\parallel}^2} \left(1 + i \omega \frac{u}{v_e} \frac{1}{\lambda_e} \right) = 0, \quad (2.5)$$

где $\lambda_e = v_e \tau_e$ — средний свободный пробег электронов, u — направленная (токовая) скорость, равная $u = j_{\parallel} / e n$, $\mu = \frac{d \ln \sigma}{d \ln n}$, $\alpha = \frac{d \ln \sigma}{d \ln T}$, $\sigma = e^2 n \tau_e / m_e$ — электропроводность, $\omega_{*T} = - \frac{\chi_{\perp} d T}{e^2 N d \tau}$, χ_{\parallel} — продольная (электронная), χ_{\perp} — попутерчная температуропроводность.

В полностью ионизованной плазме $\alpha = 3/2$, а μ представляет собой малую величину $\sim 1/20$, она возникает за счет зависимости кулоновского логарифма от плотности. Поэтому при малых x ,

когда продольная теплопроводность несущественна, в первую очередь развивается неустойчивость на возмущениях температуры. При этом

$$\omega = \omega_* + \omega_{*T} + i\omega_{*r}, \frac{\alpha u}{v_e \lambda_e} + i\omega_* \mu \frac{u}{v_e} \frac{1}{\lambda_e}. \quad (2.6)$$

В этом выражении величина $\lambda_e < 1$, так как в противном случае нельзя пользоваться гидродинамическим приближением. С учетом продольной теплопроводности неустойчивость для каждой данной пары чисел m, n развивается только в узкой области

$$x < 2 \xi^{1/3} m^{-2/3}, \quad (2.7)$$

где $\xi = \frac{c^2}{\omega_*^2 \lambda_e^2 \theta^2}$, $\omega_*^2 = 4\pi e^2 n / m_e$. При не слишком малой плотности n величина $\xi \ll 1$, так что $x \ll 2$.

Поперечная теплопроводность ($\chi_1 = \chi_c = \beta \frac{\alpha u}{\lambda_e}$) приводит к тому, что при

$$\beta > \frac{1}{3} \xi^{1/3} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$$

неустойчивость на возмущениях температуры стабилизируется.

При этом следует учитывать более слабую неустойчивость на возмущениях плотности. В силу того, что ее область локализации $x \sim \beta/\theta$ может превышать (2.7), она может оказаться даже более существенной, чем температурная неустойчивость. Кроме того, оказывается, что при увеличении λ_e начинает играть роль продольная вязкость электронов, которую можно учесть в (2.6), добавляя к μ величину $(\lambda_e)^{-2} > 1$. При $\lambda_e \gtrsim 1$ происходит переход к бесстолкновительной диссипации на затухании Ландау. При этом в линейном приближении выражение для частоты колебаний имеет вид:

$$\omega = \omega_* + i\sqrt{\xi} \omega_* \left(\frac{u}{v_e} - \frac{i}{2} \frac{\omega_*}{\lambda_e v_e} \frac{d \ln T}{d \ln n} \right). \quad (2.8)$$

Сравнивая это соотношение с (2.6), мы видим, что бесстолкновительная диссипация соответствует $\mu \approx \sqrt{\xi} \lambda_e$. Таким образом, при $\lambda_e \sim 1$ происходит непрерывный переход от столкновительной диссипации к бесстолкновительной.

Наряду с продольным током к токово-конвективной неустойчивости приводит продольный градиент плотности, который можно учесть подстановкой в выражение для частоты вместо μ величины $v_e \lambda_e \frac{d \ln n}{d \xi} I$.

Для рассматриваемых неустойчивых колебаний, инкремент которых мал по сравнению с частотой, может иметь место стабилизирую-

I) Этот эффект для слабоионизованной плазмы был обнаружен В.Л.Вдовиным.

ший эффект за счет конечного лармировского радиуса ионов. Происхождение этого эффекта можно пояснить следующим образом. Рассмотрим некоторый волновой пакет, близкий к плоской волне с волновым вектором \vec{k} . Учет конечного лармировского радиуса ионов приводит к изменению реальной части частоты на малую величину $\sim \omega_* k_x^2 \beta_i^2$. Вследствие этого групповая скорость дрейфовой волны $\bar{U}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{x}}$ приобретает малую компоненту $\sim k_x \beta_i^2 \omega_*$ в радиальном направлении, и за время $t \sim x/U_g \sim \frac{x}{k_x \beta_i^2 \omega_*}$ волновой пакет уходит из области локализации в область поглощения. Так как $k_x \gtrsim x'$, то возмущения не успевают заметно увеличить амплитуду, если

$$\gamma/\omega < \beta_i^2/x^2 \lesssim k_x^2 \beta_i^2. \quad (2.9)$$

В действительности, если γ/ω не зависит от k_x , то условие устойчивости может быть даже мягче. Дело в том, что частота колебаний $\omega = \omega_*$ не является собственной частотой, так как она является функцией x . С учетом продольной инерции ионов эта зависимость еще усиливается, так как к частоте ω_* добавляется слагаемое вида $k_x^2 T/m_e \omega_*$. Вследствие этого компонента волнового вектора k_x возрастает со временем как $\frac{\partial \omega_*}{\partial x} t$. При $x \sim \beta_i/\theta$ и $t \sim l/\gamma$ имеем $k_x \sim \omega_* \theta / \beta_i \gamma$, так что условие стабилизации принимает вид:

$$\gamma/\omega < \theta. \quad (2.9a)$$

2.2.3. Инерционная дрейфовая неустойчивость. При уменьшении x все большую роль начинают играть неустойчивости, связанные с инерцией ионов, для которых наличие продольного тока неважно. Если мы для простоты положим $T_i = 0$ и в выражении для поперечной скорости ионов учтем их инерцию, то вместо (2.5) получим следующее уравнение:

$$1 - \frac{\omega_*}{\omega} - \frac{\omega_{*T}}{\omega + i \chi_n k_x^2} \left(1 + i \omega \frac{u}{v_e} \frac{1}{k_n \lambda_e} \right) - i \frac{\omega}{\omega_3} = 0, \quad (2.10)$$

где $\omega_3 = \frac{k_n^2}{k_x^2} \omega_i \lambda_e v_e$.

Для простоты мы пренебрегли зависимостью σ от плотности. Из (2.10) при $\omega_3 \gg \omega_*$ получим следующее выражение для частоты:

$$\omega = (\omega_* + \omega_{*T}) (1 - k_x^2 \beta_i^2) - i \chi_n k_n^2 + i \omega_{*T} \frac{\omega u}{v_e k_n \lambda_e} + i \frac{(\omega_* + \omega_{*T})^2}{\omega_3}. \quad (2.11)$$

Отсюда следует, что если

$$\frac{(\omega_* + \omega_{*T})^2}{\omega_3} > \frac{\omega_{*T} \omega u}{v_e k_n \lambda_e}, \quad (2.12)$$

то токовая неустойчивость переходит в так называемую дрейфово-диссипативную неустойчивость, существование которой целиком обус-

ловлено инерцией ионов [3,4]. Условие (2.12) можно переписать следующим образом:

$$x < \beta: \left(\frac{v_0}{\theta} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \right)^{1/3} \quad (2.13)$$

Характерную область локализации инерционной неустойчивости можно получить из условия (2.9), учитывая, что $\gamma/\omega \sim \omega_* / \omega$. В результате находим:

$$x < \beta: \sqrt{\delta} = \beta: \left(\frac{1}{m} \frac{1}{\theta^2} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \frac{\omega^2}{\lambda_* \beta} \right)^{1/2}, \quad (2.14)$$

а соответствующее значение инкремента по порядку величины равно:

$$\gamma \sim \omega_* / \delta \sim \omega / \delta. \quad (2.15)$$

Как следует из (2.14), $x > \beta:$ при $\delta > 1$. С ростом азимутального числа m δ уменьшается, и начиная с некоторого значения m , мы попадаем в область возмущений с локализацией $x < \beta:$, где уравнение (2.10) несправедливо. Используя кинетическое уравнение, можно найти, что в случае $\delta < 1$ ширина локализации по-прежнему определяется выражением (2.14), а инкремент оказывается порядка частоты и равен

$$\gamma \sim \omega \sim \omega_* \sqrt{\delta}, \quad (2.16)$$

т.е. максимальный инкремент для этой неустойчивости достигается при $\delta \sim 1$, $x \sim \beta:$. Выше мы пренебрегали влиянием ионной вязкости. Естественно, что для коротковолновых возмущений $x \sim \beta:$ вязкость должна играть существенную роль. Учет влияния вязкости был произведен с помощью кинетического уравнения с кулоновским членом столкновений. Как известно, он имеет вид дифференциального оператора в пространстве скоростей. Вследствие этого для коротковолновых возмущений ($x \beta: > 1$) эффективная частота столкновений, входящая в коэффициент вязкости $\sim v_i x_i^2 \beta^2$, т.е. больше v_i в $x_i^2 \beta^2$ раз. Это приводит к сильной стабилизации коротковолновых возмущений. В данном случае соответствующее условие стабилизации для возмущений с $x < \beta:$ приближенно сводится к следующему:

$$\theta^2 \gtrsim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \delta^{1/2} \quad (2.16)$$

Аналогичное рассмотрение возмущений с $x > \beta:$ показывает, что вязкость их стабилизирует при условии

$$\theta^2 \gtrsim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \quad (2.17)$$

Рассмотрим теперь как влияет на устойчивость плазмы кривизна силовых линий. Влияние кривизны можно учесть введением эффективной силы тяжести с ускорением $g \sim T/m_e R$, направленным по оси x в сторону убывания плотности. С учетом g в пренебрежении ϵ и χ_n уравнение (2.10) принимает вид:

$$\omega^2 + \omega(i\omega_3 - \omega_{*i}) - i\omega_3\omega_* + \omega_g^2 = 0, \quad (2.18)$$

где $\omega_{*i} = \frac{\kappa_y c T_i}{e H n} \frac{d\eta}{dz}$, $\omega_g^2 = \frac{\kappa_y^2}{\kappa_z^2} g \frac{d\ln n}{dz}$. Здесь мы считаем $T_i \neq 0$.

Из (2.18) при $\omega_3 > \omega_*, \omega_g$, находим:

$$\omega = \omega_* + i \frac{\omega_*^2 + \omega_g^2}{\omega_*} - i \frac{\omega_* \omega_*}{\omega_3}. \quad (2.19)$$

Так как $\omega_g^2/\omega_*^2 \sim \frac{a}{R} (\chi_g)^{-2}$, то влияние силы тяжести оказывается несущественным при $\kappa_z^2 \rho_i^2 > a/R$. Отсюда следует, в частности, что коротковолновые возмущения с $\kappa_z^2 \rho_i^2 > a/R$ не стабилизируются в конфигурациях с минимумом H .

При $\kappa_n \lambda_e \gtrsim 1$ происходит переход с бесстолкновительной плазме, и вместо (2.19) имеем:

$$\omega = \omega_* \left(1 - \kappa_z^2 \rho_i^2 - \frac{a}{R} + \frac{\kappa_n^2 T}{m_e \omega_*^2} \right) + i \sqrt{\pi} \frac{\omega_*^2}{\kappa_n \nu_e} \left(\kappa_z^2 \rho_i^2 + \frac{a}{R} - \frac{\kappa_n^2 T}{m_e \omega_*^2} \right). \quad (2.20)$$

Мы учли здесь малые поправки к частоте за счет инерции ионов.

В выражении (2.20) часть инкремента, соответствующая первому слагаемому $\kappa_z^2 \rho_i^2$ в круглых скобках, отвечает обычной дрейфовой неустойчивости [5]. Условие ее стабилизации можно получить из (2.9), учитывая, что $x \sim \rho_i/\theta$. Оно имеет вид $\theta^2 > m_e/m_i$.

Второе слагаемое в круглых скобках при мнимой части в (2.20) описывает "гравитационную" раскачку дрейфовых волн. Условие стабилизации в этом случае имеет вид:

$$\theta > \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \frac{a}{R}. \quad (2.21)$$

При $\theta > \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$, что мы приняли выше, эта неустойчивость стабилизирована.

2.2.4. Температурная дрейфовая неустойчивость. При малом градиенте плотности возможна раскачка дрейфовых волн, связанная с продольной инерцией ионов. При $\frac{d\ln T}{d\ln n} \gg 1$ соответствующее дисперсионное уравнение имеет вид [2]:

$$\omega^3 = \kappa_z^2 c_s^2 \omega_{*T}, \quad (2.22)$$

где c_s — скорость звука. Согласно (2.22) $\gamma \sim \omega \sim \omega_{*T}$.

Неустойчивость возникает только при $\frac{d\ln T}{d\ln n} > 2$ [6,7]. Неустойчивость этого типа могла бы быть стабилизирована за счет теплообмена между ионами и электронами, однако в разреженной плазме соответствующий эффект слишком мал.

2.3. Другие неустойчивости

Кроме указанных выше неустойчивостей в тороидальном шнуре может развиваться дрейфово-циклотронная неустойчивость [7]. Мы предположим, что магнитное поле достаточно сильное, а именно

$$\beta/a < \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} , \quad (2.23)$$

и следовательно, дрейфово-циклотронная неустойчивость с $\kappa_{||}=0$ стабилизирована. Что касается неустойчивости на возмущениях с $\kappa_{||} \neq 0$, то она стабилизируется при $S \equiv \lambda_e \beta/a^2 < a/\rho$, за счет ион-ионных столкновений.

Предположим, кроме того, что

$$\frac{u}{v_e} < 10^{-7}, \quad u < c_A = v_e \sqrt{\frac{m_e}{m_i \beta}} , \quad (2.24)$$

где c_A - альфеновская скорость. Первое условие гарантирует нам отсутствие убегающих электронов, а второе - отсутствие раскачки альфеновских волн. Второе условие (2.24) можно записать в виде

$$\Pi_p > \mu^2 / u^2 , \quad (2.25)$$

где $\Pi_p = \frac{\bar{n} a^2 e^2 n}{m_i c^2}$.

Чтобы избежать неустойчивостей связанных с анизотропией функции распределения, мы допустим, что

$$S \equiv \frac{\lambda_e \beta}{a^2} < \lambda/a . \quad (2.26)$$

При этом условии столкновения успевают восстанавливать максвелловское распределение частиц по скоростям, которое разрушается дрейфом в неоднородном магнитном поле.

Кроме того, всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что

$$\lambda_e/a > 1 , \quad (2.27)$$

так как нас интересует только такие условия, когда температура плазмы достаточно высока.

3. "Аномальные" теплопроводность и диффузия

3.1. Нелинейная конвекция

Из-за дрейфовых неустойчивостей в плазме должно развиться сложное конвекционное течение, которое усиливает поперечные потоки тепла и частиц. Чтобы определить эти потоки, необходимо рассмотреть нелинейное течение плазмы. Рассмотрим сначала столкновительную неустойчивость.

Как было показано выше, в линейном приближении возмущения, соответствующие данной паре собственных чисел m, n , развивается только в тонком слое вблизи особой точки $\zeta = \zeta_0$, где шаг возмущения совпадает с шагом силовых линий. С учетом нелинейности возмущения с различными парами чисел m, n взаимодействуют между собой. При этом, поскольку азимутальная фазовая скорость ω_* / κ , не зависит от m, n , разброс по фазовым скоростям отсутствует, и взаимодействие является сильным. Однако, ввиду наличия локализации, не все взаимодействия являются одинаково сильными. Ясно, например, что неперекрывающиеся возмущения совсем не взаимодействуют между собой, и взаимодействие усиливается по мере увеличения области перекрытия. Поэтому можно ожидать, что наиболее сильным должно быть взаимодействие данного возмущения m, n со своими собственными гармониками $2m, 2n; 3m, 3n$ и т.д., так как все они имеют общую особую точку $\zeta = \zeta_0$ и общую область локализации.

Таким образом, в первую очередь следует учесть нелинейность внутри каждой отдельной ячейки, соответствующей данной точке ζ_0 , ($q(\zeta_0) = m/n$), а затем уже рассмотреть взаимодействие таких ячеек.

Задача о течении внутри отдельной ячейки облегчается благодаря тому, что в некоторых случаях существует аналогия с конвекцией обычной жидкости. Например, температурная токово-конвективная неустойчивость приводит к переносу тепла, которое описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \chi_u v_z^2 T + \chi_s \Delta_s T, \quad (3.1)$$

$$\nabla p_* = (-x v_z + A T) \vec{e}_z, \quad (3.2)$$

$$d_i v \vec{e} = 0, \quad (3.3)$$

где p_* - произвольная функция ζ, ϑ ; $A = \frac{\alpha c E_0}{\alpha \theta H}$,
 E_0 - продольное электрическое поле, \vec{e}_z - единичный вектор вдоль радиуса.

Уравнения (3.1) - (3.3) описывают тепловую конвекцию безинерционной жидкости, которая испытывает трение о неподвижную среду вдоль радиального направления, причем коэффициент трения пропорционален x . При больших x основную роль в (3.1) играет продольная теплопроводность, благодаря которой все высшие гармоники в этой области затухают. Низшая гармоника и определяет период по азимуту в каждой ячейке. При малых x , уравнение вида (3.2) должно быть дополнено инерционным членом.

Каждая ячейка приводит к усиленному переносу тепла и частиц только внутри области ее локализации, так что в отсутствии перекрытия суммарный эффект будет мал: хотя внутри ячеек средний градиент температуры и плотности при заданных потоках значительно уменьшается, однако их усредненное значение по области, содержащей много ячеек, практически остается неизменным. Заметные макроскопические эффекты возникают лишь при полном перекрытии ячеек. При этом ячейки меньших размеров дают как бы эффективные коэффициенты температуропроводности χ_1 и диффузии \mathcal{D}_1 для ячеек больших масштабов, а основной макроскопический перенос осуществляется ячейками, которые только что начали перекрываться. Учитывая это обстоятельство, величину эффективных χ_1 и \mathcal{D}_1 можно оценить как

$$\chi_1 \sim \mathcal{D}_1 \sim (\gamma x^2)_m \sim (\sigma_{\kappa_1^2})_m, \quad (3.4)$$

где номер m выбран таким образом, что он соответствует ячейкам, которые только начали перекрываться.

Соотношение (3.4), если его переписать в виде $\gamma \sim \mathcal{D}_1/x^2$ можно рассматривать как естественное утверждение, что амплитуда колебаний будет развиваться до такой величины, что возникающее вследствие нелинейного переноса затухание \mathcal{D}_1/x^2 имеет порядок величины линейного инкремента.

Для бесстолкновительных неустойчивостей ситуация несколько усложняется вследствие того, что инкремент возрастает с κ_x . Это обстоятельство приводит к тенденции развития мелкомасштабных возмущений, так что для пульсаций, дающих основной вклад в конвекционный перенос, можно считать $\kappa_x \sim x$. В тех случаях, когда к неустойчивости приводит раскачка колебаний резонансными частотами, следует также учитывать эффект образования плато на функции распределения.

3.2. Коэффициенты диффузии и температуропроводности.

Пользуясь соотношением (3.4), оценим величину коэффициентов χ_1 , \mathcal{D}_1 для различных видов неустойчивостей.

3.2.1. Температурная токово-конвективная неустойчивость. В этом случае инкремент дается соотношением (2.6), а область локализации соотношением (2.7). Если $\xi \sim 1$, то $x \sim a$, и в этом случае основную роль в переносе тепла играют крупномасштабные ячейки с небольшими m , так что $\omega_* \sim g_i v_i / a^2$; $\kappa_* \sim \theta/a$; $x \sim a$, и следовательно,

$$\chi_1 \sim \frac{u}{\theta} \frac{1}{\theta} \frac{g_i v_i}{\lambda_e}, \quad (3.5)$$

если $\lambda_e \theta < a$, и

$$\chi_1 \sim \frac{u}{\theta} g_i v_i, \quad (3.5a)$$

если $\lambda_e \theta \geq a$.

Если $\lambda_e \theta \gg a$, то следует учитывать квазилинейный эффект образования плато на электронной функции распределения, который приводит к уменьшению χ_1 по сравнению с (3.5a).

При $\xi \ll 1$ область локализации $x_m \sim a \xi^3 m^{-2/3} \ll 1$. Так как число ячеек с номерами меньше m порядка m^2 , то перекрытие начинается при $m^2 x_m \sim a$, т.е. при $m \sim \xi^{-1/4}$. Таким образом,

$$\chi_1 \sim \frac{a \sqrt{\xi}}{\theta \lambda_e} g_i v_i. \quad (3.6)$$

Эта величина может быть заметно больше $\chi_c = g_i^2 v_i / \lambda_e$ — классического коэффициента температуропроводности.

3.2.2. Температурная дрейфовая неустойчивость. Если $\frac{d\ln T}{d^2} > \frac{d\ln n}{d^2}$, то возникает инерционная неустойчивость на градиенте температуры, которая описывается уравнением (2.22). Инкремент этой неустойчивости $\gamma \sim \omega_*$, а область локализации $x \sim g_i^2 / \theta$. При естественном допущении $m \sim \theta / \lambda_e$ получим:

$$\chi_1 \sim \frac{1}{\theta} \frac{g_i^2 v_i}{\theta}. \quad (3.7)$$

3.2.3. Токово-конвективная неустойчивость на градиенте плотности. Если $\kappa_* \lambda_e < 1$, то инкремент γ не зависит от азимутального числа m , и основной вклад в перенос частиц дают возмущения максимально возможного масштаба. Если $\kappa_* \lambda_e < \frac{u}{g_i} \mu$, (где $\mu = \frac{d\ln \sigma}{d\ln n} \sim 10^{-1}$) т.е. $\gamma_\omega > 1$, то область локализации возмущения определяется соотношением $\gamma \sim \kappa_* v_i$. Отсюда с учетом $m^2 x \sim a$, находим

$$\chi_1 \sim \gamma x^2 \sim \left(\frac{u \mu}{g_i \lambda_e \theta} \right)^{2/3} \left(\frac{a^3}{g_i^2 \lambda_e^2 \theta^2} \right)^{1/3} \frac{g_i^2 v_i}{\lambda_e}. \quad (3.8)$$

При малых θ эта величина может быть больше классической температуропроводности χ_c .

При увеличении длины пробега инкремент столкновений неустойчивости уменьшается, а при

$$S > \sqrt{\frac{g}{a\theta}} \quad (3.9)$$

ячейки токово-конвективной столкновительной неустойчивости вообще не могут перекрыть весь шнур. При этом основную роль начинает играть бесстолкновительная неустойчивость, которая может быть стабилизирована при $u_{v_e} < \theta$.

3.2.4. Дрейфовая инерционная неустойчивость. Для этой неустойчивости $\mathcal{D}_1 \sim \omega_i^2 x^2 / \omega_s \sim \kappa_1^2 g_i^2 / \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\theta^2} g_i^2 v_i^2$. Величина $\kappa_1^2 g_i^2$ не может быть значительно больше единицы, так как в противном случае включается стабилизирующий эффект ион-ионных столкновений. Поэтому по порядку величины:

$$\mathcal{D}_1 \lesssim \sqrt{\frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\theta^2} g_i^2 v_i^2} \quad (3.10)$$

При $\theta \leq 10^{-1}$ эта величина порядка классического коэффициента теплопроводности, и следовательно эффектами от инерционной неустойчивости можно пренебречь.

Еще меньший эффект дает гравитационная столкновительная неустойчивость.

3.3. Макроскопическая конвекция

Рассмотренные выше дрейфовые неустойчивости приводят к развитию конвекционных ячеек, локализованных на малых длинах. Поэтому в макроскопических уравнениях можно учитывать только усредненные эффекты типа диффузии и теплопроводности. Для их учета можно сохранить обычные уравнения двухжидкостной магнитной гидродинамики (см. например, [8]), в которых следует лишь заменить коэффициент теплопроводности χ_c и силу трения $R_u = -\frac{m_e n_e}{e^2 n} u_1$, где u_1 — относительная скорость $u_1 = v_{ex} - v_{ix}$, на их эффективные значения χ_1 , τ_{ei} , которые получаются путем усреднения по микроячейкам.

Таким образом, "аномальная" диффузия может быть макроскопически описана как уменьшение поперечной проводимости $\sigma_1 = \frac{e^2 n \tau_{ei}}{m_e}$. Кроме того, поскольку конвекция при несжимаемом течении приводит как к диффузии, так и к теплопроводности с примерно равными коэффициентами $\chi_1 \sim \chi_s$, макроскопическая скорость $v = \frac{1}{n} < v' n' >$ должна быть пропорциональна n' . Поэтому в уравнения движения для электронов и ионов следует ввести термосилу $\tilde{R}_T = -\frac{n_e}{\chi_e \tau_{ei}} [\tilde{h} \rho T]$, где $\tilde{h} = \tilde{H}/H$.

Полученные таким образом уравнения можно использовать для описания медленных течений плазмы, когда спектр дрейфовых колеба-

ний можно считать установившимся. Поскольку инкремент развития дрейфовых локализованных колебаний порядка v_e^2/α_1 , то медленными можно считать лишь безинерционные течения, когда характерное время $t \gg \alpha/v_e$. В частности, эти уравнения могут быть использованы для описания неустойчивости и связанной с ней конвекции на низших модах с $m = 1, 2$ и т.д. Соответствующая неустойчивость, которая представляет собой винтовую неустойчивость с конечной проводимостью (*tearing* - мода по терминологии работы [9]), очень чувствительна к распределению давления и плотности тока поперек шнура. Поэтому она должна рассматриваться применительно к тем или иным конкретным условиям. Однако из структуры уравнений видно, что при достаточно большом θ и коэффициенте запаса η конвекция от этой неустойчивости захватывает лишь ограниченную и не очень большую область шнура.

4. Заключение

Из проведенных выше оценок видно, что с точки зрения макроскопических эффектов наибольшую опасность представляет температурная дрейфовая неустойчивость 2.2.4., которая при $\frac{d\ln T}{d\ln n} > 2$ должна приводить к очень большому потоку тепла. Соответствующий коэффициент теплопроводности (3.7) значительно превышает величину $\lambda_e = g^2 v_e / \lambda_e$.

Несмотря на то, что данная неустойчивость должна быть стабилизирована при $0 < \frac{d\ln T}{d\ln n} < 2$, ее никак нельзя считать второстепенной. Это связано с тем, что в экспериментальных установках очень трудно создать такие условия, чтобы приходящие на стенки частицы полностью ими поглощались. Как правило, со стенок выбиваются атомы нейтрального газа, которые затем поступают в разряд, и следовательно, суммарный относительный поток частиц на стенку меньше относительного потока тепла. Кроме того, при достаточно высоких температурах на стенках могут загораться униполярные дуги, которые должны приводить к большим потокам тепла при малом поглощении частиц. Поэтому необходимость удовлетворения условия $\frac{d\ln T}{d\ln n} < 2$ предъявляет очень жесткие требования к стенкам камеры и ко всем стоечным процессам.

Если считать, что условие стабилизации $\frac{d\ln T}{d\ln n} < 2$ выполнено, то в плотной плазме, у которой $\lambda_e \beta_e / \alpha_2 \ll 1$, основную роль играет токово-конвективная неустойчивость на возмущении плотности. Эта неустойчивость приводит к конвекционному переносу как тепла, так и частиц. При увеличении температуры, когда параметр $S = \lambda_e \beta_e / \alpha_2$, становится больше $\sqrt{\frac{S}{\alpha}} \sim 10^{-1}$, эта неустойчивость стабилизируется, если продольная скорость электронов достаточно мала, а именно $v_e^2 / \alpha < \theta$. Последнее условие фактичес-

ки сводится к требованию, чтобы плотность частиц, а следовательно, и магнитное поле были достаточно велики.

Что касается инерционной и "гравитационной" неустойчивостей, то при достаточно большой величине $\theta \gg \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$ вклад от них в макроскопические потоки невелик. Можно надеяться, что будет невелик вклад и от крупномасштабных ячеек, отвечающих винтовой неустойчивости за счет конечной проводимости.

Резюмируя, можно сказать, что дрейфовые неустойчивости приводят к довольно жестким требованиям к параметрам и режиму работы тороидальных систем, в частности, должна быть обеспечена достаточно большая величина "шира" θ .

Л и т е р а т у р а

- 1 Кадомцев Б.Б., Вопросы теории плазмы, вып.4. стр.188, 1964, Атомиздат, Москва.
- 2 Рудаков Л.И., Сагдеев Р.З., ДАН СССР, 138, 581, (1961)
- 3 Тимофеев А.В., ЖТФ, 33, 909, (1963)
- 4 Моисеев С.С., Сагдеев Р.З., ЖЭТФ, 44, 763 (1963); ЖТФ, 34, 248, (1964)
- 5 Кадомцев Б.Б., Тимофеев А.В., ДАН СССР, 146, 581, 1962.
- 6 Галеев А.А., Ораевский В.Н., Сагдеев Р.З., ЖЭТФ, 44, 903, (1963)
- 7 Михайловский А.Б., Вопросы теории плазмы, вып.3, стр.141, 1963, Атомиздат, Москва.
- 8 Брагинский С.И., Вопросы теории плазмы, вып.1, стр.191, 1963, Атомиздат, Москва
- 9 Furth H.P., Killeen J., Rosenbluth M.N. Phys.of Fluids, 6, 459 (1963).

DISCUSSION

B. COPPI: I feel that your brilliant presentation, which reduces the dangerous instabilities to only one, is rather optimistic. In particular, I would like to know some more about your theory of the "tearing mode" and

about the types of instability which you include among the "dissipative-drift" ones. As far as the influence of j_{\parallel} is concerned, I agree with your conclusions. However, I should mention that Dr. Rebut is not of the same opinion.

B. B. KADOMTSEV: We analysed the "tearing mode" by means of non-linear equations. Our analysis showed that steady-state convection with disintegration of the magnetic surfaces develops in the plasma column as a result of the "tearing" instability. Since the width of the cells does not exceed a/m^2 , it may be assumed that this instability is not dangerous.

By "dissipative-drift" instability I understand a drift instability with finite conductivity which occurs as a result of driving by longitudinal pressure.

S. YOSHIKAWA: Slow Alfvén waves (for example, ion-cyclotron waves) can be excited by the drift velocity of electrons parallel to the magnetic field. Is this not dangerous?

B. B. KADOMTSEV: No, it is not, since the stability condition is easily satisfied.

P. H. REBUT: I should like to make two comments.

Firstly, the "tearing-mode" cells are themselves usually unstable with respect to other magnetohydrodynamic modes and may be dangerous.

Secondly, the presence of the parallel current leads to an increase in the drift instabilities due to pressure gradients.

B. B. KADOMTSEV: The current is not dangerous if the directed velocity is less than the mean thermal velocity of the ions.

ANOMALOUS PLASMA DIFFUSION IN MAGNETIC WELLS

T.K. FOWLER* AND G.E. GUEST
OAK RIDGE NATIONAL LABORATORY,
OAK RIDGE, TENN., UNITED STATES OF AMERICA

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

ANOMALOUS PLASMA DIFFUSION IN MAGNETIC WELLS. We discuss radial plasma transport in magnetic wells (magnetic gradient $dB/dr > 0$) with particular attention to low frequency instabilities not stabilized by the positive gradient ($\omega \ll \omega_{ci}$, $k p_i \ll 1$). We take β small. The unperturbed plasma departs from thermal equilibrium only in the azimuthal current and radial pressure profile inherent in confinement. If $dB/dr > 0$ and $\Delta B = R(dB/dr) > B(T_e/T_i)$, the $\vec{E} \times \vec{B}$ "diffusion" coefficient is

$$(1) D_L \leq (cT_i/eB)(\rho_i/R)(T_e/T_i + m_e/m_i)^{\frac{1}{2}}$$

where ρ_i is the ion gyroradius and R is the plasma radius. If dB/dr is only positive on the average, there is an additional requirement that $L/R < (T_i/T_e)^{\frac{1}{2}}$, where L is the length along \vec{B} over which dB/dr is negative. Applications to various thermonuclear magnetic confinement geometries are discussed. Results in some cases are encouraging and complement our previous conclusion that stochastic diffusion is also tolerable for fusion. Open questions are the β limit and the non-linear behavior of certain velocity-space instabilities at $\omega \geq \omega_{ci}$, the ion gyrofrequency.

In deriving eq. 1, we take $D_L = \lambda(cE_L/B)$, where λ is a radial "mixing length". We estimate E_L from the available free energy composed of two terms, $\delta W = \delta W_0 + \delta W_1$. The first term, δW_0 , is the usual stabilizing term in a magnetic well, or an "average" well, if the magnetic moment μ and the longitudinal invariant J are conserved. The term δW_1 accounts for violations of adiabatic invariance. We estimate it from nonlinear thermodynamics. There can be a large positive contribution to δW_1 from the release of thermal energy in a manner analogous to expansion cooling of a gas, which accounts for anomalous diffusion in several experiments where $dB/dr \leq 0$. For sufficiently large and positive dB/dr , δW is negative and overcomes this. Then only the small azimuthal drift energy drives field growth. Comparison is made with linear theory neglecting the drift energy.

DIFFUSION ANORMALE DE PLASMA DANS DES PUITS MAGNETIQUES. Les auteurs examinent le transport radial du plasma dans des puits magnétiques (gradient magnétique $dB/dr > 0$) en accordant une attention particulière aux instabilités de basse fréquence non neutralisées par le gradient positif ($\omega \ll \omega_{ci}$, $k p_i \ll 1$). Ils supposent que β est petit. Le plasma non perturbé ne s'écarte de l'équilibre thermique que dans le courant azimuthal et le profil des pressions radiales inhérents au confinement. Si $dB/dr > 0$ et $\Delta B = R(dB/dr) > B(T_e/T_i)$, le coefficient de «diffusion» $\vec{E} \times \vec{B}$ est

$$(1) D_L \leq (cT_i/eB)(\rho_i/R)(T_e/T_i + m_e/m_i)^{\frac{1}{2}}$$

ρ_i étant le rayon de giration des ions et R le rayon du plasma. Si dB/dr n'est pas positif qu'en moyenne, il faut en outre $L/R < (T_i/T_e)^{\frac{1}{2}}$, L étant la longueur le long de \vec{B} sur laquelle dB/dr est négatif. Les auteurs discutent des applications à diverses géométries de confinement magnétique. Dans certains cas, les résultats sont encourageants et complètent la conclusion précédente des auteurs, selon laquelle la diffusion stochastique est également admissible pour la fusion. Il reste à déterminer la limite de β et le comportement non linéaire de certaines instabilités dans l'espace des vitesses pour $\omega \geq \omega_{ci}$, la gyrofréquence des ions.

Pour obtenir l'équation 1, les auteurs considèrent que D_L est égal à $\lambda(cE_L/B)$, λ étant la «longueur de mélange» radiale. Les auteurs estiment E_L à partir de l'énergie libre disponible composée de deux termes $\delta W = \delta W_0 + \delta W_1$. Le premier terme, δW_0 , est le terme de stabilisation usuel dans un puit magnétique, ou

* Now at General Atomic Division, General Dynamics Corporation, San Diego, Calif., United States of America.

dans un puits «moyen» si le moment magnétique μ et l'invariant longitudinal J sont conservés. Le terme δW_1 tient compte des violations de l'invariance adiabatique; les auteurs en font une estimation en partant de la thermodynamique non linéaire. Ce terme peut inclure une importante contribution positive due à la libération d'énergie thermique d'une façon analogue au refroidissement d'un gaz par expansion, ce qui explique la diffusion anormale dans plusieurs expériences où $dB/dr \leq 0$. Lorsque dB/dr est positif et suffisamment grand, δW_0 est négatif et cette difficulté est surmontée. Alors seulement la petite énergie de dérive azimuthale provoque l'accroissement du champ. Les auteurs établissent une comparaison avec la théorie linéaire en négligeant l'énergie de dérive.

АНОМАЛЬНАЯ ДИФФУЗИЯ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНЫХ ЯМАХ. Обсуждается радиальное перемещение плазмы в магнитных ямах (магнитный градиент $dB/dr > 0$), особое внимание уделяется низкочастотным неустойчивостям, не стабилизирующимся за счет положительного градиента ($\omega \ll \omega_{ci}$, $k_p \ll 1$). Величина β предполагается малой. Невозмущенная плазма отклоняется от теплового равновесия лишь за счет azimuthального тока и радиального профиля давления, отвечающего удержанию. Если $dB/dr > 0$ и $\Delta B = R(dB/dr - B(T_e/T_i))$, то коэффициент "диффузии" $\vec{E} \times \vec{B}$ будет:

$$1) D_\perp \leq (cT_i/eB)(\rho_i/R)(T_e/T_i + m_e/m_i)^{\frac{1}{2}},$$

где ρ_i — ионный гирорадиус, а R — радиус плазменного шнура. Если dB/dr является положительной величиной лишь в среднем, то имеется дополнительное требование, чтобы $L/R < (T_i/T_e)^{\frac{1}{2}}$, где L является длиной вдоль \vec{B} , на которой dB/dr является отрицательной величиной. Обсуждаются применения к различным геометриям термоядерного магнитного удержания. Результаты в некоторых случаях ободряющие и говорят в пользу наших предыдущих выводов о том, что стохастическая диффузия также допустима для синтеза. Открытыми вопросами являются предел β и нелинейное поведение некоторых скоростно-пространственных неустойчивостей при $\omega \geq \omega_{ci}$, где ω_{ci} — ионная гирочастота.

При выводе уравнения 1) мы берем $D_\perp = \lambda (cE_\perp/B)$, где λ является радиальной "длиной перемешивания". Мы находим E_\perp по имеющейся свободной энергии, состоящей из двух членов $SW = SW_0 + SW_1$. Первый член δW_0 является обычным стабилизирующим членом в магнитной яме или "средней" яме, если сохраняются магнитный момент и продольный инвариант J . Член δW_1 учитывает нарушения адиабатической инвариантности. Мы вычисляем его на основе нелинейной термодинамики. Может иметь место большой положительный вклад в член δW_1 за счет обретения тепловой энергии способом, аналогичным расширению охлаждающегося газа, о чем говорит аномальная диффузия в целом ряде экспериментов, где $dB/dr \leq 0$. Для достаточно большого положительного dB/dr , член δW_0 является отрицательным и преодолевает это. Тогда лишь небольшое azimuthальное смещение энергии управляет ростом поля. Делается сравнение с линейной теорией, без учета энергии дрейфа.

DIFUSION ANOMALA DE PLASMA EN POZOS MAGNETICOS. Los autores analizan el transporte radial de plasma en pozos magnéticos (gradiente magnético $dB/dr > 0$), prestando especial atención a las inestabilidades de baja frecuencia no neutralizadas por el gradiente positivo ($\omega \ll \omega_{ci}$, $k_p \ll 1$), y tomando valores pequeños de β . El plasma sin perturbaciones sólo se aparta del equilibrio térmico en la corriente azimuthal y en el perfil de presiones radiales inherente al confinamiento. Si $dB/dr > 0$ y $\Delta B = R(dB/dr - B(T_e/T_i))$, el coeficiente de «difusión» $\vec{E} \times \vec{B}$ viene dado por:

$$(1) D_\perp \leq (cT_i/eB)(\rho_i/R)(T_e/T_i + m_e/m_i)^{\frac{1}{2}}$$

donde ρ_i es el radio de giro de los iones y R , el radio del plasma. Si dB/dr es solamente positivo como promedio, es además preciso que $L/R < (T_i/T_e)^{\frac{1}{2}}$, donde L es la longitud según \vec{B} a lo largo de la cual dB/dr es negativa. Los autores examinan aplicaciones a diversos sistemas de confinamiento termonuclear. En algunos casos, los resultados son alentadores y complementan la conclusión anterior de los autores, según la cual también la difusión estocástica es admisible para la fusión. Subiste el interrogante del valor límite de β y el comportamiento no lineal de ciertas inestabilidades en el espacio de las velocidades para $\omega \geq \omega_{ci}$, la frecuencia de giro de los iones.

Al deducir la ecuación(1), los autores consideran que $D_\perp = \lambda (cE_\perp/B)$, donde λ es la «longitud de mezcla» radial. Estiman el valor de E_\perp a partir de la energía libre disponible, compuesta por dos términos, $\delta W = \delta W_0 + \delta W_1$. El primero, δW_1 , es el término corriente de estabilización en un pozo magnético o un

pozo «promedio» si se conservan el momento magnético μ y el invariante longitudinal J . El término δW_1 tiene en cuenta los casos en que no se cumple la invariancia adiabática. Los autores estiman su valor sobre la base de la termodinámica no lineal. Puede haber una considerable contribución positiva a δW proveniente de la liberación de energía térmica, análogamente al enfriamiento de un gas por expansión, lo que explica la difusión anómala en varios experimentos con $dB/dr \leq 0$. Cuando dB/dr es positiva y suficientemente grande, δW_1 es negativa y supera aquélla. Unicamente en ese caso la pequeña energía de deriva azimutal provoca el crecimiento del campo. Los autores comparan los resultados obtenidos con la teoría lineal, despreciando la energía de deriva.

1. Introduction

It has been demonstrated that interchange instability is inhibited in plasmas confined in a magnetic well, that is, at a field minimum [1], and theory predicts interchange stability if the field has well shape only on the average [2]. After interchange, the instabilities expected to pose the most serious threat to thermonuclear confinement, if they occur, are those at frequencies below the ion gyrofrequency caused by the pressure gradient [3]. They have been variously called "universal" instabilities because the gradient is synonymous with confinement and "drift" instabilities because the diamagnetic drift implied by the gradient drives the instability. We shall use the former name to include the whole family. Universal instabilities, in this broad sense, have been observed in low temperature discharges [4] and they offer one possible explanation of "pumpout" in stellarators [5].

Possibly, universal instabilities can be controlled by magnetic shear in tori [6] and by short length in magnetic mirror systems [7]. Also, it has been shown that magnetic wells should prevent low-frequency phenomena including certain universal instabilities for special plasma distributions [8]. Here, we show that magnetic wells and also average wells at least reduce universal instability to a tolerable level for quite general plasma distributions if the electron temperature is held low.

We examine three points. We first calculate the free energy driving universal instabilities proportional to the electron temperature, T_e . Next, we argue that a magnetic well introduces a compensating energy term yielding stability if T_e is small enough and the well depth is large enough, everywhere or on the average. Finally, we explore briefly the practicality of controlling electron temperature in mirrors and tori. We conclude that, for large T_i/T_e , T_e can indeed be held low enough to prevent universal instability. The identification of the free energy driving universal instabilities is supported by measurements of oscillations in stellarators. The stability criterion derived from free energy arguments is supported by models employing conventional dispersion analysis and linearized equations of motion.

2. Free Energy Driving Universal Instabilities

We have previously obtained a thermodynamic estimate of free energy supporting unstable growth of electric fields in plasmas [9]. The main difficulty is that, without care, one gets the trivial answer that the maximum free energy is the total plasma energy. By expanding to fill the universe, an initially confined plasma can eventually cool to zero temperature without violating the principles of energy and momentum conservation and the monotone increase of entropy on which thermodynamics rests. Since we know that invariably coherent instability processes have finite extent; the wavelength, we avoid the above difficulty by introducing the wavelength λ perpendicular to the magnetic field as a parameter. (Fortunately, λ drops out of our main results, Sect. 3.) We divide the plasma into sample zones, cylindrical shells of thickness λ concentric to the magnetic axis. We assume that growth of fields within any one zone is supported primarily by plasma energy within that zone. Energy transport between zones, over distances $>\lambda$, is incoherent and slow. Thus, the free energy A should be calculated in each zone separately and energy flow between zones should be neglected in

computing dA/dt . With this assumption, the Helmholtz free energy $A(t)$ for any zone satisfies

$$dA/dt \leq 0, \quad (1)$$

the inequality representing collisions. Another property is

$$A - \bar{\Phi} \geq 0, \quad (2)$$

where $\bar{\Phi}$ is the energy in fields within the zone; $\bar{\Phi}$ and the particle kinetic energy make up the internal energy U in the Helmholtz function $A = U - TS$. Together, properties (1) and (2) insure that in the course of time the field energy does not exceed the initial free energy,

$$\bar{\Phi}(t) \leq A(0). \quad (3)$$

Consider the following model, treated in detail in Ref. [9], which exhibits universal instability if $dB_c/dr \leq 0$, \vec{B}_c being the external magnetic field. Let ion and electron distributions have the form

$$f \propto \exp \left\{ - T^{-1} \left(\frac{1}{2} mv^2 + \alpha p_\theta + q \phi_0 \right) \right\}. \quad (4)$$

Here p_θ is the particle canonical angular momentum in the field \vec{B}_c assumed to be axially symmetric and constant in time. These are Maxwellian distributions in rigid-body rotation at angular frequencies α_i and α_e for ions and electrons respectively. The radial density profiles are roughly Gaussians (exactly so if \vec{B}_c is uniform) and ϕ_0 is the plasma potential which can be small or zero if α_i and α_e are properly related. For any one of the sample zones, the appropriate Helmholtz function relative to a state of thermal equilibrium within the zone, state g , is given by the following integrals over the zone in question, volume V ,

$$A(t) = \bar{\Phi}(t) + \sum_V d\vec{x} d\vec{v} \left\{ G(f) - G(g) + (f-g)(\frac{1}{2}mv^2 + vp_\theta) \right\} \quad (5)$$

$$G(x) = T(x \ln C^{-1}x - x) \quad (6)$$

$$g = C \exp \left\{ - T^{-1} \left(\frac{1}{2}mv^2 + vp_\theta \right) \right\} \quad (7)$$

$$\bar{\Phi}(t) = (8\pi)^{-1} \int_V d\vec{x} \left\{ \vec{E}^2 + (\vec{B} - \vec{B}_c)^2 + 2vc^{-1}\hat{z} \cdot \vec{r} \times (\vec{E} \times (\vec{B} - \vec{B}_c)) \right\}. \quad (8)$$

In Eq. (5), the sum runs over each particle species, distributions $f(\vec{x}, \vec{v}; t)$. The integral of G will be recognized as temperature T times negative entropy, the remainder of A being the internal energy including the energy in the total electric field \vec{E} and magnetic field $\vec{B} - \vec{B}_c$. In Eq. (8), \hat{z} is the unit vector

along the cylinder axis. Observing that $\text{curl } \vec{B}_c = 0$, one obtains Eq. (1) by differentiating A as prescribed by the non-linear Vlasov-Boltzmann equation and Maxwell's equations and throwing away power flow through the surface bounding V as assumed above. Eq. (2) follows from the choices of g and G .

Since energy is not an invariant, for generality we have written A in a reference frame rotating at an unspecified angular frequency v by adding to the laboratory free energy v times the total angular momentum in fields and particles within the zone considered. Since Eq. (3) holds for all such A , the best estimate of free energy is obtained by minimizing A with respect to v and parameters T and C in G for each species.

Neglecting the energy in initial disturbances, we obtain $A(0)$ for our model by introducing distributions (4) into Eq. (5), T being taken the same in f and g , and C being chosen so that f and g represent the same number of particles. For gentle field line curvature, small R/P and β , and $\lambda/R < \frac{1}{2}/|\alpha/v|$, the result is

$$A(0) \approx \sum_{j=i,e} nVT_j \left\{ \frac{P_j^2}{R^2} \left(\frac{v}{\alpha_j} - 1 \right)^2 + \frac{1}{6} \frac{\lambda^2}{R^2} \left(\frac{v}{\alpha_j} - 1 \right)^2 + \frac{1}{4} \beta_j \right\}. \quad (9)$$

Here, n is density, R is the plasma radius, and $j = i, e$ denotes ions and electrons with gyroradius ρ_i and ratio of thermal to magnetic energy β_j . Eq. (9) is the representative value for all zones for our model with smooth density profile. We have omitted energy in ϕ , negligible for Debye length $\ll R$. As is discussed more fully in Ref. [9], the first term in Eq. (9) is kinetic energy in drifts, mainly due to diamagnetic currents, and the third term is diamagnetic field energy. The more interesting term is the second, representing cooling of the plasma as it expands in volume within the zone and does work on the fields which grow thereby.

In contrast with interchange and possibly other instabilities driven by ion pressure, universal instabilities are characteristically driven by electrons. Thus, to obtain the free energy driving universal instabilities, we should ignore contributions to $A(0)$ not vanishing when the electron equilibrium energy parameters α_e and T_e approach zero. One finds from Eq. (9) that the minimum electron contribution to $A(0)$, and hence the best estimate, is obtained with $v = 0$, which also minimizes the total free energy if $\lambda \gtrsim \rho_i$. (In Ref. [9], Eq. (35), and the discussion indicating a best choice $v = \alpha_i$ when $T_e \ll T_i$ are incorrect.) With $v = 0$, the dominant electron contribution is

$$A(0) \rightarrow (nV_{\text{e}}) (\lambda^2/6R^2). \quad \text{universal instabilities} \quad (10)$$

The neglected drift energy is small because $m_e \ll m_i$, and the diamagnetic field energy transfers (directly) to electric fields only through the transverse component of \vec{E} , $E_t \sim (\lambda \omega/c)B$ where ω is the frequency. Thus, except in computing energy available to bend magnetic field lines, as in interchange, the β contribution to electric fields causing transport across field lines probably should be reduced by $(E_t/B)^2 \sim (\lambda \omega/c)^2$, of order $\lesssim (v/c)^2$ for universal instabilities.

Note that, with $v = 0$, result (10) is no longer very sensitive to the assumed symmetry of B_c . Thus Eq. (10) applies to fields with shear and other complications.

To compare our result with experiment, we estimate the average electric field, E . By Eq. (3) and properties of ϕ , $(8\pi)^{-1} VE^2 \leq \dot{\phi}(t) \leq A(0)$. However, though a proper upper bound on the instantaneous field energy, this is an overestimate of energy at frequencies $\omega < \omega_{ci}$, the ion gyrofrequency, as in universal instabilities. For the latter, the field endures long enough to share energy with "non-resonant" particles by accelerating them. This is expressed through a dielectric constant ϵ by replacing E^2 above by ϵE^2 . On simple grounds [9], $\epsilon = 1 + \omega_{pi}^2/\omega_{ci}^2$ if $\omega < \omega_{ci}$, whence

$$(1 + \omega_{pi}^2/\omega_{ci}^2)(E^2/8\pi) \leq v^{-1} A(0). \quad (11)$$

What is actually measured by probing an unstable plasma is the potential fluctuation $\delta\phi$ and the correlation length, corresponding to λ , in terms of which $E = -(\delta\phi/\lambda)$. With this substitution, and $\omega_{pi} \gg \omega_{ci}$, Eq. (11) with $A(0)$ in Eq. (10) yields the relation

$$\lambda \geq (3e^2 \delta\phi^2/2T_e T_i)^{1/4} (\rho_i R)^{1/2} \quad (12)$$

This formula compares well with experimental results. For example, for the Model C stellarator, $\omega_{pi}/\omega_{ci} \sim 10$ and $R = 200 \rho_i$, and experimentally $e\delta\phi \sim T_e \sim T_i$. Then, by Eq. (12), $\lambda = 11\rho_i = 3 \text{ cm}$. The observed correlation length is $\sim 1 \text{ cm}$. As the observed and calculated values of λ are closer to each other than to other characteristic lengths, such as ρ_i or the Debye length, we consider the rough agreement between them to be significant [10].

We conclude that our estimate of free energy at frequencies $\omega < \omega_{ci}$, Eq. (10), is reasonable. Note that $A(0)$ is proportional to T_e .

3. Stabilization of Universal Modes

The free energy estimate of the previous section requires modification in magnetic wells when applied to universal instabilities. The reason is that our estimate, applicable however rapidly energy is transferred, does not take account

of a tendency toward conservation of the magnetic moments μ_i and μ_e if $\omega < \omega_{ci}$ and $\lambda > \rho_i$, as for universal instabilities. To exploit this tendency, we expand δW , the energy change corresponding to perturbations, in powers of ω/ω_{ci} and ρ_i/λ ,

$$\delta W = \sum_{j=0}^{\infty} \delta W_j. \quad (13)$$

The leading term conserves μ . For disturbances in which plasma expands across the field, as in universal instabilities, it is

$$\delta W_0 = \sum V \lambda^2 \mu \frac{dn}{dr} \frac{dB}{dr} = - \frac{\lambda^2}{R^2} \frac{\Delta B}{B} n V (T_i + T_e). \quad (14)$$

As in the previous section, here we have supposed instability to be localized to shell zones of width λ , the typical wavelength. The number of particles transported across field lines if the plasma expands within the zone is $\lambda / dn/dr$, and their average energy change, if μ were conserved, would be $\mu \lambda (dB/dr)$. Eq. (14) follows with $\mu B = T$ for ions and electrons and well depth $\Delta B = R(dB/dr)$. The second step applies only to smooth density profiles, such as distributions (4).

The higher order terms in the δW expansion account for departure from adiabaticity (μ - conservation). Now, the maximum free energy computed with any constraints omitted must equal or exceed the true value. Thus the Helmholtz function $A(0)$, based on a limited number of constraints, is an upper bound on the true free energy, or $A(0) \geq \delta W$. Further, since the constraints from which $A(0)$ is calculated are not adiabatic, we surmise that $A(0)$ represents the maximum possible non-adiabatic energy transitions, just the higher order terms in δW , but $A(0)$ omits δW . For instance, in varying configurations from a magnetic well to a uniform field, $A(0)$ is unchanged in form, while $\delta W \rightarrow 0$. Thus, dropping δW in $A(0) \geq \delta W$, we make the conjecture that $A(0)$ is a bound on higher order terms,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \delta W_j \leq A(0) = \frac{1}{6} \frac{\lambda^2}{R^2} (n V T_e) \quad (15)$$

with $A(0)$ from Eq. (10). Note that, while in minimizing $A(0)$ in Sect. 2 we appear to allow only electron expansion to derive Eq. (10), this is merely a correct but artificial mathematical device. For real plasma expansions appropriate in computing δW , ions and electrons must expand together to avoid enormous charge separation energy; hence the appearance of both T_e and T_i in Eq. (14), though only T_e appears in Eqs. (10) and (15).

As usual, negative δW implies stability. Thus, comparing Eqs. (14) and (15), we conclude stability with respect to modes with $\omega < \omega_{ci}$ and $\lambda > \rho_i$ if

$$\frac{\Delta B}{B} \geq \frac{1}{6} \frac{T_e}{T_e + T_i}, \text{ for stability.} \quad (16)$$

Note that the unknown wavelength λ dropped out so long as $\lambda > \rho_i$. Note also that Eq. (16) does not apply to high frequency instabilities, $\omega \geq \omega_{ci}$, since generally for such instabilities expansion (13) in powers of ω and ρ_i would not converge.

According to Eq. (16), assuming $T_e \lesssim T_i$, systems are more likely to be stable when T_e/T_i is small. In Sect. 5, we shall examine under what circumstances this fact can be exploited.

The above argument can be extended to average wells when the distance L between regions of positive dB/dr is not too large compared to the plasma radius, R . To do so, we modify the δW expansion to expand also in the transit time, L/v_i , where $v_i^2 = 2T_i/m_i$. Then, as a leading term, Eq. (14) is replaced by Taylor's calculation of δW assuming the conservation of both μ and the adiabatic invariant J [1]. Equivalently, we may retain the convenient forms, Eqs. (14) and

(16), with ΔB replaced by ΔB_{avg} defined by equating Eq. (14) to Taylor's result, namely,

$$\Delta B_{\text{avg}} = - R^2 B^2 (n T_i)^{-1} \int \frac{dt}{L} B^{-2} \frac{dB}{dx} \frac{dp}{dx}. \quad (17)$$

Here, the integral is along field lines over one period for a periodic average well, or between mirrors for a short system. Also, x is a distance perpendicular to lines, B and R are whatever representative average values we choose to employ in writing Eq. (14), and p is the plasma pressure. We have used the approximation to Taylor's δW , which is the result given by Furth, valid for gentle magnetic curvature [12]. The appearance of L in the formula is also approximate.

Validity of the stability criterion for average wells, again a question of convergence of the new expansion of δW , requires roughly that the transit time L/v_i be shorter than τ_L , the time required for release of the expansion energy capable of driving instability. This is the condition that an ion "see" the average well rather than the negative dB/dr region alone. Now,

$$\tau_L = (\lambda B/cE) \geq (6T_i/T_e)^{\frac{1}{2}} (R/v_i) \quad (18)$$

where we took E from Eq. (11), which is the maximum electric field which plasma expansion over wavelengths $\sim \lambda$ can support. In Eq. (18), we have assumed the interesting case $\omega_{pi} > \omega_{ci}$. Then, stability criterion (16) may be applied to average wells with ΔB replaced by ΔB_{avg} if, in addition to $\omega < \omega_{ci}$ and $\lambda > \rho_i$, also $L/v_i < \tau_L$, that is, if

$$L/R < (6T_i/T_e)^{\frac{1}{2}}. \quad (19)$$

Note that once again the unknown wavelength λ has dropped out of the result.

A stability criterion which is essentially Eq. (16) can be obtained from a conventional dispersion analysis of systems which exhibit resistive universal instabilities. We shall adopt the viewpoint of Jukes [13], who used a microscopic Vlasov description of ions and a fluid description of electrons. However, in the limit of long perpendicular wavelengths relative to the ion gyroradius, the resulting dispersion relation is identical to that found by Chen using a two-fluid model [5]. The effect of the magnetic well is simulated by an effective gravity, with net diamagnetic and gravitational ion drift velocity \bar{v}_{oi} . One obtains a dispersion relation of the following form, valid for small Debye length:

$$0 = \psi^2 f + \psi [i\kappa^2 \gamma \theta + \xi (i\kappa^2 Y - \bar{\theta} \kappa \rho + \theta \kappa \delta)] + \theta \bar{\theta} \kappa^2 \delta (i\kappa Y - \rho), \quad (20)$$

where

$$\psi = (\omega - \vec{k} \cdot \vec{u}_{oi}) / \omega_{ci}, \quad \xi = 1 - Q + \frac{1}{2} \kappa^2 \lambda_D^2, \quad Q = \exp(-\frac{1}{2} \kappa^2 \rho_i^2) I_0(\frac{1}{2} \kappa^2 \rho_i^2)$$

$$\lambda_D = \text{ion Debye length}, \quad \kappa^2 = (k^2 T_e / m_i \omega_{ci}^2), \quad Y = (k_{\parallel}^2 B / k_{\perp}^2 e n \eta),$$

$$\eta = \text{resistivity}, \quad \theta = T_i/T_e, \quad \bar{\theta} = \theta + 1,$$

$$\rho = R_c^{-1} (T_e / m_i \omega_{ci}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \delta = R_p^{-1} (T_e / m_i \omega_{ci}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad R_p^{-1} = n^{-1} (dn/dx),$$

$$R_c = \text{radius of curvature of field lines}.$$

New symbols follow Chen [5], except for θ , which he calls λ . The limit of stability ($\text{Im} \omega = 0$) is given by the following expression:

$$\Delta B/B \geq \xi T_e / (\xi T_e + T_i), \quad \text{for stability.} \quad (21)$$

For short wavelength, $\xi \rightarrow 1$, whereas for $\lambda \gg \rho_i$, $\xi \sim \frac{1}{2} \kappa^2 \rho_i^2 (1 + \omega_{ci}^2 / \omega_{pi}^2)$.

Thus, deeper wells are required to stabilize shorter wavelengths. Apart from the factor $2/3$, the short wavelength limit of Eq. (21) is just Eq. (16).

When resistivity is negligible, Jukes gives a stability criterion which in our terms is

$$\Delta B/B + \exp(-\frac{1}{2}k^2\rho_1^2) I_0(\frac{1}{2}k^2\rho_1^2) - (T_e/T_1) \geq 0. \quad (22)$$

Again, the wavelength dependence is such that short wavelengths are the more difficult to stabilize, the requirement then being

$$\Delta B/B \geq T_e/T_1 \quad \text{for stability.} \quad (23)$$

Once more, this is essentially Eq. (16).

4. Anomalous Diffusion

If either $\omega > \omega_{ci}$ or $\lambda < \rho_1$, there is little tendency to conserve the adiabatic invariants and a power expansion of δW with a conserving leading term, as in Eq. (13), probably diverges. Then we must resort to Eq. (9) as the best estimate of free energy and admit the possibility of instability. For $\lambda \leq \rho_1$ but frequencies $\omega < \omega_{ci}$, and for long wavelengths along \vec{B} , particles drift radially in the electric field steadily for a time $T_L = (\lambda B/cE)$ if $T_L < \omega^{-1}$, the worst case. If we assume that after traveling radially a distance λ a particle is equally likely to proceed or to reverse direction, transport is diffusive with diffusion coefficient $D_L = \lambda^2/T_L = \lambda(cE/B)$. Then, by Eq. (11) with $\lambda = \rho_1$, the worst case, in a magnetic well or average well satisfying criterion (16) we have,

$$D_L \leq (cT_1/eB)(\rho_1/R) \left[\frac{m_e}{m_1} + \frac{2T_e}{3T_1} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (24)$$

Again, we took the case $\omega_{pi} \gg \omega_{ci}$. We neglected the β contribution in $A(0)$, as argued in Sect. 3. Generally, the m_e/m_1 term could also be dropped, leaving just the expansion energy contribution, corresponding to $A(0)$ in Eq. (10). Thus instabilities yielding Eq. (24) in a magnetic well would be classified as residual universal instabilities at short wavelength, since the frequency $\omega < \omega_L < \omega_{ci}$ is below cyclotron resonance. For the borderline case, $\lambda \sim \rho_1$, actually μ may be sufficiently well conserved and such instabilities may not exist in a magnetic well. Indeed, the dispersion analysis in Sect. 3 indicates stability even for short wavelengths if Eq. (16) is satisfied. Thus Eq. (24), though not necessarily intolerable for thermonuclear confinement if $T_e \ll T_1$, might be a considerable overestimate of D_L .

Besides the possibility of residual universal instabilities, there are also ion cyclotron resonance instabilities, $\omega \geq \omega_{ci}$, of flute type. These generally have small radial wavelength and yield a diffusion coefficient much less than Eq. (24), [14]. For stochastic transport analogous to collisional diffusion, the diffusion coefficient, estimated in Ref. [9], is again much less than Eq. (24) if $\lambda \leq \rho_1$. A possible exception is diffusion by loss cone instability in long mirror systems [15].

5. Feasibility of $T_e \ll T_1$

For average wells, open-ended or toroidal, values of ΔB_{avg} and L/R which seem achievable require $T_1/T_e \geq 10$ to satisfy stability criteria (16) and (19). For $T_1/T_e = 10$, the criteria require $\Delta B_{avg} \geq .02 B$ and $L/R \leq 8$. Even classical electron heating by binary collisions with ions demands large ion temperatures to maintain $T_1/T_e = 10$. An approximate steady-state relation equating energy removed by electrons to that transferred from ions, energy T_1 , to Maxwellian electrons, temperature T_e , is:

$$I_- E_e \approx I_+ (n\zeta) \frac{80\pi e^4}{(2m_1 T_e)^{\frac{1}{2}}} (4m_e/m_1)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2T_1}{3T_e} - 1 \right]. \quad (25)$$

Here τ is the ion lifetime, I_{\pm} are ion and electron injection rates, and E_e is the energy of escaping electrons before encountering the plasma potential difference. Typically, $E_e \sim 1-2 T_e$ in tori and $4T_e$ in mirrors. With $I_+ = I_-$ for neutral injection and $n\tau \approx 10^{14} \text{ cm}^{-3} \text{ sec}$ for D-T power production [16], $T_i/T_e = 10$ corresponds to $T_i = 300 \text{ Kev}$. At constant $n\tau$, roughly $T_i/T_e \propto T_i^{3/5}$.

For true magnetic wells, ΔB can be large and the appropriate stability criterion, just Eq. (16), can be satisfied for smaller T_i/T_e . However, with solid conductors, magnetic wells must be open-ended and rely on mirror confinement. Mirror confinement requires $T_i \gtrsim 100 \text{ kev}$ [17], corresponding to $T_i/T_e \sim 4$, in order to achieve $n\tau$ sufficient to produce net power.

The above results are altered if electrons are heated anomalously, by high frequency instabilities. The drift-cyclotron instability [14] may cause such difficulties in tori. But for short mirror systems, it now seems that such instabilities may be controlled. Aside from possible residual universal instabilities discussed in Sect. 4, in a magnetic well the known instabilities can be avoided by: mirror ratio 3.3 (Harris instability [18]); this ratio and $\beta = 0.3$ (mirror mode [17]); this β and $\Delta B = 0.3B$ (interchange [19]); this ΔB and $T_i/T_e = 5-10$ as calculated above (universal modes, criterion (16)); $L \approx 100 \rho_i$ (loss cone instability propagating along B , [12]); and $R \approx 100 \rho_i$ (loss cone flute mode [20]). If residual universal instabilities occur with diffusion coefficient Eq. (24), the required radius is $R \approx 250 \rho_i$.

6. Conclusions

Aside from possible short wavelength modes causing anomalous diffusion discussed in Sect. 4, we have obtained criteria for preventing universal instabilities in magnetic wells (Eq. (16)) and average wells (Eqs. (16) and (19)). Stabilization is easiest when $T_e \ll T_i$. We find that, to satisfy our criteria, the preferred operating range is $T_i > 100 \text{ Kev}$. Operation at lower temperatures (in tori) must rely on other means of stabilizing universal modes.

R E F E R E N C E S

- [1] GOTTF, Yu. B., IOFFE, M. S. and TELKOVSKY, V. G., Nucl. Fusion Suppl. Pt. III (1962) 1045.
- [2] FURTH, H. P. and ROSENBLUTH, M. N., Phys. Fluids 7 (1964) 764; LENARD, A., Phys. Fluids 7 (1964) 1875.
- [3] For Example, RUDAKOV, L. I. and SAGDEEV, R. Z., Nucl. Fusion Suppl. Pt. II (1962) 481; KADOMTSEV, B. B. and TIMOFEEV, A. V., Dokl. Akad. Nauk SSSR 146 (1962) 581 [Eng. Trans.: Sov. Phys. Doklady 7 (1963) 82]; KRALL, N. A. and ROSENBLUTH, M. N., Phys. Fluids 6 (1963) 254; MOISEEV, S. S. and SAGDEEV, R. Z., J. Exptl. Theoret. Phys. (U.S.S.R.) 44 (1963) 763 [Eng. trans.: Sov. Phys. JETP 17 (1963) 515].
- [4] LASHINSKY, H., Phys. Rev. Letters 12 (1964) 121.
- [5] CHEN, F. F., Princeton Univ. Plasma Phys. Lab. Rep. MATT-306 (1964); MATT-311 (1964).
- [6] ROSENBLUTH, M. N., Report on Culham Laboratory Study Group on Plasma Instabilities, Culham Lab. Rep. CLM M-21 (1963).
- [7] LASHINSKY, H., Phys. Rev. Letters 13 (1964) 47.
- [8] The equilibria described by TAYLOR, J. B., Phys. Fluids 6 (1963) 1529. Stability with respect to universal modes was further clarified recently by KRALL, N. A., to be published.
- [9] FOWLER, T. K., Phys. Fluids 8 (1965) 459.
- [10] We are indebted to Drs. K. Young and W. Harries for supplying data on fluctuations in Princeton experiments, and we wish to thank them and other members of the Model C Stellarator group for helpful discussions.
- [11] TAYLOR, J. B., Phys. Fluids 7 (1964) 767.
- [12] FURTH, H. P., Phys. Rev. Letters 11 (1963) 308.

- [13] JUKES, J. D., Phys. Fluids 7 (1964) 1468.
- [14] MIKHAILOVSKY, A. B., Nucl. Fusion, to be published.
- [15] ROSENBLUTH, M. N. and POST, R. F., Phys. Fluids 8 (1965) 547.
- [16] LAWSON, J. D., Proc. Phys. Soc. (London) B 70 (1957) 6.
- [17] POST, R. F., Nucl. Fusion Suppl. Pt. I (1962) 99.
- [18] DNESTROVSKY, Yu. N., KOSTOMAROV, D. P. and PISTUNOVICH, V. I., Nucl. Fusion 3 (1963) 30; HALL, L. S. and SHIMA, Y., to be published: They show stability if $(T_1/T_{||})_1 < 2$, true with a large mirror ratio and high density.
- [19] TAYLOR, J. B. and HASTIE, R. J., Phys. Fluids 8 (1965) 323.
- [20] SHIMA, Y., to be published.

Research sponsored by the U. S. Atomic Energy Commission under contract with the Union Carbide Corporation.

DISCUSSION

H. P. FURTH: Kadomtsev has pointed out* that the most serious instability for toroidal systems is likely to be the temperature gradient instability, and that the resultant diffusion cannot be suppressed by a moderate well in B. How do Kadomtsev's remarks fit into your scheme of things?

G. E. GUEST: There are certain omissions in our estimate which leave open the possibility that we have overlooked some potentially dangerous modes of instability. In particular, we restricted the present estimate to energy sources associated with electrons. This allowed a useful comparison with linear mode analysis but excludes the energy sources associated with ions. Also, we obtain stabilization only for modes which preserve the adiabatic invariants, and we are therefore cautious in making predictions about short-wavelength (relative to the ion gyroradius) modes.

* These proceedings (CN-21/127).

АНОМАЛЬНЫЙ УХОД ИОНОВ В КОНУС ПОТЕРЬ

А. А. ГАЛЕЕВ

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР, НОВОСИБИРСК
СССР

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

ANOMALOUS ESCAPE OF IONS INTO THE "LOSS CONE". The non-equilibrium characteristics of a plasma contained in a magnetic mirror trap lead to the appearance of the "flute", the "universal" and anisotropic instabilities considerably limiting the containment times of the particles. It is now held that the flute instability can be suppressed by using a special magnetic field design (the minimum B field). The universal instability, which is due to the inhomogeneous plasma distribution across the magnetic field, is eliminated by a relatively small shear of the magnetic lines of force.

On the other hand, as was shown recently by Rosenbluth and Post, in a plasma of sufficiently large density, $n \gtrsim 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, and length, $L \gtrsim 10^4 \lambda_D$, (λ_D being the Debye radius), even the slight anisotropy in the ion velocity distribution associated with the "loss cone" leads to the development of a shortwave instability. A detailed analysis is therefore made of the spectrum of the resulting turbulent motion and of the anomalous transfer processes taking place in the unstable plasma. In traps of finite length L , the anomalously rapid diffusion of particles into the loss cone leads to the filling of this cone, so that the instability is attenuated. This allows the use, for the description of turbulent transfer processes in a plasma, of the quasilinear theory supplemented by the kinetic equation for the energy density of the plasma oscillations. The maximum scale of the pulsations which are built up is determined by the condition of feeble attenuation near the ends of the trap, where the phase velocity becomes comparable to the mean thermal velocity of the electrons. The escape time into the loss cone arising from scattering of the ions mainly at the large-scale pulsations depends essentially on the length of the device ($\Omega_H \tau = 10^5 R_H L$; where R_H is the Larmor radius of the thermal ions). The escape time of the particles from the trap through the magnetic mirrors is determined by the longest of these escape times ($\tau_H T_{\text{eff}} L / v_i$; v_i being the ion thermal velocity).

The results are used to assess the possibility of controlled thermonuclear fusion in a magnetic mirror trap. For the purpose of this evaluation the optimum trap parameters according to Post were used, based on a comparison of the energy losses from a quiescent plasma in a magnetic mirror trap, the losses in the auxiliary systems and the total energy yield of the thermonuclear reaction. The plasma lifetime in such a trap is determined by the transit time of the thermal ions between the magnetic mirrors, and it is not sufficiently long to make possible an economically favourable thermonuclear fusion.

SORTIE ANORMALE D'IONS DANS LE CONE DE PERTE. Le déséquilibre du plasma confiné dans une machine à miroirs magnétiques entraîne l'apparition d'instabilités « en cannelures », « universelles » et anisotropes qui limitent notablement la durée du confinement des particules. On considère actuellement que l'instabilité en cannelures peut être neutralisée grâce à un choix particulier de la géométrie du champ magnétique (que l'on appelle la configuration à B minimum). L'instabilité universelle, qui est fonction de la non-homogénéité de la répartition du plasma à travers le champ magnétique, est également neutralisée par un croisement relativement réduit des lignes de force du champ magnétique.

D'autre part, Rosenbluth et Post ont remarqué récemment que, dans un plasma de densité suffisante $n \gtrsim 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ et d'une longueur suffisante $L \gtrsim 10^4 \lambda_D$ (où λ_D représente le rayon de Debye), une anisotropie assez faible dans la distribution des ions, dont les vitesses sont liées à la présence du « cône de perte », entraîne l'apparition d'une instabilité à ondes courtes. A cet égard, l'auteur analyse en détail le spectre du mouvement de turbulence qui se produit et les processus anormaux de transport dans le plasma instable. Dans les machines de longueur finie L , il arrive que la diffusion anormalement rapide des particules dans le cône de perte conduise à son remplissage et que l'instabilité s'amortisse. On peut tirer parti de ce phénomène pour décrire des processus turbulents de transport par la théorie quasi linéaire, complétée par une équation cinétique pour la densité d'énergie des oscillations du plasma. L'amplitude maximale des bouffées obtenues est déterminée par leur faible amortissement dans la zone des limites de la machine, où la vitesse de phase devient comparable à la vitesse thermique moyenne des électrons. Pour cette raison, le moment où les particules s'échappent en bouffées importantes par le cône de perte du fait de la diffusion des ions dépend essentiellement de la longueur

de l'installation ($\Omega_H \tau \approx 10^5 R_H/L$, R_H représentant le rayon de Larmor des ions thermiques). On détermine le moment où les particules sortent de la machine à travers les miroirs magnétiques en se fondant sur la valeur maximum du temps caractéristique ($\tau; T \approx L/v_i$, v_i représentant la vitesse thermique de l'ion).

L'auteur utilise les résultats obtenus pour évaluer les possibilités de réalisation d'une fusion thermonucléaire contrôlée dans la machine à miroirs magnétiques. Dans cette évaluation, il utilise les valeurs des paramètres optimaux de la machine, qui ont été trouvés par Post grâce à une comparaison des pertes d'énergie du plasma calme dans une machine à miroirs magnétiques, et des pertes dans les systèmes auxiliaires avec libération d'énergie par réaction thermonucléaire. La durée de vie du plasma dans une machine de ce genre est déterminée par le temps de vol des ions thermiques entre les miroirs magnétiques et est insuffisante pour réaliser une fusion thermonucléaire présentant des avantages économiques.

АНОМАЛЬНЫЙ УХОД ИОНОВ В КОНУС ПОТЕРЬ. Неравновесность плазмы, удерживаемой в ловушке с магнитными пробками, приводит к возникновению желобковой, универсальной и анизотропной неустойчивости, которые существенно ограничивают время удержания частиц. Желобковая неустойчивость, как сейчас считают, может быть подавлена специальным выбором геометрии магнитного поля (так называемые минимум B – конфигурации). Универсальная неустойчивость, обязанная неоднородности распределения плазмы поперек магнитного поля также стабилизируется при сравнительно малой перекрещенности силовых линий магнитного поля.

С другой стороны, Розенблют и Пост недавно заметили, что в плазме достаточной плотности $n \geq 10^{13} \text{ см}^{-3}$ и достаточной длины $L \geq 10^4 \lambda_D$ (где λ_D – дебаевский радиус) уже слабая анизотропия распределения ионов по скоростям из-за наличия конуса потерь приводит к развитию коротковолновой неустойчивости. В связи с этим в работе подробно анализируются спектр возникающего турбулентного движения и аномальные процессы переноса в неустойчивой плазме. В ловушках конечной длины L оказывается, что аномально быстрая диффузия частиц в конус потерь приводит к его заполнению и неустойчивость ослабляется. Это позволяет воспользоваться для описания турбулентных процессов переноса квазилинейной теорией, дополненной кинетическим уравнением для спектральной плотности энергии колебаний плазмы. Наибольший масштаб раскачиваемых пульсаций определяется условием малости их затухания в области торцов ловушки, где фазовая скорость становится сравнимой со средней тепловой скоростью электронов. Поэтому время выхода в конус потерь за счет рассеяния ионов в основном на крупномасштабных пульсациях существенно зависит от длины установки ($\Omega_1 \tau \approx 10^5 R_H/L$; R_H – ларморовский радиус тепловых ионов). Время выхода из ловушки через магнитные пробы определяется максимальным из времен ($\tau; T \approx L/v_i$; v_i – тепловая скорость иона).

Полученные результаты применяются к оценке возможности осуществления регулируемого термоядерного синтеза в ловушке с магнитными пробками. При оценке использовались значения оптимальных параметров ловушки, найденных Постом из сравнения потерь энергии из спокойной плазмы в пробкотроне, потерь во вспомогательных системах с суммарным выходом энергии в термоядерной реакции. Показано, что время жизни плазмы в такой ловушке определяется временем пролета тепловых ионов между магнитными пробками и недостаточно для осуществления экономически выгодного термоядерного синтеза.

ESCAPE ANOMALO DE IONES AL CONO DE PERDIDAS. La falta de uniformidad del plasma confinado en una trampa con espejos magnéticos da lugar a la formación de inestabilidades de las clases «estriada», «universal» y anisotropia, las cuales limitan sustancialmente el tiempo de confinamiento de las partículas. Según se interpreta actualmente la inestabilidad estriada, puede eliminarse utilizando una geometría del campo magnético de tipo especial (que se denomina configuración de B mínimo). La inestabilidad universal, debida a la falta de homogeneidad en la distribución del plasma en dirección transversal al campo magnético, también se estabiliza con un cruzamiento relativamente pequeño de las líneas de fuerza del campo magnético.

Por otro lado, Rosenbluth y Post observaron recientemente que, en un plasma de suficiente densidad $n \geq 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, y longitud $L \geq 10^4 \lambda_D$ (λ_D = radio de Debye), incluso una pequeña anisotropía de la descripción de velocidades de los iones, por la presencia de un «cono de pérdidas» da origen al desarrollo de una inestabilidad de onda corta. En la memoria se analiza por tanto detalladamente el espectro del movimiento turbulento que aparece y los procesos anómalos de transporte en el plasma inestable. En las trampas de longitud total resulta que la difusión anormalmente rápida de las partículas al cono de pérdidas hace que éste se llene y la inestabilidad disminuye. Esto permite aprovechar, para la descripción de los procesos turbulentos del transporte, la teoría cuasilineal, complementada con la ecuación cinética de la densidad energética de las oscilaciones del plasma. La escala máxima de las pulsaciones transmitidas se determina basándose en la condición de la pequeñaza de su amortiguamiento en la región de los extremos de la trampa, donde la velocidad de fase es com-

parable con la velocidad térmica media de los electrones. Por lo tanto, el tiempo de salida al cono de pérdidas a causa de la dispersión de los iones, fundamentalmente en las pulsaciones de gran escala, depende esencialmente de la longitud de la instalación ($\Omega_H \tau \approx 10^5 R_H / L$; R_H = radio de Larmor de los iones térmicos). El tiempo de escape de las partículas, desde la trampa, a través de los espejos magnéticos queda determinado por el tiempo máximo (τ ; $T \approx L/v_i$; v_i = velocidad térmica del ión).

Los resultados obtenidos sirven para estimar la posibilidad de lograr una fusión termonuclear regulada en una trampa con espejos magnéticos. Para hacer esta estimación se han utilizado los valores de los parámetros óptimos de la trampa, obtenidos por Post mediante la comparación de las pérdidas de energía de un plasma en calma, en un sistema de espejos, y de las pérdidas en los sistemas auxiliares, con la producción total de energía en la reacción termonuclear. Se muestra que la vida del plasma en dicha trampa está determinada por el tiempo de tránsito de los iones térmicos entre los espejos magnéticos y que no es suficiente para el aprovechamiento de la fusión termonuclear en condiciones económicas.

I. Введение

Желобковая неустойчивость плазмы в ловушках с магнитными пробками, как сейчас считается, может быть подавлена специальным выбором геометрии магнитного поля (так называемые "минимум" B - конфигурации) /1/. В связи с этим более пристального внимания заслуживает другой тип неустойчивости плазмы в такого рода устройствах: неустойчивость, связанная с локальной неизотропией функции распределения ионов по скоростям. В /2,3/ было показано, что если средняя поперечная энергия частиц существенно превышает их среднюю энергию продольного движения (вдоль магнитного поля H_0) $T_{\perp} > T_{\parallel}$ то в плазме должны самопроизвольно возбуждаться коротковолновые флюктуации электрического и магнитного полей. Неустойчивости такого рода усиливаются, если в распределении ионов по скоростям есть резкие максимумы /4/, что обычно имеет место при инъекции ионных пучков.

Однако существовало убеждение, что в реальных условиях по отношению к этому классу неустойчивостей имеется некоторый запас устойчивости. Недавно М.Розенолют и Р.Пост /5/ обратили внимание, что в плотной плазме с плотностью $n \gtrsim 10^{13} \text{ см}^{-3}$ (численная оценка приведена для типичных значений магнитных полей $H \sim 10^4 \text{ Гс}$) наличие "конуса потерь" в распределении ионов по скоростям в реальных условиях всегда приводит к развитию сильной неустойчивости. Поэтому возникает задача отыскания спектра колебаний в неустойчивой плазме и вызванной ими диффузии ионов в "конус потерь", что приводит к выходу ионов из ловушки через магнитные пробки. Но прежде чем приступить к решению этой задачи мы напомним кратко основные результаты линейной теории устойчивости, одновременно обобщив её на случай не совсем пустого "конуса потерь".

2. Линейная теория устойчивости

Нас будет интересовать плотная плазма

$$\Omega_p^2 \gg \Omega_h^2, \quad \Omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n}{M}}, \quad \Omega_h = \frac{eH}{mc} \quad (1)$$

когда возможно развитие сильной неустойчивости /5/. Поэтому как и в работе /5/ мы пренебрежем влиянием магнитного поля на движение ионов, а для описания электронов ограничимся дрейфовым приближением и будем считать их холодными.

Для возмущений вида $\sim \exp\{-i\omega t + iKz\}$ условия применимости данного приближения можно записать в виде:

$$\omega_h \gg \omega \gg \Omega_h, \quad K R_h \gg 1 \gg K \rho_h \quad (2)$$

$$\tilde{H}_0 = \{0, 0, H_z\}, \quad \frac{\omega}{K_z} \gg \sqrt{\frac{2T_e}{m}}$$

где: $R_h = V_i / \Omega_h$ - ларморовский радиус ионов с тепловыми скоростями V_i ; соответствующие величины для электронов обозначены прописными буквами ω_p , ω_h , ρ_h ; T_e - температура электронов. Найдя с помощью интегрирования по траекториям поправки к плотностям зарядов ионов и электронов и подставляя последние в уравнение Пуассона для электрического потенциала

φ возмущений, которые мы будем предполагать потенциальными, получаем дисперсионное уравнение для колебаний:

$$\mathcal{E}(\omega, K) \equiv 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_h^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \cdot \frac{K_z^2}{K^2} + \frac{\Omega_p^2}{K^2 V_i^2} \left[\psi(0) - F\left(\frac{\omega}{K V_i}\right) \right] = 0 \quad (3)$$

где: $\psi(x) = V_i^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dV_z f_{oi}(V_x, V_z)$ - функция распределения ионов по безразмерным скоростям $x = V_x / V_i$, удовлетворяющая условию нормировки $\int dx \psi(x) = 1$.

$$F(y) = -2 \int_0^\infty dx \frac{d\psi/dx}{\sqrt{1-x^2/y^2}}$$

Здесь в подынтегральном выражении нужная ветвь корня на действительной оси $y = y_r + i\epsilon$ выбирается так /5/:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x/y^2}} &= \frac{1/y_r}{\sqrt{y_r^2 - x}}, \quad x < y_r^2 \\ \frac{1}{\sqrt{1-x/y^2}} &= -\frac{i y_r}{\sqrt{x-y_r^2}}, \quad x > y_r^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Из уравнения (3) легко найти выражение для инкремента неустойчивости $\gamma = \Im \omega$ для случая $\gamma \ll \omega$:

$$\gamma = \frac{\omega \Im F(\frac{\omega}{k v_i})}{2 \left[\kappa^2 \lambda_D^2 \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_n^2} \right) + \psi(0) - \operatorname{Re} F - \frac{1}{2} \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \operatorname{Re} F \right]} \quad (5)$$

Для разумных распределений частиц в плазме, функция распределения $f_i(v_1, v_2)$ которых конечна во всех точках фазового пространства скоростей, включая и начало координат¹⁾, отсутствуют частицы с поперечными скоростями равными нулю: $\psi(0) = 0$. Поэтому, как следует из выражения (5), инкремент неустойчивости положителен для достаточно малых фазовых скоростей $\omega/k v_i$ и достигает максимума $\gamma \sim \omega$ при длинах волн

$$\kappa \lambda_D \lesssim \sqrt{\operatorname{Re} F(y_m) / 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_n^2}}, \quad \frac{\omega}{k v_i} = y_m \quad (6)$$

где: $\lambda_D = v_i / 52_p$ — дебаевский радиус ионов,

y_m — значение аргумента функций $\Im F(y)$, при котором последняя достигает положительного максимума $\Im F_i \equiv \max y \Im F(y) > 0$. Этот случай и был рассмотрен в работе /5/.

Однако, развитие неустойчивости может привести к столь быстрой диффузии ионов в "конус потерь", что при достаточно больших длинах установки ионы не успеют покинуть его и поэтому мы должны будем рассмотреть более общий случай $\psi(0) \neq 0$.

I) На возможность стабилизации неустойчивости при наличии большого числа медленных частиц, накапливающихся в ловушке при непрерывной инъекции частиц, автору указывал Б.Б.Кадомцев и этот вопрос будет коротко разобран в разделе 5 на одном частном примере распределения ионов.

В последнем случае частичное заполнение "конуса потерь" приводит, естественно, к эффективному уменьшению степени анизотропии и вследствие этого к ослаблению неустойчивости²⁾.

Максимум функции $\Im F$ при этом смещается в область малых y и падает по величине. Наконец при условии

$$\int_0^{\infty} \frac{d\psi/dx}{\sqrt{x}} dx < 0$$

была бы невозможной раскачка возмущений даже с очень малой фазовой скоростью $\omega/kV_i \rightarrow 0$. Однако ясно, что слабая неустойчивость должна остаться, чтобы пополнять "конус потерь" по мере оттока ионов через магнитные пробки за времена пролёта $T = L/v_z$.

Для целей управляемого термоядерного синтеза практически интересны лишь времена удержания плазмы большие, чем время выхода электронов из ловушки за счёт кулоновских соударений. Поэтому можно считать, что электроны покидают ловушку быстрее, чем ионы и благодаря этому плазма оказывается положительно заряженной. Это в свою очередь приводит к выталкиванию очень медленных ионов вдоль силовых линий на торцы системы. Следовательно, время выхода плазмы из "конуса потерь" на торцы определяется временем пролёта между магнитными пробками тепловых ионов со скоростями порядка $v_i \sim V_i$ ³⁾

$$T \sim L/v_i, \quad L > L_* \quad (7)$$

Таким образом в длинных системах распределение плазмы под действием неустойчивости быстро релаксирует к более устойчивому состоянию. Время удержания при этом определяется временем пролёта ионов между магнитными пробками и нам нет необходимости рассматривать картину турбулентной диффузии ионов в "конус потерь". Тем не менее слабость неустойчивости $\chi \ll \omega$ позволяет описать разумным образом картину возникающей слабой турбулентности и вычислить время турбулентной диффузии ионов в пространстве скоростей τ_D , которое в пределе пустого "конуса потерь" $\psi(0) < F_2 \equiv Re F$ даёт оценку для времени жизни плазмы и величину критической длины $L_* \sim V_i \tau_D$ ниже которой ионы успевают покидать "конус потерь" и его можно считать пустым.

²⁾ Автор признателен Р.З.Сагдееву за это замечание.

³⁾ Выражение для L_* будет дано в разделе 4.

3. Нелинейная теория устойчивости

Поэтому сейчас мы перейдём к рассмотрению возникающего в результате неустойчивости спектра турбулентности, предполагая неустойчивость слабой $\gamma \ll \omega$. Слабо турбулентное состояние плазмы удобно представлять в виде набора коллективных колебаний плазмы, взаимодействующих между собой, и некоторого усредненного распределения частиц не участвующих в колебаниях. При большом числе колебаний фазы их амплитуд можно считать хаотическими и провести по ним усреднение. Тогда из кинетических уравнений Больцмана и уравнения Пуассона разложением энергии взаимодействия колебаний по малым амплитудам колебаний мы можем получить систему кинетических уравнений для взаимодействующих колебаний плазмы. Вывод таких уравнений вплоть до членов второго порядка по энергии колебаний содержится в ряде обзоров [6, 7]. Входящая в эти уравнения диэлектрическая проницаемость плазмы для продольных колебаний ($E = -\nabla \Phi$) вычислена вплоть до третьего приближения по амплитудам для произвольных (ω, \mathbf{k}) в [7]. В предположениях (2) более существенной оказывается нелинейность в электронных уравнениях, так что уравнения для колебаний можно существенно упростить и записать в виде:

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = 2\gamma_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}'} R(\mathbf{k}, \mathbf{k}') n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'} + \quad (8)$$

$$+ 2\pi \sum_{\substack{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k} \\ \mathbf{k}' \perp \mathbf{k}''}} |V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''}|^2 \delta(\omega - \omega' - \omega'') (n_{\mathbf{k}'} h_{\mathbf{k}''} - n_{\mathbf{k}''} h_{\mathbf{k}'} \theta_{\mathbf{k}''} \theta_{\mathbf{k}'} - n_{\mathbf{k}'} n_{\mathbf{k}''} \theta_{\mathbf{k}'} \theta_{\mathbf{k}''})$$

где: $n_{\mathbf{k}} = \left| \frac{\partial E(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \right| / \frac{k^2 / 4\pi}{8\pi}$ - число колебаний с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} ;

$$\gamma_{\mathbf{k}} = -\Omega_p^2 \operatorname{Im} F\left(\frac{\omega}{k v_i}\right) / k^2 v_i^2 \frac{\partial E(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \quad \text{- инкремент неустойчивости,}$$

$$\Theta_{\mathbf{k}} = \operatorname{Sign} \omega \frac{\partial E(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \quad \text{- знак энергии колебаний;}$$

$$|V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''}|^2 = \frac{\left| \frac{\omega_p^2 e^{[\mathbf{k}' \times \mathbf{k}'']_z}}{8\pi m \omega_h} \cdot \left(\frac{\mathbf{k}'_z - \mathbf{k}''_z}{\omega' - \omega''} \right) \left(\frac{\mathbf{k}'_z}{\omega} + \frac{\mathbf{k}''_z}{\omega'} + \frac{\mathbf{k}_z}{\omega''} \right) \right|^2}{\frac{k^2 k'^2 k''^2}{(8\pi)^3} / \frac{\partial E(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial E(\omega', \mathbf{k}')}{\partial \omega'} \cdot \frac{\partial E(\omega'', \mathbf{k}'')}{\partial \omega''}}$$

$$R(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{16\pi \Omega_p^2 e^2 [\mathbf{k} \times \mathbf{k}']_z^2}{k^2 k'^2 M^2 v_i^2 \Omega_h^2 \omega^2} \frac{\partial E(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial E(\omega', \mathbf{k}')}{\partial \omega'} \cdot F\left(\frac{\omega + \omega'}{k^2 + k'^2}\right)$$

Первый член в этом уравнении описывает резонансную раскачку колебаний ионами с инкрементом $\tilde{\gamma}_k$; второй резонансное поглощение ионами сразу двух колебаний с частотами ω и ω' ; наконец третий член описывает распады колебаний. Заметим, что несмотря на то, что нелинейность в уравнениях для электронов оказывается в $(\Omega_p / \Omega_n)^2$ раз большей чем для ионов, даже в нелинейном режиме более эффективно взаимодействуют с колебаниями ионы. Рассеяние же волн электронами, которое также возможно при близких частотах колебаний $\omega - \omega' < |K_2 - K_2'| / \sqrt{\frac{2T_e}{m}}$, оказывается меньшим по порядку величины. Кроме того, в реальных случаях $y_m < 1$ и поэтому поглощение ионами сразу двух колебаний с близкими по величине, но противоположными по направлению волновыми векторами.

$$|K + K'| = \frac{\omega + \omega'}{v} < y_m / |\tilde{\gamma}|$$

также оказывается малым по сравнению с распадами как $y_m^4 \ll 1$.

Поэтому, сравнивая в кинетическом уравнении (8) член прихода энергии в колебания из-за неустойчивости и ухода её благодаря оттоку энергии вследствие распадных процессов в затухающие области спектра, получаем оценку для спектральной плотности энергии колебаний в режиме установившейся турбулентности:

$$\sum_k \frac{e^2 |\Psi_k|^2}{M^2 V_i^4} \sim \frac{y_m F(y_m) \cdot y_m^2}{10 \kappa^2 R_n^2 [\psi(0) + R_F F + \kappa^2 \lambda_D^2 (1 + \frac{\omega_F^2}{\omega_n^2})]} \quad (9)$$

4. Турбулентная диффузия ионов в "конус потерь"

Зная спектр турбулентности мы можем с помощью "квазилинейного" уравнения описать процессы турбулентной диффузии ионов в пространстве скоростей под действием нарастающих в неустойчивой плаэме колебаний. Здесь уместно заметить, что турбулентная диффузия ионов происходит лишь благодаря линейным процессам испускания и поглощения одного колебания ионами, в то время как нелинейные процессы распада лишь перераспределяют энергию между колебаниями. На электроны в этом приближении не действует никакая сила, так что относительного движения двух компонент

плазмы (обычной диффузии поперёк поля \tilde{H}_0) не возникает. Поэтому обратное влияние колебаний на плазму описывается обычным "квазилинейным" уравнением для ионов /8,9/.

$$\frac{\partial f_{oi}}{\partial t} \approx \frac{e^2}{M^2} K \frac{\partial}{\partial v} \sum_{\tilde{k}} \frac{J_{\tilde{k}} |V_{\tilde{k}}|^2}{(\omega_{\tilde{k}} - K v)^2 + J_{\tilde{k}}^2} f_{oi}$$

В силу того, что импульс колебаний направлен поперёк магнитного поля ($K_z \gg K_x$), меняется только поперечная составляющая скорости V_z . Кроме того, пробкотрон обладает аксиальной симметрией и мы поэтому можем проинтегрировать уравнение (10) по углам вращения ионов на орбите \varnothing и по продольным скоростям V_x .

Наиболее просто при этом выглядит резонансная часть взаимодействия:

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sum_{\substack{x > \frac{\omega_x^2}{K^2 V_i^2} \\ K > K_*}} |\omega_x| e^2 |V_x|^2 / M^2 V_i^4 \sqrt{\frac{K^2 V_i^2}{\omega_x^2} x - 1} \right\} \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \quad (10)$$

Нерезонансная часть взаимодействия даёт такой же по порядку величины суммарный вклад в диффузию и может быть легко получена из (4) введением конечной величины инкремента $\omega_x \rightarrow \omega_x + i \gamma_x$. Подставляя сюда оценку (9) для спектра получаем порядок величины коэффициента диффузии:

$$\mathcal{D}(x) \sim \sum_{K > K_*} \frac{y_m^3 \Omega_n F_i}{10 K^2 R_h} \left[\psi(0) + F_i + K^2 \lambda_D^2 \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_x^2} \right) \right] \sqrt{\frac{x}{y_m^2} - 1} \quad (II)$$

Отсюда следует, что к наиболее сильной турбулентной диффузии приводят длинноволновые колебания. Наиболее крупный масштаб раскачиваемых пульсаций находим из условия пренебрежения затуханием вблизи торцов ловушки, где $\omega_p \rightarrow 0$, $K_x \rightarrow \infty$ и, следовательно, много электронов попадает в резонанс с волной (волна может также затухать и на самих торцовых пластинах). Для того, чтобы такое затухание не влияло на ход развития неустойчивости, необходимо, чтобы колебания по мере продвижения к торцам успевали нарастать до большого уровня (9), когда часть колебаний из-за процессов распада возвращается от торцов в область центра ловушки и таким образом поддерживает положительную обратную связь. Таким образом неустойчивость существенно нелинейная, ибо только колебания конечной (хотя и малой амплитуды) могут нарасти до

уровня (9) за конечное время их распространения до торцов. Мы будем исходить из уровня тепловых флюктуаций:

$$V \omega \frac{\partial \xi(\omega, k)}{\partial \omega} \cdot \frac{k^2 / |\varphi_{k \text{ th}}|^2}{8\pi} = M V_i^2 \quad (I2)$$

где: V — объём системы. Тогда условие на длины волн раскачиваемых пульсаций примет вид:

$$2 J_m k_z L > \ln |\varphi_k|^2 / |\varphi_{k \text{ th}}|^2 \quad (I3)$$

С помощью (9), (I2) легко убедиться, что правая часть здесь имеет порядок величины кулоновского логарифма $\lambda \approx \ln(MV_i^2 \lambda_D / e^2)$. Для оптимальных условий термоядерного синтеза $\lambda \approx 20$, так что условие (I3) можно переписать в виде

$$J_m k_z L \geq 10 \quad (I3^I)$$

Определяя $J_m k_z$ из дисперсионного уравнения (3) получаем:

$$\kappa \lambda_D > 10 \lambda_D \sqrt{\frac{M}{m} [\psi(0) + F_z + \kappa^2 \lambda_D^2 (1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_h^2})]} / J_m F_i L \quad (I4)$$

При $L < L_c \approx 10 \lambda_D \sqrt{\frac{M}{m} (1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_h^2})} / J_m F_i$

вообще невозможна раскачка никаких колебаний. Если $L > L_c$, то подставляя из (I4) минимально допустимое K_* в выражение (II) для $\Delta(x)$, находим время удержания основной части ионов ($x \sim 1$) в не очень длинных ловушках:

$$\Omega_h \tau_D \approx \frac{10^2 R_h \sqrt{M F_z^3 / m}}{J_m^5 F_i^2 L}, \quad L_* \geq L \geq L_c \quad (I5)$$

При длинах больших L_*

$$L > L_* \approx \frac{10 R_h \sqrt[4]{2 M F_z^3 / m}}{J_m^{5/2} F_i} \quad (I6)$$

время диффузии τ_D меньше времени пролета ионов между магнитными пробками T , так что время удержания определяется последним.

Необходимость в вычислении коэффициента турбулентной диффузии (15) вообще может отсутствовать, если $L_* < L_c$. Это имеет место при достаточно малых плотностях:

$$\frac{\Omega_p}{\sqrt{\Omega_H^2 + m \Omega_p^2 / M}} < y_m^{3/2} \sqrt[4]{M/m F_r^3}$$

Отметим, что при изменении длины от L_c до L_* длина волны раскачиваемых колебаний остаётся значительно короче ларморовского радиуса ионов

$$k(L_*) \sim R_H^{-1} y_m^{3/2} \sqrt[4]{M/m F_r} \gg R_H^{-1}$$

инкремент $y_* \approx \Omega_H y_m^{3/2} F_r \sqrt[4]{M/m F_r^5} \gtrsim \Omega_H$ и частота $\omega \gg \Omega_H$. Поэтому мы нигде не выходим за пределы применимости теории.

Чтобы более реально представить себе порядки величин критических длин и времени удержания, мы воспользуемся для функции распределения ионов аппроксимацией /5/:

$$f_{oi} = \begin{cases} \sqrt{v_L^2 - v_z^2} \exp \left\{ -M v_L^2 / 2 T_i \right\}, & v_L > |v_z| \\ 0 & , v_L < |v_z| \end{cases}$$

Функция F тогда может быть записана через хорошо известную функцию /IO,II/:

$$F(y) = y(1-2y^2)Z(y) - 2y^2, Z(y) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-y} dt$$

Максимум при $\Im F > 0$ достигается при $y_m = 0,367$ и равен $F_r \approx +0,31$. Реальная часть $F_r = -0,44$. Тогда для водорода имеем:

$$\begin{aligned} \Omega_H \tau_D &\approx 3 \cdot 10^6 R_H / L \\ L_c &\approx 4 \cdot 10^3 \lambda_D \sqrt{1 + \omega_p^2 / \omega_H^2} \\ L_* &\approx 1,5 \cdot 10^3 R_H \end{aligned} \quad (I7)$$

5. Модель устойчивой в отсутствии столкновений плазмы

Развитую здесь теорию аномального ухода ионов из пробкотрона непосредственно можно использовать для оценки времени

жизни плазмы с устойчивым распределением по скоростям, допускающим наличие "конуса потерь"⁴⁾:

$$f(v_1, v_2) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha F_{\alpha}(v_1^2) \delta(v_1 - \alpha/v_2) \quad (I8)$$

где: $F_{\alpha}(v_1^2)$ — произвольная функция переменных α, v_1 . Такая плазма будет устойчива, если распределение по поперечным скоростям при $v_2 \rightarrow 0$ имеет не слишком глубокий провал, так что

$$\int_0^{\infty} dv_1 \frac{d}{v_1 dv_1} \int_1^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha} F_{\alpha}(v_1^2) < 0$$

Конечность функции распределения по поперечным скоростям $\psi(v_1^2)$ в нуле при пустом "конусе потерь" требует наличия бесконечного максимума $f(v_1, v_2) \rightarrow \infty$ при $v_1, v_2 \rightarrow 0$. Создание плазмы с таким распределением кажется весьма нереальным, но мы тем не менее хотя бы на уровне оценок исследуем вопрос об удержании подобной плазмы в пробкотроне.

Вследствие быстрого роста сечения кулоновских столкновений на малых энергиях следует ожидать сильного искажения распределения частиц при малых скоростях. Столкновения ионов между собой, естественно, приведут к установлению конечного значения $f(0, 0) < \infty$ и, следовательно, с учётом наличия "конуса потерь" к развитию неустойчивости. Для оценок влияния столкновений нам достаточно воспользоваться S_{loss} -членом в формуле Л.Ландау:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{S_t} = 2\pi \lambda \frac{e^4}{M^2} \frac{\partial}{\partial v_i} \left\{ \left(\frac{\delta_{ik}}{|v - v'|} - \frac{(v_i - v'_i)(v_k - v'_k)}{|v - v'|^3} \right) \left(f(v) \frac{\partial f(v)}{\partial v'_k} - f(v') \frac{\partial f(v')}{\partial v_k} \right) \right\} \quad (I9)$$

где: $i, k = 1, 2, 3$; λ — кулоновский логарифм.

Величину области в окрестности начала координат $v < \Delta v$, где под действием столкновений устанавливается почти максвелловское распределение, мы определим приравнивая время его установления в той области за счёт столкновений

$$\tau_i \approx \tau_i \Delta v^2 / v_i^2 \quad , \quad \tau_i \approx \frac{M^2 v_i^3}{2\pi n e^4 \lambda}$$

ко времени турбулентной диффузии (I5) основной части плазмы из-

4) Частичный вид такого распределения предложен в качестве модели А.Б.Михайловским.

за резкого спада функции $\int f(v_1, v_2) dv_2$ в области $v_2 < \Delta v$

$$\tau_i \approx \tau_{D1} v_i^5 / \Delta v^5, \quad \tau_{D1} \approx 10^2 \sqrt{\frac{m}{\pi}} R_H F_r^{3/2} / L F_i^2$$

В результате получаем:

$$\Delta v_i \approx v_i (\tau_{D1} / \tau_i)^{1/5} \quad (20)$$

Соответственно время удержания есть

$$\tau_i \approx \tau_i^{5/2} \tau_{D1}^{2/5} \quad (21)$$

Критическая длина L_c определяется формулой (I4)
при $U_m \sim \Delta v / v_i$.

Выражение же для L_c меняется более существенно.

Это связано с тем, что столкновения лишь изотропизуют распределение частиц в окрестности начала координат $v < \Delta v$, оставляя устойчивой остальную часть распределения $v > \Delta v$. Поэтому неустойчивость не может развиваться пока в этой области фазового пространства не освободится "конус потерь". Следовательно, оценка (21) будет справедлива при:

$$L / \Delta v_i < \tau_i$$

С учётом (20) это можно переписать в виде:

$$\tau_i^{4/5} \tau_{D1}^{3/5} > T \quad (22)$$

В противном случае образуется область фазового пространства $\Delta v_2 > \Delta v_i$, в которой "конус потерь" заполняется за счёт столкновений быстрее, чем частицы уходят из него. Δv_2 определяется из условия равенства времён пролёта и столкновений медленных частиц:

$$/\Delta v_2 \sim v_i (T / \tau_i)^{1/3} \quad (23)$$

Время жизни плазмы отсюда есть

$$\tau_2 \approx T^{2/3} \tau_i^{1/3} \quad (24)$$

Требование пренебрежения влиянием магнитного поля на движение ионов в волне до критических длин L_* указывает пределы применимости результатов

$$\gamma_* \sim (\tau_{D1}/\tau_i)^{1/2} K(L_*) V_i > \Omega_h$$

При нарушении этого условия следует перейти к рассмотрению устойчивости относительно колебаний с частотами вблизи циклотронных резонансов ионов [12].

6. Дрейфово-анизотропная неустойчивость в коротких ловушках

До сих пор мы рассматривали лишь возмущения, имеющие вид бегущей вдоль магнитного поля волны $K_z \neq 0$. Как было уже отмечено ранее, возмущения такого рода интенсивно затухают в области "магнитных пробок", где фазовая скорость возмущений становится сравнимой с тепловой скоростью электронов. Это накладывает ограничение снизу на длину систем, в которой возможно развитие неустойчивости этого типа $L > L_c$. С другой стороны в коротких системах длиной $L < L_c$ в той же области частот и длин волн существуют колебания желобкового типа $K_z = 0$, связанные с неоднородностью плотности [12]. Расчеты полностью аналогичные [5] показали, что наличия "конуса потерь" также достаточно для развития этих колебаний [13]. Критический радиус плазменного объема, ниже которого развивается неустойчивость, оказывается в условиях, необходимых для протекания термоядерных реакций, одного порядка с критической длиной $R_c \approx L_c \approx 10^2 R_h$ [13]. Поэтому в силу требования $R < L$ невозможно получить устойчивую плазму, в которой $R > R_c$, $L < L_c$.

5/ Мы не касаемся в данной работе раскачки возмущений желобкового типа, которая возможна в однородной плазме, либо при наличии резких максимумов в распределении ионов по скоростям [14], либо при наличии значительной доли холодных ионов [15].

Рассмотрение устойчивости и аномального ухода ионов из коротких ловушек во многом аналогично ранее рассмотренному случаю длинных систем. Учет неоднородности плазмы в кинетическом уравнении для волн /распределение частиц предполагается неоднородным по радиусу ζ / приводит лишь к незначительным изменениям. Так в линейном приближении получаем дисперсионное уравнение:

$$\xi(\omega, \zeta) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_h^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{k_z^2}{k^2} - \frac{\Omega_p^2}{k^2 v_i^2} \frac{\omega_*}{\omega} + \frac{\Omega_p^2}{k^2 v_i^2} [\psi_0] + F\left(\frac{\omega}{kv_i}\right) = 0$$

$$\omega_* = \frac{k_\phi v_i^2}{\Omega_h} \frac{1}{n} \frac{dn}{d\zeta} ; \quad k_\phi = \frac{\ell}{\zeta}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

$$F(y) = 2 \int_0^\infty dx \frac{\partial \psi / \partial x + \omega_* / 2\omega \psi}{\sqrt{1 - x/y^2}}$$

Совершенно аналогично в выражении для матричного элемента $V_{\zeta, \zeta; \zeta}$ следует произвести замену:

$$\left(\frac{K_z'}{\omega'}, \frac{K_z''}{\omega''} \right) \left(\frac{K_z}{\omega} + \frac{K_z'}{\omega'} + \frac{K_z''}{\omega''} \right) \rightarrow \left(\frac{K_z'}{\omega'}, \frac{K_z''}{\omega''} \right) \left(\frac{K_z}{\omega} + \frac{K_z'}{\omega'} + \frac{K_z''}{\omega''} \right) + \left(\frac{K_\phi' v_i}{\omega_h \omega' n} - \frac{K_\phi'' v_i}{\omega_h \omega'' n} \right) \quad (26)$$

Поскольку в силу (25) вся эта комбинация по порядку величины может быть выражена в виде некоторой функции от волнового числа колебаний $K_z = \sqrt{k_\phi^2 + k_z^2}$, то спектральная плотность энергии, выраженная через инкремент γ_z волновое число K_z и фазовую скорость $v_z = \omega_z / K_z v_i$ попрежнему дается выражением (9)

$$\sum_{\zeta} \frac{e^2 |\psi_{\zeta}|^2}{M^2 v_i^4} \approx 0,1 \gamma_z v_z / \omega_z K_z^2 R_h^2 \quad (27)$$

В слабонеоднородной плазме фазовая скорость, определяемая дисперсионным соотношением (25), очень мала $v_z \ll v_m$

Поэтому для $F(y)$ можно воспользоваться приближенной формулой

$$F(y) = iy\tilde{\sigma}; \quad \tilde{\sigma} = 2 \int_0^\infty dx \left(\frac{d\Psi}{dx} + \frac{\omega_*}{2\omega} \Psi \right) x^{-1/2} \quad (28)$$

Колебания с $\kappa_{\text{д}} \equiv 0$ имеют частоту

$$\omega_{\text{д}} = \frac{\omega_*}{R^2 \lambda_{\text{д}}^2 + \psi(0)} \left[1 + iy \approx \frac{\omega_*}{\omega_*} \tilde{\sigma} \right] \quad (29)$$

$$\lambda_{\text{д}} = v_i / \Omega_{p*}, \quad \Omega_{p*} = \Omega_p \sqrt{1 + \omega_p^2 / \omega_n^2}$$

Инкремент растет с увеличением длины волны и достигает своего максимального значения

$$y_{\text{max}} \approx \omega \approx \Omega_{p*} \left(\frac{R_h \nabla R}{2n} \right)^{3/4} \left(\frac{2}{5} \right)^{1/4} \quad (30)$$

при длинах волн

$$\kappa_m \lambda_{\text{д}} \approx \left(\frac{R_h \nabla R}{n} \tilde{\sigma} \right)^{1/4} \quad (31)$$

В область более коротких длин волн $\lambda_{\text{д}} > \kappa > \kappa_m$ он падает как $y \approx y_{\text{max}} (\kappa_m / \kappa)^5$. В длинноволновой части спектра в уравнении (29) основными являются два члена в правой части, так что инкремент опять падает

$$\omega_* + iy = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \kappa v_i \left(\frac{R_h \nabla R}{5n} \right)^{1/2} \gg \omega_*, \quad \kappa < \kappa_m \quad (32)$$

Условие $y_{\text{max}} \geq \Omega_n$ определяет нам критическую плотность

$$\frac{R_h \nabla R}{n} \geq 2 \left[\frac{\Omega_n^2}{\Omega_p^2} + \frac{m}{M} \right]^{2/3} \left(\frac{5}{2} \right)^{1/3} \quad (33)$$

Поскольку при оптимальных для осуществления реакций синтеза условиях $\Omega_p^2 > (M/m) \Omega_n^2$, то критический радиус дается выражением

$$\frac{n}{\nabla n} > R_c = R_h (M/m)^{2/3}$$

Из (27), (29), (32) следует, что спектральная плотность

6/ Для моноэнергетического распределения ионов этот критерий имеется в 1/12/.

энергии в область коротковолновых пульсаций спадает очень сильно:

$$\sum_k |\psi_k|^2 \sim k^{-10} \quad , \quad \lambda_{D*}^{-1} > k > k_m \quad (34a)$$

а в область длинных волн растет более медленно

$$\sum_k |\psi_k|^2 \sim k^{-2} \quad , \quad k < k_m \quad (34b)$$

Очень длинноволновые колебания, для которых инкремент нарастания становится сравнимым с гирочастотой ионов, не могут рассматриваться на основе 25. Это происходит при длинах волн больших чем

$$k < k_c \approx R_H^{-1} \left(\frac{2e\Omega}{R_H v_i} \right)^{1/2} \quad (35)$$

Знание спектра турбулентных пульсаций позволяет нам описать процесс турбулентной диффузии ионов. В силу неравенства $y_2 \ll 1$ квазилинейное уравнение сильно упрощается:

$$\frac{\partial \psi(x, v_i, t)}{\partial t} = \frac{e^2}{m^2} \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2k_\phi v_i^2}{\omega_k \Omega_H} \frac{\partial}{\partial v_i} \right) \frac{\omega_k^2 |\psi_k|^2}{k_\phi v_i^4 \sqrt{x}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{k_\phi v_i^2}{\omega_k \Omega_H} \frac{\partial}{\partial v_i} \right) \psi \quad (36)$$

Действительно, интегрируя это уравнение по скоростям и по координате v , легко убедиться, что отношение суммарного потока ионов поперек магнитного поля j_\perp и вдоль него j_\parallel через пробки j_h оказывается независящим от уровня турбулентных пульсаций и очень малым:

$$j_\perp / j_\parallel \equiv \frac{\omega_*}{2\omega} \Big|_{k \approx k_c} \sim \left(\frac{e R_H v_i}{2\pi} \right)^{y_2} \ll 1, k_c = 0 \quad (37)$$

Поэтому диффузией ионов поперек магнитного поля можно пренебречь (в 12 она ошибочно считалась основным процессом, приводящим к уходу частиц из ловушки). Уравнение (36) при этом принимает совсем простой вид:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial x} x^{-1/2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (38)$$

Коэффициент диффузии здесь попрежнему дается выражением (11)

$$\mathcal{D} \approx \sum_{\kappa} y_{\kappa} w_{\kappa} \frac{e^2 |\Psi_{\kappa}|^2}{M^2 v_{\perp}^4} \approx 0,1 y_{\kappa}^3 / k_{\perp}^2 R_h^2 \quad (39)$$

где y_{κ} , y_{κ} и минимальный масштаб турбулентности определяются из (32), (35).

Время выхода плазмы из ловушки по порядку величины дается выражением

$$\Omega_h \tau \approx 10 \left(\frac{2 \pi n}{R_h v_{\perp}} \right)^{5/2} \quad (40)$$

Поскольку диффузия в "конус потерь" происходит очень интенсивно, то при длинах ловушки больших:

$$L > L_* \approx 10 \left(\frac{2 \pi n}{R_h v_{\perp}} \right)^{5/2} R_h \quad (41)$$

"конус потерь" заполняется, так что время выхода увеличивается до времени пролета тепловых ионов между магнитными пробками:

$$\tau \sim L / v_{\perp} \quad (42)$$

Заметим, наконец, что для распределений ионов, у которых спад числа ионов с энергией v_{\perp}^2 начинается лишь с очень малой энергии $v_{\perp}^2 < v_{\perp}^2 (R_h v_{\perp} / n)$, следует пользоваться другим выражением для времени диффузии в "конус потерь"

$$\tau \approx \tau_D y_m^{-1/2}, \quad \tau_D \approx \frac{10 \Omega_p * (R_h v_{\perp} / n)^{3/2}}{\Omega_h^2 \sigma} \quad (43)$$

7. Нестационарный распад плотной плазмы

Рассмотрим сначала распад плотной плазмы в ловушке с магнитными пробками в зависимости от времени t . Задача сво-

дится к решению уравнения 38 при одном начальном условии

$$\left. \psi(w_1, w_2, t) \right|_{t=0} = \psi_o(w_1, w_2); \quad w_1 = \frac{v^2}{U^2}; w_2 = \frac{v^2}{U^2} (44)$$

и двух граничных

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial w_1} \right|_{w_1=0} = 0 \quad (45)$$

$$\left. \psi \right|_{w_1 = t g^2 \theta_o w_2} = 0 \quad (46)$$

Здесь мы предположили область магнитных пробок очень малой, так что их влияние сводится к граничному условию (46). Угол раствора "конуса потерь" положен равным θ_o .

Наиболее просто найти решение для длинных ловушек $L > L_*$, использовав преобразование Лапласа по времени. В результате получаем:

$$\psi(w_1, w_2, t) = \int_{tg^2 \theta_o w_2}^{\infty} dw'_1 \psi_o(w'_1, w_2) G(\lambda, w'_1, w'_1, t) \quad (47)$$

$$G(\lambda, w_1, w_1, t) \equiv \frac{5\lambda}{2} e^{-\lambda (w_1^{5/2} + w_1^{5/2})} \cdot w_1^{3/4} w_2^{3/4} I_{-\frac{3}{5}}(2\lambda w_1^{5/4} w_1^{5/4})$$

- функция Грина для уравнения 38;

$$I_{-\frac{3}{5}} - \text{модифицированная функция Бесселя}; \quad \lambda = \frac{4}{25 D t}$$

Отсюда видно, что конус потерь интенсивно заполняется за время $t \sim D^{-1}$. Этот процесс ослабляется условием развития неустойчивости

$$I \equiv \int_{w_1}^{\infty} \int_{w_2}^{\infty} d\sqrt{w_1} d\psi(w'_1, w'_2, t) \Big|_{dw'_1} \cdot w_1^{-1/2} \geq 0 \quad (48)$$

Значение этого интеграла на границе неустойчивости $I=0$ определяет неявным образом уровень турбулентности /величину D /.

Используя 47 записываем 48 в виде:

$$I = \frac{5 \Gamma(4/5)}{\Gamma(2/5)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\sqrt{W_2} \int_0^{\infty} ds \left(\frac{s}{2}\right)^{-1/5} \Psi_0\left(\left(\frac{s}{2}\right)^{2/5}, w_2\right) e^{-\frac{s^2}{2}} \quad (49)$$

$$\left\{ s^{-\frac{1}{5}} M_{\frac{1}{10}, \frac{1}{5}}(s) - \frac{2}{5} s^{-3/5} M_{-\frac{3}{5}, -\frac{3}{10}}(s) \right\} = 0$$

где: $M_{M, \nu}(s)$ - вырожденная гипергеометрическая функция /16/. Этот интеграл берется в транцендентных функциях лишь для некоторых частных моделей распределения Ψ_0 . Однако ясно, что корень уравнения (49) по порядку величины определяется соотношением

$$\alpha \approx \frac{4}{25 D t} \sim 1 \quad (50)$$

так что уровень турбулентных пульсаций при $t \rightarrow \infty$ падает приблизительно обратно пропорционально времени.

Для случая коротких ловушек формулу (47) следует модифицировать в соответствии с тем, что частицы продиффундировавшие в "конус потерь" немедленно уходят из ловушки через "магнитные пробки". Это обстоятельство можно учесть, если разделить весь интервал времени t на большое число N равных отрезков и в качестве начального условия для $/n+1/$ интервала использовать функцию вида (47) из n -ного интервала с отсеченным "конусом потерь" $w_1 < w_2 \operatorname{tg}^2 \theta_0$. Точное решение задачи получится предельным переходом $N \rightarrow \infty$

$$\Psi(w_1, w_2, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\hat{G}_N(t/N) \right]^N \Psi(w_1, w_2) \quad (51)$$

где: $\hat{G}_N(t/N) \Psi(w_1) = \int_{w_1 \operatorname{tg}^2 \theta_0}^{\infty} dw'_1 G(d_N, w_1, w'_1; t/N) \Psi(w'_1); d_N = \frac{4N}{25 D t}$

На полубесконечном интервале $0 \leq w_1, w'_1 < \infty$

функция G обладает свойством:

$$\hat{G}(t_1 + t_2) = \hat{G}(t_1) \hat{G}(t_2)$$

В силу свойства (52) выражение (51) переходит в (47), если интегрирование по W_1 , в (51) распространить на весь полубесконечный интервал $[0, \infty]$ /это соответствует тому, что частицы в длинных ловушках $L > L_*$ не успевают за время диффузии уходить из конуса потерь/.

Формулу (51), очевидно, можно записать также с помощью функции, аналогичной "функции броуновского движения" Н. Винера /17/. Однако, мы не будем останавливаться на этом.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируя результаты работы мы можем отметить следующие особенности удержания плотной плазмы с горячими ионами в пробкотроне.

1. Если плотность плазмы превышает критическую (1) или (33), то развитие неустойчивости приводит к аномально быстрому уходу ионов через "магнитные пробки" за времена соответственно (17) или (40). Тем самым плотность снижается до критического значения.

2. Поток ионов поперек магнитного поля меньше соответствующего потока через магнитные пробки.

3. Поперечная энергия ионов, остающихся в ловушке, растет со временем за счет уменьшения поперечной же энергии ионов, уходящих через "магнитные зеркала".

Чтобы яснее представить себе, насколько опасны неустойчивости данного типа в условиях, близких к оптимальным для протекания термоядерного синтеза, мы используем для оценок параметры, приведенные в работе Р.Поста /18/. Причем нам достаточно будет рассмотреть лишь один из приведенных там режимов, например, наименее выгодный для развития неустойчивости:

$$MV^2 = 67 \text{ keV}, \quad H = 60 \text{ кГС}, \quad n_e = 1,4 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}, \quad L = 10^4 \text{ см}$$

Со времени написания работы /18/, однако, в связи с успехами в подавлении желобковой неустойчивости оптимальная длина ловушки может быть выбрана меньшей. Поэтому здесь полезно привести не только оценку времени пролета $T = 3 \cdot 10^{-5}$ сек, но и оценку времени диффузии (17) при длине $L \sim L_c = 3 \cdot 10^2$ см:

$$\tau_{D+} = 10^2 R_H / \Omega_H \lambda_{D+} \approx 10^{-6} \text{ сек}$$

Если сравнить эти времена с временем хотя бы ион - ионных соударений $\tau_i = 1$ сек, то становится ясным, что даже для наиболее устойчивых распределений плазмы времена удержания слишком мальы для нормального протекания термоядерной реакции.

Многие ловушки, функционирующие в настоящее время, имеют длину меньше критической $L < L_c$. Для них предел по плотности дается выражением (33). В качестве иллюстрации мы вычислим последний для двух установок "ПР-5" /19/ и "ОГРН-П" /20/.

Для типичных условий установки ПР-5 / $H=4000$ э, $\frac{R_H n}{n_0} = 0,25$, $T = 5$ кев, $L = 120$ см/ критическая плотность $n_c = 10^{10} \text{ см}^{-3}$. Этой величиной ограничивалась плотность плазмы, длительно удерживаемой в ловушке в последних экспериментах /19/, несмотря на достаточно высокую плотность инжектируемой плазмы $n_{\text{инж}} \sim 10^{11} \text{ см}^{-3}$ ^{7/}. Время распада плазмы по порядку величины совпадает с (40).

Все это позволяет надеяться, что в экспериментах /19/ имела место дрейфово-анизотропная неустойчивость /13/. Для типичных параметров "ОГРН-П" / $MV_c^2 = 75$ кев, $L = 200$ см, $R = 28$ см, $H = 1,5 \cdot 10^4$ э/ критическая плотность $n_c = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ еще недостигнута.

Автор благодарен Б.Б.Кадомцеву и Р.З.Сагдееву за ряд ценных советов и замечаний.

7/ Критерий дрейфово-циклотронной неустойчивости Михайловского-Тимофеева /12/ дает более высокий порог по плотности; время диффузии частиц поперек магнитного поля при этом больше, чем (40).

ЛИТЕРАТУРА

- / 1 / Л.А.Арцимович, Доклад на З-ей Женевской конференции.
- / 2 / А.А.Веденов, Р.Э.Сагдеев, Сб."Физика плазмы и проблема упр.термоядерн.реакции". Изд.Академии Наук ССР, Москва, 3, (1958) 278.
- / 3 / E.Y. Harris, "Phys. Rev. Lett." 2 (1959) 34
- / 4 / Красовицкий, К.Н.Степанов, Ж.Техн.Физ. 34 /1964/, 1013, Пистунович. "Атомная энергия", 14 /1963/, 72.
- / 5 / M.N. Rosenbluth, R.F. Post, "Phys Fluids" 8 (1965) 547.
- / 6 / Б.Б.Кадомцев "Вопросы теории плазмы", Атомиздат, Москва, 4 /1964/, 188.
- / 7 / А.А.Галеев, В.И.Карпман, Р.Э.Сагдеев "Ядерный синтез", 5 (1965) 20
- / 8 / А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.Э.Сагдеев "Ядерный синтез", 1 /1962/, 82.
- / 9 / W.B. Drummond, D. Pines, "Nuclear Fusion" Suppl., part 3 (1962) 1049.
- /10/ В.Н.Фадеева, Н.М.Терентьев "Таблицы функций $W(z) = e^{-z^2} (1+2iz^{-1/2} \int_0^z dt)$ от комплексного аргумента". Техтеориадат, Москва, 7 /1954/.
- /11/ B.D. Fried, S. D. Conte, "The Plasma Dispersion Function" Acad. Press (1961).
- /12/ А.Б.Михайловский "Ядерный синтез", "Дрейфово-циклотронная неустойчивость плазмы с горячими ионами" /в печати/.
- /13/ M. N. Rosenbluth "Flute type instabilities of loss-cone velocity space" distributions" proceedings of the annual Sherwood Theoretical Meeting, Princeton, N.J., April 22-23 (1965)
- /14/ R.A. Dory, G.E Guest, E.G. Harris "Phys. Rev. Lett." 14 (1965) 131.
- /15/ L.S. Hall, W. Heckrotte "Electrostatic instabilities of plasma with magnetically supported velocity-space anisotropy at high density" Lawrence Radiation Laboratory (Livermore) Rept UCRL-12447 (1965) (Submitted to the seventh international conference on phenomena in ionized gases, Belgrade, Yugoslavia, August 22-27 (1965))

- / 16 / И.С.Градштейн, И.М.Рыжик "Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений", ФМ, Москва, 1962.
- / 17 / Н.Винер "Нелинейные задачи в теории случайных процессов", И.Л., Москва, 1961.
- / 18 / R.F.Post "Nuclear Fusion" Suppl., part 1 (1962) 99.
- / 19 / Д.В.Готт, М.С.Иоффе, Е.Е. Шманов "Эксперименты по накоплению плазмы с горячими ионами на установке ПР-5", доклад на Международной конференции по физике плазмы и управляемым термоядерным реакциям, Калам, Англия, 1965.
- / 20 / Л.И.Артеменко и др. "О получении горячей плазмы на установке ОГРА-II с инъекцией в магнитную ловушку быстрых атомов водорода", там же.

DISCUSSION

R. E. AAMODT: Why do you use the condition $L > 10^4 \lambda_D (1 + \omega_{pe}^2/\Omega_e^2)^{1/2}$ in your theory? Should you not derive the necessary condition from the non-linear theory?

A. A. GALEEV: This condition was in fact derived from the non-linear theory. In its general form it is written $2 \operatorname{Im} k_z L > \ln(|\vec{\phi}_k|^2 |\vec{\phi}_{k th}|^{-2})$. We simply made use of the fact that the right-hand side of the inequality is approximately equal to the coulombic logarithm Λ , which for typical thermonuclear reaction conditions is about 20.

EQUILIBRES TOROIDAUX DANS L'APPROXIMATION DU TUBE FIN; EFFET DE COURBURE

C. MERCIER

CENTRE D'ETUDES NUCLEAIRES DE FONTENAY-AUX-ROSES,
SEINE, FRANCE

Abstract — Résumé — Анонтия — Resumen

TOROIDAL EQUILIBRIA IN THE NARROW-TUBE APPROXIMATION. EFFECT OF CURVATURE. A toroidal plasma centred about a closed curve (Γ) defined by its characteristic coordinates $R(s)$ and $T(s)$ and whose mean radius R_p at every point of Γ is small compared to $R(s)$ can be investigated in the narrow-tube approximation. One can then, in general, neglect the specific effects of the curvature and replace the toroidal plasma of length L by a cylindrical plasma by imposing periodicity conditions at the two ends of a cylinder of length L .

However, in certain conditions, especially when the rotational transform $\iota/2\pi$ is nearly constant throughout the plasma and approximates a whole number k_0 , and if the Fourier expansion of $1/R(s) = a_0 + \sum_k a_k \cos(2k\pi s/L)$

is such that $a_k \neq 0$, the effects of the curvature may become very important. One may thus arrive at configurations whose principal properties are related to the curvature. To represent these configurations we use the system (ρ, θ, s) related to (Γ) for which dS^2 is written

$$dS^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta_0^2 + [1 - \rho \cos \theta R^{-1}(s)]^2 ds^2$$

with

$$\theta = \theta_0 + \int_0^s ds/T(s)$$

If one wishes to disregard the effects of the curvature and twist, it is sufficient to take $1/R = 0$ and $1/T = 0$. If one wishes to investigate specifically the effect of the harmonic k_0 in $1/R(s)$, which is important if $\iota/2\pi$ is close to $\pm k_0$, it is possible to disregard all members of the series a_k except a_{k_0} and to retain only the dependence in $t = (2k\pi s/L) + \theta$.

The ds^2 may then be considered as the ds^2 in a triorthogonal system related to an axis $\bar{\Gamma}$ whose characteristic equations would be $1/R = a_k$ and $1/T = 1/T(s) - 2k\pi/L$. For example, in the case of a plane curve Γ ($1/T = 0$) the representation of the plasma in this approximation is not a cylindrical plasma but a plasma centred about a helix defined by $1/R = a_k$ and $1/T = -2k\pi/L = \text{constant}$.

In the case generalizing the cylindrical symmetry (physical functions independent of s) one can put

$$\begin{aligned} \vec{B} &= f \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} F \\ \vec{j} &= \vec{\nabla} \times \vec{B} = [(-2Kf/g) + \mathcal{L} \cdot (F)] \vec{u} + \vec{u} \times \vec{\nabla} (-f) \end{aligned}$$

where F and f are functions of one another, and F is a solution of

$$\mathcal{L} \cdot F = \frac{2Kf}{g} - \frac{df^2}{2dF} - \frac{gd\mu}{dF}$$

\mathcal{L} is a second-order differential operator, and $K = 2krL$.

These properties generalize the cases of rotational symmetry ($k = 0$, $a_k = 1/R$) and of helicoidal symmetry ($a_k = 0$, $k \neq 0$). One can now investigate the configurations represented by these equations in the conditions specified above, and also their stabilities. In rotational symmetry these conditions apply in the neighbourhood of a zero longitudinal current. These configurations are distinguished particularly by the sign in front of $d^2(f^2)/dF^2$, at least in the simple case when this sign is constant. One can obtain either configurations having a kind of boundary layer, or configurations with several magnetic axes.

EQUILIBRES TOROIDAUX DANS L'APPROXIMATION DU TUBE FIN. EFFET DE COURBURE. Un plasma toroidal centré autour d'une courbe fermée (Γ) qui est déterminée par ses coordonnées intrinsèques $R(s)$ et $T(s)$ et dont le rayon moyen R_p en chaque point de Γ est petit devant $R(s)$, pourra être étudié avec l'approximation du tube fin. On peut alors en général négliger les effets spécifiques de courbure et remplacer le plasma toroidal de longueur L par un plasma cylindrique en imposant des conditions de périodicité aux deux extrémités d'un cylindre de longueur L .

Cependant, dans certaines conditions, en particulier lorsque la transformée rotationnelle $\iota/2\pi$ est presque constante dans l'ensemble du plasma et voisine d'un nombre entier k , et si le développement en série de Fourier de $1/R(s) = a_0 + \sum_k 2a_k \cos(2k\pi s/L)$ est tel que $a_k \neq 0$, les effets de courbure peuvent devenir très importants. On peut ainsi avoir des configurations dont les principales propriétés sont liées à la courbure. Les auteurs utilisent pour représenter ces configurations le système (ρ, θ, s) lié à (Γ) dont le ds^2 s'écrit:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta_0^2 + [1 - \rho \cos \theta R^{-1}(s)]^2 ds^2$$

avec

$$\theta_0 = \theta + \int_0^s ds/T(s)$$

Si l'on veut négliger les effets de courbures et de torsion, il suffit de prendre $1/R = 0$ et $1/T = 0$. Si l'on veut étudier spécifiquement l'effet de l'harmonique k_0 dans $1/R(s)$, important si $\iota/2\pi$ est voisin de $\pm k_0$, on peut négliger tous les a_k sauf a_{k_0} et ne garder que la dépendance en $t = 2k\pi s/L + \theta$.

Le ds^2 peut alors être considéré comme le ds^2 d'un système triorthogonal lié à un axe \vec{F} dont les équations intrinsèques seraient $1/R = a_k$ et $1/T = 1/T(s) - 2k\pi/L$. Par exemple, dans le cas d'une courbe Γ plane ($1/T = 0$) la représentation du plasma dans cette approximation est, non pas un plasma cylindrique, mais un plasma centré autour de l'hélice définie par $1/R = a_k$ et $1/T = -2k\pi/L = \text{constant}$.

Dans le cas généralisant la symétrie cylindrique (fonctions physiques indépendantes de s), on peut écrire

$$\begin{aligned} \vec{B} &= f \vec{u} + \vec{u} \times \vec{\Delta} F \\ \vec{j} &= \vec{\Delta} \times \vec{B} = [-(2Kf/g) + \mathcal{L} \cdot F] \vec{u} + \vec{u} \times \vec{\nabla} (-f) \end{aligned}$$

où F et f sont fonctions l'une de l'autre et F est solution de

$$\mathcal{L} \cdot F = (2Kf/g) - (0,5 df^2 - gdp)/dF,$$

\mathcal{L} étant un opérateur différentiel du deuxième ordre, et $K = 2k\pi/L$.

Ces propriétés généralisent les cas de la symétrie de révolution ($k = 0$, $a_k = 1/R$) et de la symétrie hélicoïdale ($a_k = 0$, $k \neq 0$). On peut alors étudier les configurations représentées par ces équations dans les conditions précisées ci-dessus, ainsi que leurs stabilités. En symétrie de révolution, ces conditions s'appliquent au voisinage du courant longitudinal nul. Ces configurations se distinguent particulièrement par le signe de $d^2(f^2)/dF^2$ (au moins dans le cas simple où ce signe est constant). On peut obtenir, soit des configurations présentant une sorte de couche limite, soit des configurations avec plusieurs axes magnétiques..

ТОРОИДАЛЬНЫЕ РАВНОВЕСИЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ ТОНКОЙ ТРУБКИ. ЭФФЕКТ КРИВИНЫ. Представляется возможным, используя приближение тонкой трубки, исследовать тороидальную плазму, центрованную вокруг замкнутой кривой (Γ), которая задана ее собственными координатами $R(s)$ и $T(s)$ и средний радиус a которой в каждой точке Γ меньше чем $R(s)$. В этом случае можно, вообще говоря, не учитывать специфическое воздействие кривизны и заменить тороидальную плазму линией L цилиндрической плазмой, наложив при этом условие периодичности на концах цилиндра длиной L .

Но при определенных условиях, в частности, когда преобразование вращения $\iota/2\pi$ является почти постоянным по всей плазме и близким к целому числу k и если разложение в ряд Фурье $1/R(s) = a_0 + 2\sum_k a_k \cos(2\pi ks/L)$ таково, что $a_k \neq 0$, то воздействие кривизны может стать очень существенным. Таким образом, можно получить конфигурации, основные свойства

которых связаны с кривизной. Для представления этих конфигураций используется система $(\rho \theta_0 s)$, связанная с (Γ) , для которой dS^2 имеет вид:

$$dS^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta_0^2 + [1 - \rho \cos \theta R^{-1}(s)]^2 ds^2,$$

где

$$\theta_0 = \theta + \int_0^s ds/T(s).$$

Если не нужно учитывать воздействие кривизны и кручения, то достаточно взять $1/R = 0$ и $1/T = 0$. Если требуется специально изучить воздействие гармоники k_0 в разложении $1/R(s)$, существенное при $\nu/2\pi$ близком к $\pm k_0$, то можно пренебречь всеми a_k , кроме a_{k0} , и сохранить лишь зависимость от $t = (2k\pi s/L) + \theta$.

Тогда dS^2 может рассматриваться как dS^2 вполне ортогональной системы, связанной с осью Γ , натуральные уравнения которой: $1/R = a_k$ и $1/T = 1/T(s) - (2k\pi/L)$. Например, в случае плоской кривой $\Gamma(1/T = 0)$ плазма в этом приближении была бы не цилиндрической, а центрированной вокруг винтовой линии, задаваемой параметрами $1/R = a_k$ и $1/T = -2k\pi/L = \text{constant}$.

В случае, обобщающем цилиндрическую симметрию (независимые физические функции не зависят от s), можно записать

$$\vec{B} = f \vec{u} + \vec{\mu}_x \vec{\nabla} F$$

$$\vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = [-(2Kf/g) + \mathcal{L} \cdot F] \vec{\mu} + \vec{\mu} \times \vec{\nabla} (-f)$$

F и f являются функциями друг друга, а F – решение уравнения

$$\mathcal{L} \cdot F = (2Kf/g) - (0, 5df^2 - gdp)/dF,$$

где \mathcal{L} – дифференциальный оператор второго порядка и $K = 2k\pi/L$.

Эти данные обобщают случаи симметрии вращения ($k = 0$, $a_k = 1/R$) и винтовой симметрии ($a_k = 0$, $k \neq 0$). Теперь можно изучать конфигурации, описываемые этими уравнениями, при поставленных выше условиях, а также и их устойчивость. При симметрии вращения эти условия применяются одновременно в окрестности нулевого продольного тока. Эти конфигурации различаются, в частности, знаком перед $d^2(f^2)/dF^2$ по крайней мере в простом случае, когда этот знак постоянный. Можно получить либо конфигурации, представляющие нечто вроде пограничного слоя, либо конфигурации с несколькими магнитными осями.

EQUILIBRIOS TOROIDALES EN LA APROXIMACION DEL TUBO DELGADO, EFECTO DE LA CURVATURA. Un plasma toroidal centrado alrededor de una curva cerrada (Γ) determinada por sus coordenadas intrínsecas $R(s)$ y $T(s)$, y cuyo radio medio R_p en cada punto de Γ es pequeño comparado con $R(s)$, puede estudiarse mediante la aproximación del tubo delgado. En general, pueden despreciarse los efectos específicos de curvatura y reemplazar el plasma toroidal de longitud L por un plasma cilíndrico, imponiendo condiciones de periodicidad a los dos extremos de un cilindro de longitud L .

Sin embargo, en ciertas condiciones, sobre todo cuando la transformada rotacional $\nu/2\pi$ es casi constante en el seno del plasma y próximo a un número entero k , y si el desarrollo en serie de Fourier de $1/R(s) = a_0 + \sum_k 2a_k \cos(2k\pi s/L)$ es tal que $a_k \neq 0$, los efectos de curvatura pueden adquirir gran importancia.

Es posible entonces tener configuraciones cuyas propiedades principales se vinculan a la curvatura. El autor utiliza para representar estas configuraciones el sistema $(\rho \theta_0 s)$ vinculado a (Γ) , cuyo dS^2 se describe:

$$dS^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta_0^2 + [1 - \rho \cos \theta R^{-1}(s)]^2 ds^2$$

con

$$\theta_0 = \theta + \int_0^s ds/T(s)$$

Si se quieren despreciar los efectos de la curvatura y de la torsión, basta hacer $1/R = 0$ y $1/T = 0$. Cuando se trata de estudiar específicamente el efecto del armónico k_0 sobre $1/R(s)$, importante si $\nu/2\pi$ es próximo a $\pm k_0$, se pueden despreciar las a_k con excepción de a_{k0} y conservar sólo la relación de dependencia en t : $t = 2k\pi s/L + \theta$.

El dS^2 puede considerarse entonces como correspondiente a un sistema triortogonal vinculado a un eje Γ cuyas ecuaciones intrínsecas serían $1/R = a_k$ y $1/T = 1/T(s) - 2k\pi/L$. Así, por ejemplo, en el caso de una curva Γ plana ($1/T = 0$), la representación del plasma en esta aproximación no corresponde a un plasma cilíndrico, sino a un plasma centrado alrededor de la hélice definida por $1/R = a_k$ y $1/T = -2k\pi/L = \text{constante}$.

En el caso de generalización de la simetría cilíndrica (funciones físicas independientes de s), puede escribirse

$$\vec{B} = f \vec{u} + \vec{u} \times \vec{\nabla} F$$

$$\vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = [-(2Kf/g) + J \cdot F] \vec{u} + \vec{u} \times \vec{\nabla}(-f)$$

F y f son funciones una de la otra y F , solución de

$$J \cdot F = (2Kf/g) - (0,5 dF^2 - gdp)/dF.$$

J es un operador diferencial de segundo orden, y $K = 2\pi k/L$.

Estas propiedades constituyen una generalización de los casos de simetría de revolución ($k = 0$, $a_k = 1/R$) y de simetría helicoidal ($a_k = 0$, $k \neq 0$). Resulta entonces posible estudiar las configuraciones representadas por dichas ecuaciones en las condiciones antes definidas, así como sus estabilidades. Para una simetría de revolución, estas condiciones son válidas en las proximidades de una corriente longitudinal nula. Estas configuraciones se distinguen en particular por el signo de $d^2(r^2)/dr^2$, por lo menos en el caso sencillo en que este signo es constante. Pueden obtenerse configuraciones que presentan cierta capa límite, o configuraciones con varios ejes magnéticos.

INTRODUCTION

L'étude des configurations toroïdales présente un grand intérêt car le comportement des plasmas tant au point de vue équilibre que stabilité dépend non seulement de ce que ces configurations sont fermées mais dépend aussi de la forme précise du plasma.

Les effets simples de fermeture peuvent être étudiés en symétrie cylindrique en imposant une périodicité (période L) le long de l'axe du cylindre. Des effets plus complexes ont été étudiés dans les articles [1] / [2] par l'étude des plasmas au voisinage des axes magnétiques : ces articles mettent en évidence qu'en général, lorsque la transformation rotationnelle sur l'axe magnétique $\psi_{co}/2\pi$ approche une valeur entière k , une déformation profonde de la structure de l'équilibre et même de sa topologie peut en résulter : on peut dire qu'il y a une limite d'équilibre au voisinage de $\psi_{co}/2\pi = k$.

De plus des zones de stabilité, au moins vis-à-vis des déplacements localisés peuvent apparaître liées à ces déformations de l'équilibre, déformations qui ne sont pas seulement imposées de l'extérieur par des sources de champ magnétique comme dans les configurations stellarator(shear) ou du type loffé mais obtenues par exemple par un couplage résonant entre le courant dans le plasma et les autres caractères de l'équilibre (forme géométrique, champ magnétique). Une telle déformation, obtenue en symétrie de révolution avec courant tendant vers zéro, est bien connue et une plage de stabilité utilisée par des appareils tels que Tokomac, lui est associée.

Cependant, l'étude au voisinage d'un axe magnétique ne peut que difficilement et d'une manière très incomplète permettre l'étude du plasma, limites comprises /2/. C'est l'objet de ce travail de fournir une méthode et quelques applications pour aborder d'une façon globale l'étude du plasma près de ces singularités, caractérisées au voisinage de l'axe par $\psi_{co} = 2k\pi$. On montrera ainsi que l'on peut obtenir des plasmas à transformée rotationnelle pratiquement con-

stantes $\epsilon_m \neq k$ qui peuvent être complètement stables en M.H.D. idéale et peut-être en M.H.D. avec résistivité.

Ce travail confirme et complète les résultats des réf. [1]/[2], en précisant la nature des déformations de l'équilibre quand ϵ_m s'approche de k et en donnant pour une clause assez générale d'équilibre les zones de stabilités.

REPRESENTATION HELICOIDALE D'UN PLASMA TOROIDAL A L'ORDRE ZERO.

On a introduit dans les articles [1]/[2] un système de coordonnées adapté à l'étude d'un milieu toroïdal.

Soit Γ une courbe fermée, passant au coeur du plasma que l'on appellera "axe central", caractérisée par $R(s)$ et $T(s)$ rayons de courbure et de torsion en fonction de l'abscisse curviligne. Si le plasma est mince, cette courbe précise bien la forme toroïdale d'un tel plasma.

Γ est la base du système triorthogonal adapté. Un point P est défini par $(\rho \theta, s)$, ρ, θ étant les coordonnées dans le plan normal en M à Γ passant par P , et s l'abscisse curviligne de M . ρ est la distance MP et si θ est l'angle de MP avec la normale principale,

$$\theta_o = \theta + \int_0^s \frac{ds}{T(s)}$$

Le dS^2 du système s'écrit :

$$dS^2 = d\rho^2 + \rho_o^2 d\theta_o^2 + \left(1 - \rho \frac{\cos \theta}{R(s)}\right)^2 ds^2$$

$R(s)$ étant périodique, nous le définissons par

$$1/R(s) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k \exp(2k\pi s/L) \text{ ou } a_k = a_{-k}$$

En fait, un plasma toroidal est toujours mince, c'est-à-dire que $\rho/R \ll 1$.

On est ainsi conduit à développer les calculs selon les puissances de ρ/R et en particulier à négliger ρ/R à l'ordre zéro, c'est-à-dire à se placer à l'approximation cylindrique. C'est cette approximation cylindrique, avec périodicité qui est en général choisie comme ordre zéro [3]. Si on poursuit alors les approximations à des ordres plus élevés, on constate en général que la stabilité est déjà déterminée à un ordre inférieur à celui où les effets intrinsèques de courbure peuvent donner des termes très grands et même infinis pour certaines valeurs des paramètres. On doit en conclure que pour ces valeurs le développement est mal adapté : il faut choisir un autre ordre zéro. L'étude des singularités qui s'introduisent montre qu'elles sont chacunes liées à un des coefficients de Fourier de $1/R(s)$, par exemple la singularité à courant nul en symétrie de révolution est liée à a_0 .

Nous devons alors garder à l'ordre zéro pour l'étude de la région "k" une partie du terme en $\rho \cos \theta / R(s)$ du dS^2

$$dS_o^2 = d\rho^2 + \rho_o^2 d\theta_o^2 + \left[1 - \rho a_k \cos(\theta + 2k\pi s/L)\right]^2 ds^2$$

C'est ce dS_o^2 que nous utiliserons pour exprimer les équations du plasma à l'ordre zéro. La suite confirmera que, pour certaines valeurs des paramètres, le terme supplémentaire, négligé en général peut dominer complètement à la fois l'équilibre et la stabilité.

Il est instructif d'interpréter ce dS_o^2 approché

$$\text{Posons } t = \theta + 2k\pi s/L$$

On peut identifier dS_o^2 avec le dS^2 d'un système lié à un axe $\bar{\Gamma}$, t jouant le rôle de θ , angle avec la normale principale à $\bar{\Gamma}$; ce $\bar{\Gamma}$, image de Γ étant

alors défini par

$$\left(\bar{\Gamma} \right) \quad \left| \begin{array}{l} 1/\bar{T}(A) = 1/T(A) - 2k\pi/L \\ 1/\bar{R} = a_k \end{array} \right.$$

$\bar{\Gamma}$ est une courbe gauche, de courbure constante (on peut toujours supposer $a_k > 0$). Si on avait négligé a_k , l'image de l'axe central Γ aurait été une droite : approximation cylindrique.

Cas particulier - courbe plane

Soit $1/T(A) = 0$. Alors $\bar{\Gamma}$ est une hélice : le plasma équivalent sera centré autour de l'hélice $1/\bar{R} = a_k$, $1/\bar{T} = -2k\pi/L$.

Si $1/R = a_0$, Γ et $\bar{\Gamma}$ sont les mêmes. Les plasmas les plus étudiés dans ces cas sont les plasmas à symétrie de révolution ; ce sont des configurations indépendantes de s . Pour obtenir dans le cas général, l'analogie de la symétrie cylindrique ou de la symétrie de révolution nous chercherons les configurations indépendantes de s à l'ordre zéro. Les solutions toroïdales que nous voulons étudier sont donc à cet ordre des solutions à symétrie hélicoïdale centrées autour de l'axe $\bar{\Gamma}$ image de Γ .

Le problème à l'ordre zéro est donc ramené à l'étude des plasmas hélicoïdaux.

CONFIGURATIONS HELICOÏDALES

Soit r, φ, z les coordonnées cylindriques et définissons la variable $u = \ell\varphi - hz$ ainsi que le champ de vecteurs

$$\vec{u} = \frac{\ell \vec{e}_z + h r \vec{e}_\varphi}{\ell^2 + h^2 r^2}$$

ℓ et h étant 2 constantes, u est constant sur chaque hélice de pas $2\pi\ell/h$ ligne de force du champ \vec{u} . En symétrie hélicoïdale, toute fonction est constante sur chacune de ces hélices donc ne dépend que de r, u [3]/[4]. La solution générale de $\text{div } \vec{B} = 0$ s'écrit alors [4]

$$\vec{B} = f \vec{u} + \vec{u} \wedge \text{grad } F$$

f et F étant des fonctions quelconques de r et u .

L'équation d'équilibre M.H.D. $\vec{J} \wedge \vec{B} = \text{grad } p$ impose que les fonctions p, f, F sont fonctions l'une de l'autre (ou constantes) et qu'elles vérifient

$$L.F + \frac{2h\ell}{(\ell^2 + h^2 r^2)^2} f + \frac{1}{2(\ell^2 + h^2 r^2)} \frac{df^2}{dF} + \frac{dp}{dF} = 0$$

$$L = \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} \frac{\ell}{\ell^2 + h^2 r^2} \frac{\delta}{\delta r} + \frac{1}{r^2} \frac{\delta^2}{\delta u^2}.$$

Configurations hélicoïdales en coordonnées intrinsèques liées à $\bar{\Gamma}$

Choisissons ℓ, h et $r = r_0$ pour que l'une des lignes magnétiques du champ \vec{u} soit précisément $\bar{\Gamma}$.

Il suffit de choisir

$$\ell = \cos V$$

$$h r_0 = \sin V$$

$$r_0 = \bar{R} \sin^2 V = \frac{1}{a_k} \sin^2 V$$

$$\text{tg } V = \frac{\bar{T}}{\bar{R}} = \frac{-a_k}{K}$$

$$K = \frac{2k\pi}{L}$$

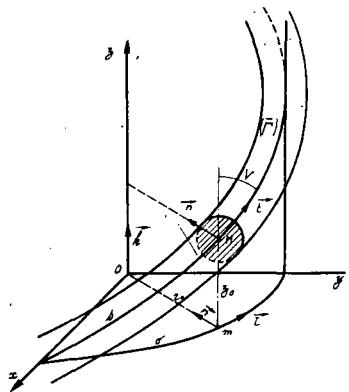


FIG. 1. Représentation hélicoïdale du plasma torique

les notations étant indiquées sur la fig. 1. Passons alors au système de coordonnées lié à \vec{F} . On obtient

$$\vec{B} = f \vec{u} + \vec{u} \wedge \text{grad } F \quad (1)$$

f et F fonctions de ρ et t seulement, périodiques en t (période 2π)

$$\mathcal{L} = \text{rot } \vec{B} = \left(\mathcal{L} \cdot F - \frac{2Kf}{g} \right) \vec{u} + \vec{u} \wedge \text{grad } (-F) \quad (2)$$

$$\mathcal{L} \cdot F - \frac{2Kf}{g} + \frac{1}{2} \frac{df^2}{dF} + g \frac{dp}{dF} = 0 \quad (3)$$

avec

$$\vec{u} = \frac{(1-a_k \rho \cos t) \vec{e}_z - \rho k \vec{e}_{\theta_0}}{g} \quad (4)$$

$$g = (1-a_k \rho \cos t)^2 + K^2 \rho^2 \quad (5)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g} L = \frac{g}{\rho(1-\rho a_k \cos t)} \left\{ \frac{\delta}{\delta \rho} \frac{\rho(1-\rho a_k \cos t)\delta}{g} + \frac{\delta}{\delta t} \frac{1}{\rho(1-\rho a_k \cos t)} \frac{\delta}{\delta t} \right\} \quad (6)$$

Remarque

Sauf dans le cas de symétrie de révolution ($k=0$, $a_0=2\pi/L$, $a_k=0$) ces équations ne représentent qu'une approximation d'ordre zéro, adaptée seulement pour certaines valeurs des paramètres de la configuration : s'il existe plusieurs $a_k \neq 0$ cet ordre zéro est relatif à l'un d'entre eux seulement. Il serait possible de poursuivre les approximations; cependant nous nous limiterons dans cet article à l'ordre zéro car les caractères principaux des configurations et leur stabilité sont déjà obtenus à cet ordre. De plus la comparaison avec les résultats des articles [1] et [2] suggère que les effets des autres a_k sont peu importants précisément quand les configurations envisagées sont les plus intéressantes au point de vue stabilité.

Fonctions de flux et transformation rotationnelle

Avec les mêmes notations que dans [1] nous définissons les flux Ψ et $\bar{\Psi}$ du champ magnétique \vec{B}

$$\Psi = \int_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{e}_\theta \left(1 - \frac{p \cos \theta}{R} \right) dp d\theta \quad (7)$$

$$\bar{\Psi} = \int_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{e}_\theta p d\theta \quad (8)$$

S_1 étant un ruban limité par Γ et par une surface magnétique S dans la surface $\theta = \text{constante}$;

S_2 étant la surface $s = \text{constante}$ limitée par la surface magnétique S . Ces deux fonctions sont donc des fonctions de la surface S ainsi que l'angle de transformation rotationnelle défini par

$$\iota_c/2\pi = d\Psi/d\bar{\Psi}$$

A l'ordre zéro, en utilisant les équations (1) et (4), on trouve, L étant la longueur du plasma :

$$\Psi = LF - k\bar{\Psi} \quad (9)$$

$$\frac{\iota_c}{2\pi} = -k + L \frac{dF}{d\bar{\Psi}} \quad (10)$$

$L.dF/d\bar{\Psi}$ étant la transformation rotationnelle définie directement pour le plasma hélicoïdal, (10) montre qu'entre le plasma toroidal (P) étudié, centré autour de Γ , et sa représentation hélicoïdale (R) l'angle de transformation rotationnelle diffère de k . Ainsi il y a analogie entre ce qui se passe pour $\iota_c/2\pi \sim k$ dans (P) et pour $\iota_c/2\pi \sim 0$ dans (R).

Etude de la stabilité

Dans un article précédent [5] un critère nécessaire et suffisant pour les déplacements localisés a été donné ; dans [1] ce même critère a été écrit sous une forme plus intéressante que nous rappelons ici.

$$\left[\frac{1}{2} \frac{d}{d\Psi} \left(\frac{\iota_c}{2\pi} \right) + \int_S \vec{B} \cdot \vec{Q} \frac{ds}{|\text{grad } \Psi|^3} \right]^2 + \int_S \frac{B^2 ds}{|\text{grad } \Psi|^3} \left[\left(\frac{\iota_c}{2\pi} \right)^2 \frac{dp}{d\Psi} \frac{d^2 V}{d\bar{\Psi}^2} - \int_S |\vec{Q}|^2 \frac{ds}{|\text{grad } \Psi|^3} \right] \geq 0 \quad (11)$$

$$\text{où } \vec{Q} = \vec{J} - \vec{B} \frac{d\bar{\Psi}}{d\Psi}$$

les intégrales étant prises sur chaque surface magnétique.

Le terme carré est négligeable au voisinage des axes magnétiques. Ailleurs il est stabilisant principalement grâce au terme de "shear" $d/d\Psi (\iota_c/2\pi)$. La stabilisation par shear étant très affaiblie si l'on tient compte de la résistivité, il est préférable de ne pas compter sur cet effet stabilisateur. Nous utiliserons donc dans la suite le critère suivant :

$$\left(\frac{\iota_c}{2\pi} \right)^2 \frac{dp}{d\Psi} \frac{d^2 V}{d\bar{\Psi}^2} - \int_S |\vec{Q}|^2 \frac{ds}{|\text{grad } \Psi|^3} \geq 0 \quad (12)$$

Comme $\vec{Q}=0$ si $\text{grad } p = \text{const.}$, on pourrait en conclure que le 2^{ème} terme pour un faible $\beta = 2p/B^2$ est petit devant le 1^{er}, la condition étant alors $V'' < 0$ (si la pression présente un maximum). Cependant, ce résultat n'est pas exact si, comme c'est le cas dans ce papier, l'origine du $V'' < 0$ se trouve pour une bonne part dans le plasma lui-même.

L'intérêt du critère (12) est d'autant plus important que l'on peut montrer que c'est un critère nécessaire de stabilité vis-à-vis de la M.H.D. idéale au moins dans l'approximation d'ordre zéro et pour la classe importante de configurations que nous étudions dans la suite de ce travail.

Notons que ce critère (12) en symétrie cylindrique donne le critère suffisant bien connu :

$$(r \cdot B_\theta)' < 0 \quad (12')$$

Dans notre approximation d'ordre zéro, on trouve

$$\vec{Q} = L \left(\frac{dp}{dF} \right) \left\{ \left(f \frac{dV}{d\psi} - gL \right) \vec{U} + \frac{dV}{d\psi} \cdot \vec{U} \wedge \text{grad } F \right\}$$

ce qui permet d'écrire le critère (12).

$$\frac{dp}{d\psi} \left\{ \left(\frac{d\psi}{d\psi} \right)^2 \frac{d^2 V}{d\psi^2} - \left(\frac{dp}{dF} \right) \left(\frac{d\psi}{dF} \right)^2 \frac{1}{L^2} \int \frac{ds}{g |\text{grad } \psi|} \left(f \frac{dV}{d\psi} - gL \right) + \left(\frac{dV}{d\psi} \right)^2 |\text{grad } F|^2 \right\} > 0$$

ETUDE DES EQUILIBRES A L'ORDRE ZERO

Pour justifier la prise en considération à l'ordre zéro du terme $\mu_k \cos t$, nous devons montrer que cet ordre zéro peut différer beaucoup de l'ordre zéro cylindrique, c'est-à-dire du cas où les effets de courbure sont complètement supprimés.

Une première condition à imposer pour cela s'écrit :

$$R_p < r_0 \quad (13)$$

R_p étant le rayon moyen du plasma. Si cette condition n'était pas remplie, seule une petite partie du plasma serait affectée par les effets de courbure.

Si $\mu_k = a_k/a_0$ et $\gamma = 2\pi/L a_0$, cette condition s'écrit :

$$\frac{2\pi R_p}{L} < \gamma \frac{\mu_k}{\mu_k^2 + \gamma^2 k^2} \quad (13')$$

En symétrie de révolution (13) est évidemment satisfaite. Dans le cas $1/R = a_0 + a_k \cos 2k\pi A/L$ et k pair, [2] γ est égale à 1.

Dans Harmonica [6] $k = 2$; $\mu_2 = 1$

$$2\pi R_p/L \sim 0,06 < \mu_2/\mu_2^2 + k^2 = \frac{1}{5} \quad , (13) \text{ est bien satisfaite.}$$

Pour préciser les configurations où les effets toroïdaux sont très importants, nous imposeron, en nous laissant guider par les résultats des articles [1], [2], que la transformation rotationnelle soit presque constante sur les différentes surfaces magnétiques. Comme nous ne voulons pas considérer la stabilisation par "shear" cette limitation est assez normale. De plus de nombreux résultats expérimentaux montrent que le "shear" est très faible quand on ne cherche pas spécialement à le créer, en particulier les mesures sur T.A.2000 ont montré une constance remarquable de la transformation rotationnelle.

Pour réaliser cette constance, nous poserons en vue de (10)

$$f = f_0 + \epsilon f_1 \quad (14)$$

$$F = \epsilon^2 F_2 \quad (15)$$

f_0 étant une constante et ϵ un petit paramètre.

L'équation d'équilibre (3) devient

$$\epsilon^2 \mathcal{F}_2 = \frac{2Kf_0}{g} - \frac{f_0}{\epsilon} \frac{df_1}{dF_2} + g \frac{dp}{\epsilon^2 dF_2} \quad (16)$$

cette équation impose si ϵ doit tendre vers 0

$$p = \epsilon p' \text{ et } g = -\frac{1}{2} \frac{df^2}{dp} \quad (17)$$

Ainsi $g = (1 - \rho a_k \cos t)^2 + K^2 p^2 r$ est constant sur les surfaces magnétiques ce qui impose que celles-ci doivent être des cylindres, centrées sur l'axe de symétrie hélicoïdale.

Comme cette solution n'est pas compatible (13) avec la limite du plasma qui est une surface canal centrée autour de Γ (ou $\tilde{\Gamma}$ dans la représentation hélicoïdale), deux cas peuvent se produire quand $\epsilon \rightarrow 0$

a) Cette solution est valable pour l'ensemble du plasma sauf près de la limite où les dérivées deviennent très importantes de sorte que $\mathcal{F} \cdot F$ ne peut plus être négligé : l'équilibre tend pour $\epsilon \rightarrow 0$ vers une configuration avec couche limite (fig. 2) : l'axe magnétique est alors rejeté vers le bord du plasma en accord avec les résultats [1]/[2].

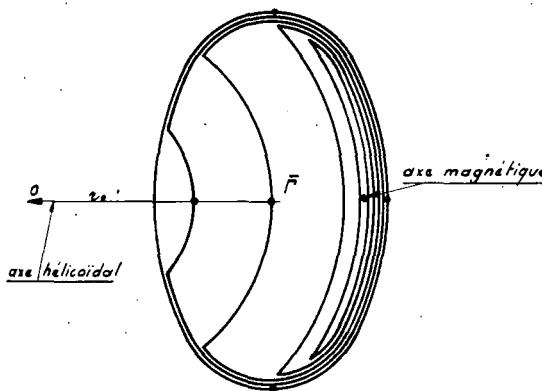


FIG. 2. Cas a - configuration avec couche limite (coup x0y)

b) La solution pour $\epsilon \rightarrow 0$ n'existe pas sans changement de topologie de la configuration : il existe un ϵ_0 critique, au-delà duquel la topologie du système change : d'autres axes magnétiques apparaissent.

Les deux cas peuvent se produire. On peut d'une façon assez qualitative trouver une condition caractérisant ces deux cas.

Soit $\varphi_s(t)$ la valeur de φ à la surface du plasma, η un petit paramètre et $\varphi = \varphi_s(t) - \eta \varphi_s$.

L'équation (16) déterminant le comportement de la solution au voisinage du bord du plasma s'écrit alors

$$\frac{\epsilon^2}{\eta^2} \frac{\delta^2}{\delta z^2} \mathcal{F}_2(z, t) + 2Kf_0 + \left(\frac{dH}{dF} \right)_s + \epsilon^2 \left(\frac{d^2 H}{dF^2} \right)_s \mathcal{F}_2 = 0$$

où $H = g_s p + f^2/2 \# p + \frac{B^2}{2}, \mathcal{F}_2(\varphi_s - \eta \varphi_s) = \mathcal{F}_2(z, t)$

On a supposé dans cette équation que seule la variation des dérivées en p sont importantes ; t joue alors le rôle d'un paramètre. Ainsi selon le signe de $d^2 H / dF^2$ sur la surface du plasma, la solution sera soit exponentielle soit

périodique. Au moins si le signe de cette quantité ne varie pas dans le plasma, on a :

$$1^{\text{er}} \text{ cas} \quad \frac{d^2 H}{d F^2} < 0$$

$$2^{\text{eme}} \text{ cas} \quad \frac{d^2 H}{d F^2} > 0 \quad (18)$$

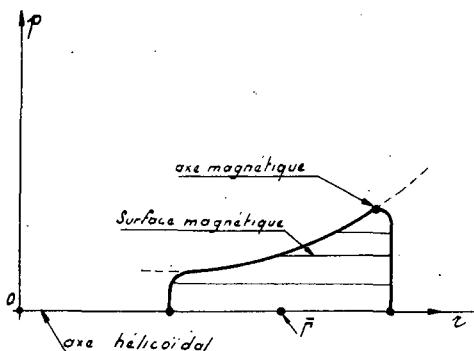


FIG. 3. Cas a - Schéma de configuration

Dans le 1^{er} cas, on peut écrire la condition autrement si l'on remarque que

$$2 \frac{dp}{dF} \frac{d[-1/2 \cdot df^2/dp]}{dF} = -\frac{d^2f^2}{d^2F^2} + \frac{df^2}{dp} \cdot \frac{d^2p}{dF^2} = -2 \frac{d^2H}{dF^2} + 2 \frac{d^2p}{dF^2} (g_3 + df^2/2 dp)$$

Sur la surface du plasma, on a alors

$$\frac{dp}{dF} \frac{d[-1/2 \cdot df^2/dp]}{dF} = -\frac{d^2H}{dF^2} = \frac{dp}{dF} \cdot \frac{dg}{dF} > 0.$$

soit

$$(19) \quad \parallel \quad dp/dg > 0 \quad \text{sur la surface.}$$

Il faut bien noter le sens de cette expression : elle lie les valeurs de g sur la surface à la valeur de la pression extrapolée le long des surfaces $g=\text{const.}$, surfaces magnétiques sauf dans la couche limite. Comme g croît quand on s'éloigne de l'axe hélicoïdal, dans le 1^{er} cas la pression croît aussi dans le plasma quand on s'éloigne de cet axe dans la représentation R (ou encore quand on va en sens inverse de la normale principale dans le plasma lui-même).

Les représentations schématiques (fig. 3, 4, 5) de la pression en fonction de r dans un plan passant par l'axe hélicoïdal et le maximum de pression montrent les différents genres de configurations possibles avec couche limite. On remarque (fig. 3) que dans ce cas plusieurs axes magnétiques peuvent aussi apparaître, mais de caractères fort différents du cas 2 ; ici les axes magnétiques peuvent être tous très près du bord du plasma. Cependant si nous exigeons de conserver une même topologie, nous aurons encore une condition à remplir.

Ces différents résultats précisent ce qui est désigné comme régions de non équilibre dans /1/ et /2/.

Les figures 3, 4, 5 montrent aussi que les axes magnétiques s'éloignent ou s'approchent de l'axe hélicoïdal dans les représentations R des équilibres suivant que la pression est maximum ou minimum sur l'axe magnétique.

Remarque

Le rapport entre le plasma étudié et sa représentation hélicoïdale R est bien illustré dans le cas où l'axe magnétique \tilde{r} reste par exemple sur la normale principale dans R : $t = 0$ ou π . Comme $t = \theta + 2k\pi a/L$, dans le plasma lui-

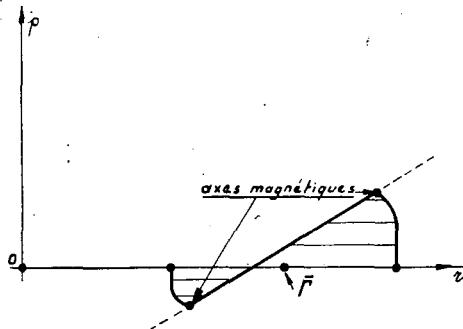


FIG. 4. Cas a - Schéma de configuration

même l'axe magnétique tournera k -fois autour de l'axe central \bar{r} à distance constante de cet axe. Dans le cas de révolution $k = 0$, il y a équivalence avec R et pas de rotation de l'axe magnétique.

ETUDE D'UNE CLASSE PARTICULIÈRE DE CONFIGURATION

Dans la partie précédente, nous avons donné quelques résultats qualitatifs assez généraux. Nous allons maintenant étudier une classe de configurations, relativement simple mais cependant assez générale pour inclure les deux types de configurations définis précédemment et pour représenter au moins approximativement un grand nombre de plasmas expérimentaux.

On doit en particulier préciser les dépendances fonctionnelles $P(F)$ et $f(F)$ ainsi que les limites du plasma.

$$\text{On prendra : } P = pF + p_0 \quad (20)$$

$$F^2 = f_0^2 - \frac{\mu^2}{R_p^2} F^2 \quad (21)$$

p_0 , f_0 , μ/R_p étant des constantes, μ pouvant être imaginaire .

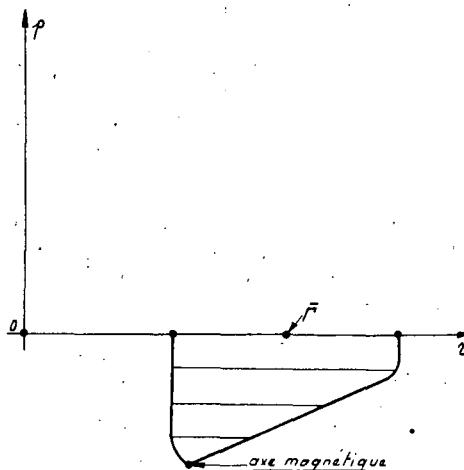


FIG. 5. Cas a - Schéma de configuration

Le plasma sera une surface canal de rayon R_p centrée autour de Γ . Ainsi

$$\frac{d^2H}{dF^2} = -\mu^2/R_p^2$$

Le signe de cette quantité dépend de la réalité de μ . Si $\mu^2 > 0$ configuration à couche limite possible. Si $\mu^2 < 0$ tendance à la multiplication des axes magnétiques. Pour résoudre simplement l'équation d'équilibre (3) nous ferons l'approximation du tube fin, approximation souvent justifiée expérimentalement:

$$\frac{2\pi R_p}{L} \sim \varepsilon$$

ε étant un petit paramètre.

On suppose k entier petit et a_k/a_0 de l'ordre ou inférieur à 1, ce qui correspond aux plasmas réalisables, d'où

$$a_k R_p \sim K R_p \sim \varepsilon$$

et nous étudierons ces configurations pour des β petits.

$$\beta = 2P/B^2 \sim \varepsilon^2$$

On cherche des solutions de la forme

$$F = F_1 + F_2 + \dots \quad (22)$$

F_1 et F_2 étant d'ordre croissant en ε . Si $k \neq 0$ nous supposerons

$$f = \bar{f}_o + O(\varepsilon^2) \quad (23)$$

\bar{f}_o est une constante, hypothèse que nous justifierons finalement pour un large domaine des paramètres où les effets de courbure sont fondamentaux.

La solution de (3) avec F constant sur la surface canal de rayon R_p centrée sur Γ fournit avec (20) et (21) la classe des configurations suivantes :

$$P/P_m = 2E(x, t) \quad (24)$$

$$F/R_p - G = \frac{2P_m}{pR_p} E = \frac{\eta}{2} \cdot \left(\frac{2\pi R}{L} \right) \left(\frac{4I_2}{\mu I_1} \right) f_{x=1} \cdot E(x, t) \quad (25)$$

$$\frac{f^2}{f_{x=1}^2} = 1 - 2q, E - 2q_2 E^2 \quad (26)$$

où : $x = \rho/R$

$$E(x, t) = \frac{I_o(\mu) - I_o(\mu x)}{2I_2(\mu)} - \frac{(aR)}{4} \frac{I_o(\mu)}{I_2(\mu)} \left(\frac{I_1(\mu x)}{I_1(\mu)} - \frac{x I_o(\mu x)}{I_o(\mu)} \right) \cos t \quad (27)$$

$$- \frac{\sigma}{2} \frac{I_1^2(\mu)}{I_2^2(\mu)} \left(x - \frac{I_1(\mu x)}{I_1(\mu)} \right) \cos t$$

$$q_1 = \beta - k \left(\frac{2\pi R}{L} \right)^2 \frac{\bar{f}_o}{f_{x=1}} \cdot \left(\frac{4I_2}{\mu I_1} \right) \eta - \left(\frac{2\pi R}{L} \right)^2 \left(\frac{2I_0 I_1}{I_1^2} \right) \eta^2 = \beta - \bar{q}_1. \quad (28)$$

$$q_2 = 2 \cdot \left(2\pi R/L \right)^2 \left(I_2/I_1 \right)^2 \eta^2 \quad (29)$$

$$\sigma = (aR) \left[\frac{k}{\eta} \frac{\bar{f}_o}{f_{x=1}} \left(\frac{4I_2}{\mu I_1} \right) + \left(\frac{L}{2\pi R} \right)^2 \frac{\beta}{\eta^2} \right]. \quad (30)$$

P_m est la pression moyenne dans le plasma. a, R sont mis pour a_k et R_p . I_0, I_1, I_2 désignent les fonctions de Bessel de 2^e espèce. $I_0(\mu), I_1(\mu), I_2(\mu)$

$\beta = 2P_m/f_{x=1}^2$; $f_{x=1}$ est la valeur prise par f sur le bord du plasma; G est une constante sans intérêt car seul grad F a un sens physique.

$$\eta = \frac{L}{2\pi R} \cdot \frac{4P_m}{pR} \frac{1}{f_{x=1}} \left(\frac{\mu I_1}{4I_2} \right) \quad (31)$$

Cette quantité η est reliée au courant total I

$$\frac{I_m}{2\pi} = - \frac{I}{2\pi R f_{x=1}} \left(\frac{L}{2\pi R} \right) = k + \eta + O(\varepsilon^2) \quad (32)$$

$\nu_M / 2\pi$ représente la transformation rotationnelle moyenne de la configuration. Les quantités $4I_2/\mu I_1$, $2I_0I_2/I_1^2$, I_2/I_1 restent toujours inférieures à quelques unités dans tout l'intervalle $-\infty < \mu^2 < +\infty$ excepté au voisinage des zéros de $J_1(\mu)$ et de $J_2(\mu)$. Si η et σ restent inférieurs ou de l'ordre de l'unité, il est facile de voir que dans ce domaine de μ^2 s'étendant sur les 2 cas précédemment définis, f est constant à ε^2 près (éq.23). Alors $f_0/f_{x=1} \neq 1$ et β prend le sens d'un β moyen. Dans ces mêmes hypothèses, $\nu/2\pi$ est sensiblement constant dans l'intérieur du plasma et égal à $\nu_M/2\pi$.

L'hypothèse $\sigma \leq 1$ impose, toutes choses égales par ailleurs, une limitation inférieure à η . Cette limitation de la validité de la solution trouvée n'est d'ailleurs pas importante car la condition que la topologie ne change pas (1 seul axe magnétique) conduit non seulement à la condition $\mu^2 > -j_{11}^2$ (j_{11} étant le premier zéro de la fonction de Bessel $J_1(\mu)$) mais aussi à la condition suivante :

$$\left(\frac{\delta E}{\delta x} \right)_{\substack{x=0 \\ x=1}} = 0$$

soit :

$$\gamma = \sigma + \alpha R/4 \left(2 - 2I_0I_2/I_1^2 \right) \leq 1$$

qui en première approximation s'écrit $\sigma < 1$. Cependant cette limitation de la validité du développement pour η très petit ne nous permet pas de constater, comme il était prévu dans le cas $d^2H/dF^2 > 0$, la multiplication des axes magnétiques quand $\eta \rightarrow 0$, ni la formation pour μ donné de la couche limite dans les mêmes conditions et pour $d^2H/d^2F^2 < 0$. Mais il reste une grande différence de comportement dans les 2 cas ; même si $\gamma \leq 1$, si μ^2 devient très négatif, le nombre d'axe magnétique croît, et si $\mu^2 \rightarrow +\infty$ l'axe magnétique unique se rapproche indéfiniment du bord du plasma. La figure 6 montre l'écart en fonction de μ^2 de l'axe magnétique par rapport à l'axe central.

Remarque

Les effets toroidaux apparaissent dans le terme proportionnel à σ . En effet si a_k est négligé, ou si η est grand, la solution à l'ordre zéro est la solution cylindrique : les termes en t sont d'ordre ε ou encore plus petits. Le domaine propre de la méthode de développement utilisée dans ce travail est donc la région des paramètres correspondant à η petit ou $\nu_M/2\pi \neq k$. Dans cette région, les termes non cylindriques peuvent changer d'ordre de grandeur. Au-delà d'une valeur de η dépendant des autres paramètres de l'équilibre, les effets de courbure deviennent négligeable et l'ordre zéro cylindrique parfaitement adapté.

Les expériences du type Pinch toroidal sont en général faites en symétrie de révolution ($k = 0$) et η est grand : elles ne présentent alors pas d'effet de courbure important. De plus dès $\eta \sim L/2\pi R$ nos approximations ne sont plus valables, f ne reste pas constant ce qui est d'ailleurs caractéristique du pinch. Au contraire des appareils comme Tokomac ($k = 0$, $\eta < 1$) ou Harmonica ($k = 2$, $\eta < 1$) travaillent dans la région des effets de courbure intenses.

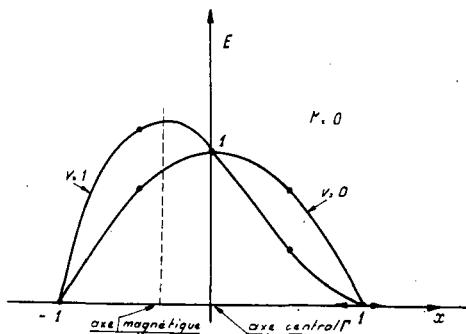
Stabilité

En introduisant les quantités sans dimension

$$v = \frac{V}{\pi LR^2} \quad \text{et} \quad \bar{\Psi} = \frac{\Psi}{\pi R^2 F_{x=1}}$$

le critère de stabilité (12") s'écrit

$$S = v'' + \beta \left(\frac{dv}{d\bar{\Psi}} \right)^2 \left\{ 8 \left(\frac{L}{2\pi R} \right)^2 \frac{1}{\eta^2} \left(\frac{\mu I_1}{4I_2} \right)^2 W + \left(\frac{dv}{d\bar{\Psi}} \right)^3 \left(\frac{d\bar{\Psi}}{dE} \right) \right\} < 0$$

FIG. 6. Courbe $E(x, \cos t = 1)$ pour $\mu = 0$ ($y = 0$ et 1)

où

$$W = \frac{1}{2\pi RL} \int \frac{ds}{|\text{grad } E|^2} - \frac{1}{S} \left[\frac{f}{f_{\infty,1}} \frac{dv}{d\varphi} - g \right]^2$$

Dans notre approximation d'ordre zéro, le dernier terme de S s'élimine exactement avec le terme de v'' provenant du β dans l'expression de q , (28). Si l'on remplace q_1 par $\bar{q}_1 = \beta - q_1$, le critère devient :

$$S = v'' + \frac{\beta \beta}{\eta^2} \left(\frac{L}{2\pi R} \right)^2 \left(\frac{\mu I_1}{4I_2} \right)^2 \left(\frac{dE}{d\varphi} \right)^2 W < 0$$

Dans cette classe, une configuration est décrite par 6 paramètres

$$\mu \quad h \quad (a_k R_p) \quad \left(\frac{L}{2\pi R_p} \right) \quad \beta \quad \eta$$

Ces paramètres doivent vérifier la relation $\eta \leq 1$ pour que cette configuration n'ait qu'un axe magnétique; ce que nous imposons. Tous ces paramètres peuvent être prévus dans la construction d'un appareil sauf μ dont on ne connaît rien à priori, seules des mesures permettent de le fixer. Notons que sur T.A. 2000, on peut déterminer μ à chaque instant de la décharge. On trouve μ^2 négatif, croissant très rapidement en valeur absolue et se fixant à une valeur $\mu^2 \approx -j_{01}/j_{01}$ étant le premier zéro de $J_0(\mu)$.

Les calculs de S sont faits à la machine et les domaines de stabilité sont étudiés en fonction de β et η , les 4 autres paramètres étant fixés. Les régions de $S < 0$ sont calculées pour chaque surface magnétique, le domaine de stabilité étant l'intersection de ces différentes régions. Quelques cas limites sont étudiés analytiquement 1/.

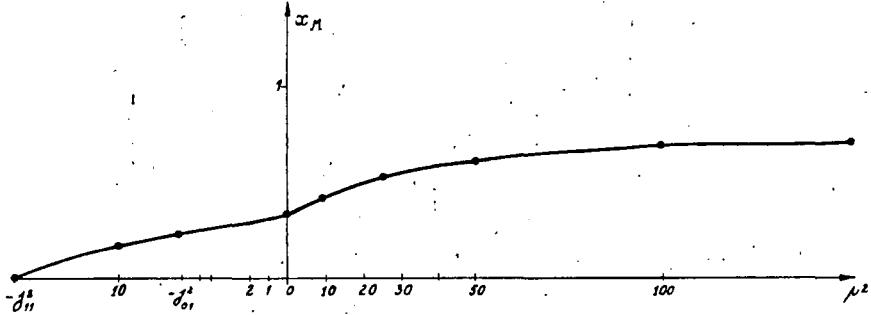
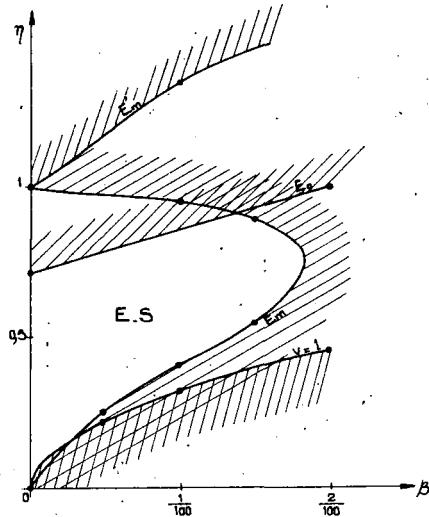
a) Etude de S près du bord de la configuration : $E=0$. Dans ce cas, si $\sqrt{\gamma} = 1$, $S < 0$: donc si l'on s'approche suffisamment près de la limite d'équilibre ($\sqrt{\gamma} = 1$) le voisinage de la surface du plasma n'entraîne pas d'instabilités.

b) Etude de S au voisinage de l'axe magnétique dans les cas $\mu = 0$ et $\mu \rightarrow \infty$ ($E = E_m$).

Ils montrent une influence très destabilisante du 2ième terme de S . Ainsi pour $\mu \rightarrow \infty$, v'' est en général négatif mais cependant S positif, donc instabilité pour μ grand.

Comme illustration des résultats les figures (7) (8) montrent les régions de stabilité pour $E=0$ et $E=E_m$ pour le cas $\mu = 0$, cas très simple où

1/ Les calculs et résultats développés pourront être trouvés dans un rapport EUR-CEA-FC- à paraître .

FIG. 7. Ecart x_M entre l'axe central et l'axe magnétique pour $\gamma = 1$ 

$$\mu = 0, k = 0, \frac{2\pi R}{L} = \frac{1}{10}$$

FIG. 8. La courbe $v = 1$ sépare les régions d'équilibre et de non-équilibre. Les courbes E_0 et E_m définissent les régions de stabilité pour le bord et sur l'axe magnétique de la configuration. E_m sépare les régions de $v'' \leq 0$ au voisinage de l'axe magnétique.

$$E = (1 - x^2)(1 - Vx \cos t)$$

$$\checkmark = (\sigma R) \left(\frac{1}{4} + \frac{k}{\eta} + \left(\frac{L}{2\pi R} \right)^2 \frac{\beta}{\eta^2} \right)$$

Le déplacement x_M de l'axe magnétique par rapport à l'axe central ($x = 0$) est dans ce cas au maximum de $1/3$. ($\gamma = 1$, $t = \pi$, $x_M = \frac{1}{3}$) (fig. 6)

Il est intéressant de remarquer que pour les petites valeurs de V , le déplacement x_M s'écrit $x_M \approx \frac{V}{2}$

Si on utilise les notations de /2/ en notant que β défini dans cet article est le double du β moyen défini ici, on retrouve identiquement le résultat p.97 (cas b) :

$$x_M = \frac{r}{\sigma} = \mu_k \left[\frac{\beta}{8\eta(x-k)^2 y} + \frac{\pi}{4} \frac{x+3k}{x-k} y \right]$$

Dans ce cas ($\mu = 0$ et γ petit), on trouve aussi

$$\sigma'' = \left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 (k + \eta)^2 - \frac{2k(aR)^2}{\eta} - (aR)^2 - \beta \left(1 + 2\left(\frac{L}{2\pi R}\right)^2 \frac{(aR)^2}{\eta}\right)$$

tandis que le critère s'écrit :

$$S = \left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 (k + \eta)^2 - \frac{2k(aR)^2}{\eta} - (aR)^2 < 0$$

expressions où l'effet destabilisant du terme en W de S est très visible. De même que pour l'équilibre, on peut comparer ce résultat avec celui de $/2$ (p. 96, éq. 26) que l'on peut écrire en posant :

$$\frac{1}{(R)^2} = a_0 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^2 \quad \text{et en assimilant } \frac{L_0}{2\pi} \text{ à } \frac{L_M}{2\pi}$$

$$\left(\frac{2\pi R}{L}\right)^2 \left(\frac{L_M}{2\pi}\right)^2 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k + \frac{L_M}{2\pi}}{k - \frac{L_M}{2\pi}} (a_k R)^2 < 0$$

Si nous étudions le voisinage de $k = k_0$, $\frac{L_M}{2\pi} = k_0 + \eta$ et le terme en k du critère ci-dessus est identique à S . On peut ainsi avoir une idée qualitative de l'effet des autres coefficients de Fourier, qui sont négligés dans l'approximation

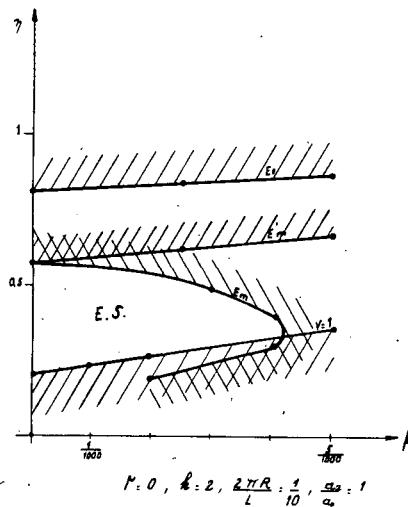


FIG. 9. La courbe $v=1$ sépare les régions d'équilibre et de non-équilibre. Les courbes E_0 et E_m définissent les régions de stabilité pour le bord et sur l'axe magnétique de la configuration. E_m sépare les régions de $v'' \leq 0$ au voisinage de l'axe magnétique.

hélicoïdale. Remarquons que les termes supplémentaires du critère donnent des contributions stabilisantes si $k^2 < \left(\frac{L_M}{2\pi}\right)^2$, destabilisantes dans l'autre cas.

CONCLUSION

Les applications ci-dessus ont montré qu'il existe des domaines de paramètres où un ordre zéro simplement cylindrique n'est pas suffisant pour l'étude des plasmas toroïdaux : elles ont montré aussi que des domaines complètement stables en M.H.D. peuvent exister grâce aux effets de la courbure. Cette méthode de développement à partir d'un ordre zéro hélicoïdal peut être appliquée à des configurations différentes et en particulier à des configurations avec région de vide ou de plasma sans pressions.

Si la résistivité est prise en compte, on peut encore espérer des domaines stables car la stabilité M.H.D. obtenue dans ce travail est principalement due à la formation de configurations à $V'' < 0$.

REFERENCES

- /1/ MERCIER, C., Fusion Nucléaire, 4 (1964) 213
- /2/ MERCIER, C., Fusion Nucléaire, 3 (1963) 89
- /3/ a) JOHNSON, J.L., OBERMAN, C.R., KULSRUD, R.M., FRIEMAN, E.A., Phys.Fluids, 1 (1958) 281
b) JOHNSON, J.L., Phys.Fluids, 3 (1960) 658
c) GREENE, J.M., JOHNSON, J.L., Phys.Fluids, 4 (1961) 875
- /4/ GREENE, J.M., JOHNSON, J.L., KRUSKAL, M.D., WILETS, L., Phys.Fluids, 5 (1962) 1063.
- /5/ MERCIER, C., Fusion nucléaire, Suppl.partie 2 (1962) 801
- /6/ Projet HARMONICA - Symposium Euratom sur la Physique des Plasmas - Varenna - Oct.1964 - 1, 253

THERMALIZATION AND ANOMALOUS DIFFUSION OF TURBULENT PLASMAS

R.E. AAMODT AND W.E. DRUMMOND

GENERAL ATOMIC DIVISION, GENERAL DYNAMICS CORPORATION,
SAN DIEGO, CALIF., UNITED STATES OF AMERICA

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

THERMALIZATION AND ANOMALOUS DIFFUSION OF TURBULENT PLASMAS. At the present time, it appears possible to construct plasma devices which are stable to the so-called flute instabilities. However, no device at present appears in addition to be stable to the so-called micro-instabilities, which depend on the local velocity distribution and density gradient for their growth. For many of these instabilities $\gamma/\omega \ll 1$ and the quasi-linear theory applies, where ω is the frequency and γ is the growth rate. The quasi-linear theory predicts the development of a high-amplitude equilibrium spectrum of waves, and a concomitant distortion of the particle distribution function so that the waves in this equilibrium spectrum are neutrally stable. In this paper, we discuss the time development of this equilibrium spectrum arising from the mode coupling terms that are neglected in the quasi-linear theory. These terms lead to rapid distortion of the equilibrium spectrum and to a damping of the total energy of the spectrum into both electron and ion thermal motion and to the anomalous diffusion of the plasma across magnetic field lines.

The mode coupling terms can be divided into two parts: the "resonant" mode coupling terms that represent wave-wave scattering and lead to a distortion of the spectrum but do not change the total energy of the wave spectrum, and the "non-resonant" mode coupling terms that in addition to distorting the spectrum lead to a decay of the total energy in the spectrum via "non-linear Landau damping". This process in addition leads to an anomalous diffusion of plasma across magnetic field lines.

THERMALISATION ET DIFFUSION ANORMALE DES PLASMAS TURBULENTS. Il semble possible, à l'heure actuelle, de construire des appareils à plasma capables de neutraliser les instabilités dites en cannelures. Il semble toutefois qu'aucun de ces appareils ne soit capable de neutraliser les microinstabilités, dont la croissance dépend de la distribution des vitesses et du gradient de densité locaux. Pour beaucoup de ces instabilités, la théorie «quasi linéaire» s'applique et $\gamma/\omega \ll 1$, ω étant la fréquence et γ le taux de croissance. La théorie quasi linéaire prévoit le développement d'un spectre d'ondes d'amplitudes élevées à l'équilibre, et une distorsion concomitante de la fonction de distribution des particules, de telle sorte que les ondes sont stables dans ce spectre à l'équilibre. Les auteurs examinent l'évolution dans le temps de ce spectre à l'équilibre qui est dû aux termes de couplage de mode, lesquels sont négligés dans la théorie quasi linéaire. Ces termes entraînent une distorsion rapide du spectre à l'équilibre, un amortissement de l'énergie totale du spectre en mouvements thermiques des électrons et des ions, ainsi qu'une diffusion anormale du plasma à travers les lignes du champ magnétique.

On peut répartir les termes de couplage de mode en deux groupes: les termes de couplage de mode «résonants», qui représentent la dispersion onde-onde et qui entraînent une distorsion du spectre, mais ne modifient pas l'énergie totale du spectre d'ondes; les termes de couplage de mode «non résonants», qui entraînent non seulement une distorsion du spectre, mais aussi une diminution de l'énergie totale dans le spectre par l'intermédiaire d'un «amortissement non linéaire de Landau». Ce processus entraîne en outre une diffusion anormale du plasma à travers les lignes du champ magnétique.

ТЕРМАЛИЗАЦИЯ И АНОМАЛЬНАЯ ДИФФУЗИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ. В настоящее время, по-видимому, можно создать термоядерные установки, которые являются устойчивыми в отношении так называемых желобковых неустойчивостей. Однако в настоящее время, по-видимому, нет установки, которая была бы также устойчивой и в отношении так называемых микронеустойчивостей, рост которых зависит от локального распределения скоростей и градиента плотности. Для многих из этих неустойчивостей применяются $\gamma/\omega \ll 1$ и применима "квазилинейная" теория, где ω — частота, а γ — скорость роста. Квазилинейная теория предсказывает развитие равновесного спектра волн, большой амплитуды, а также сопутствующее

ющее искажение функции распределения частиц, так что волны в этом равновесном спектре являются нейтрально устойчивыми. В этой работе обсуждается временное развитие этого равновесного спектра на основе членов, описывающих связь колебаний, которые не учитываются в квазилинейной теории. Эти члены ведут к быстрому искажению равновесного спектра и к затуханию общей энергии спектра в тепловое движение электронов и ионов, а также к аномальной диффузии плазмы поперек линий магнитного поля.

Члены, описывающие взаимодействие колебаний, можно разделить на две части: члены, учитывающие связи ответственные за резонансное взаимодействие колебаний, представляющие рассеяние волн на волнах и приводящие к искажению спектра, но не изменяющие общую энергию волнового спектра; и члены, учитывающие "нерезонансное" взаимодействие колебаний и приводящие, помимо искажения спектра, к спаду общей энергии в спектре путем "нелинейного затухания Ландау". Кроме того, этот процесс ведет к аномальной диффузии плазмы поперек линий магнитного поля.

TERMALIZACION Y DIFUSION ANOMALA DE PLASMAS TURBULENTOS. En la actualidad parece posible construir dispositivos de plasma no sujetos a la llamada inestabilidad en estrías. Sin embargo, ningún dispositivo actual es inmune, además, a las llamadas microinestabilidades, las cuales dependen para su crecimiento de la distribución de velocidades y del gradiente local de densidad. Para muchas de estas inestabilidades $\gamma/\omega \ll 1$ y se aplica la teoría casi lineal, donde ω es la frecuencia y γ el índice de crecimiento. Esta teoría predice el desarrollo de un espectro de equilibrio de ondas, de gran amplitud, y una consiguiente deformación de la distribución de partículas, de modo que las ondas comprendidas en este espectro de equilibrio son neutralmente estables. En la presente memoria, los autores analizan el desarrollo temporal de este espectro de equilibrio debido a los términos de acoplamiento modal que se desprecian en la teoría casi lineal. Esos términos llevan a una rápida distorsión del espectro de equilibrio y a un amortiguamiento de la energía total del espectro en un movimiento térmico tanto de electrones como de iones y a la difusión anómala del plasma a través de las líneas de campo magnético.

Los términos de acoplamiento modal pueden dividirse en dos partes: los términos «resonantes» que representan dispersión onda-onda y conducen a una deformación del espectro pero no modifican la energía total del mismo, y los términos de acoplamiento modal «no resonantes» que, además de deformar el espectro, disminuyen su energía total, en virtud de un «amortiguamiento no lineal de Landau». Por otra parte, este proceso conduce a una difusión anómala del plasma a través de las líneas de campo magnético.

I. INTRODUCTION

In this paper we wish to consider the time development of unstable plasma waves in a low β collisionless plasma. We restrict ourselves to longitudinal waves for which the growth rate, γ , is small compared to the frequency ω , i.e., $\gamma/\omega \ll 1$. For such plasmas the growth of unstable waves to a turbulent state, the decay of the turbulent state and the concomitant anomalous diffusion can be followed in detail. It is the purpose of the present paper to discuss the general character of these processes, together with their physical explanation, and to illustrate the methods by considering a particular example.

The time development of such an unstable plasma can be divided into four phases. In the first phase the wave's growth is governed by the linearized theory [1] and the growth is exponential with no interaction among the waves. In the second phase the so-called quasi-linear theory [2,3] applies. In this phase the growth of waves is limited leaving an equilibrium spectrum of waves. In the third phase resonant scattering of waves distorts the spectrum but the total energy in the spectrum remains constant. In the fourth phase waves interact resonantly with the bulk of the background particles further distorting the spectrum and giving up their energy to the particles through the so-called "non-linear Landau damping" process. This process also leads to the anomalous diffusion of the plasma across the magnetic field lines. Phases three and four usually happen concurrently.

In Section II we give the equations of describing the time development of the turbulent spectrum together with their physical interpretation, and in Section III we develop the equations which govern the change in the particle distribution function and the anomalous diffusion of the plasma. In Section IV we consider in

more detail for a particular type of plasma wave the time development of the spectrum due to resonant mode coupling, and in Section V we consider the non-linear Landau damping in more detail. The results are discussed in Section IV.

II. MODE COUPLING EQUATIONS

For unstable waves for which $\gamma/\omega \ll 1$ the quasi-linear theory leads to a limitation of the wave energy such that the ratio of wave energy to thermal energy of the plasma is of the order of $\gamma/\omega \ll 1$ and this gives an a posteriori justification of the amplitude expansion which is used to derive the quasi-linear theory. After the quasi-equilibrium spectrum is reached the further time development of the spectrum is obtained by considering the mode-coupling terms which are formally of higher order in $|E|^2$, the field energy.¹

The general method for determining the time development due to mode coupling has been given by several authors [4,5,6,7] and only the results will be given here. For resonant mode coupling

$$\left. \frac{\partial |E_k|^2}{\partial t} \right|_{\text{resonant}} = 4\pi \sum_q \delta(\omega_k - \omega_{k-q} - \omega_q) \left\{ |H_{kq}|^2 |E_q|^2 |E_{k-q}|^2 - 2H_{kq} H_{qk} |E_k|^2 |E_{k-q}|^2 \right\} \quad (2.1)$$

where \vec{E}_k is the k^{th} Fourier component of the electric field, ω_k is its frequency and the matrix element H_{kq} depends upon \vec{k} , \vec{q} , ω_k , ω_q . The precise form of H_{kq} depends on the waves considered. We shall choose as an example the case of electron plasma oscillations in an infinite magnetic field. For this case H_{kq} is shown in Ref. 5 to be

$$H_{kq} = \frac{e |\vec{k}-\vec{q}| q_{\parallel}}{4\pi \omega_p (k_{\parallel} - q_{\parallel}) q_{\parallel}^2} \left\{ q_{\parallel} \omega_k (\omega_k - 2\omega_q) - k_{\parallel} \omega_q (\omega_q - 2\omega_k) \right\}$$

where the subscript \parallel denotes the component of a vector along the direction of magnetic field.

The physical interpretation of Eq.(2.1) can be understood in terms of the diagram in Fig. 1.

The first term in Eq. (2.1) comes from the interaction of waves \vec{E}_{k-q} and \vec{E}_q to produce \vec{E}_k . The second and third terms represent the loss of energy by \vec{E}_k to produce waves E_q , E_{k-q} as well as the gain or loss of E_k by the interaction of E_k with E_{k-q} (or E_q) through the intermediary of $E_q(E_{k-q})$ (a form of parametric amplification). It should be noted that these processes occur only if $\omega_{k-q} \omega_q = \omega_k$.

The non-resonant mode coupling terms which lead to non-linear Landau damping are given by

$$\left. \frac{\partial |E_k|^2}{\partial t} \right|_{\text{non-resonant}} = |E_k|^2 \sum_q M_{kq} |E_{k-q}|^2 \quad (2.2)$$

¹ The quasi-linear terms are of order $(\gamma/\omega) |E|^2$ and the mode coupling terms are of order $|E|^4$, so that the quasi-linear terms are usually more important at early times. However, after the quasi-linear equilibrium has been reached $|E|^2$ is of the order of γ_0/ω , where γ_0 is the initial value of γ , and $\gamma(t) \sim 0$ so that the mode coupling terms dominate.

² In addition to \vec{k} each \vec{E}_k is characterized by an index which denotes whether the propagation is in the $-k$ direction or the k direction. For simplicity we suppress this index.

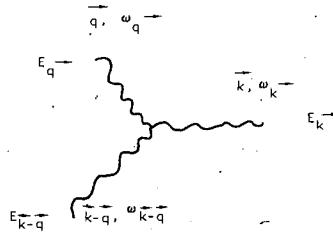


FIG. 1. Diagram showing resonant wave-wave scattering.

where again the exact form of M_{kq} depends on the waves under consideration. For the case of electron oscillations in a strong magnetic field M_{kq} is given by Ref. 5 to be

$$M_{kq} = - \frac{i}{\partial e(k, v_k) / \partial v_k} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{1}{\lambda_D^2} \frac{(k_{||} - q_{||})^2}{|\vec{k} - \vec{q}|^2} \frac{1}{k_{||}^2} \frac{1}{(v_k - v_{qk})^4} \\ \times \left\{ W_e(-v_{qk}) + \left[\frac{1}{e(q, v_{qk})(q\lambda_D)^2} \right] \left[W_e(-v_{qk}) - \left(\frac{k_{||}}{q_{||}} (k\lambda_D)^2 + \frac{(q_{||} - k_{||})}{q_{||}} |\vec{q} - \vec{k}|^2 \lambda_D^2 \right) \right]^2 \right\} \quad (2.3)$$

where $W_e(-v_{qk})$ is the electron plasma dispersion function which for small argument is given by

$$W_e = -1 + \left(\frac{v_{qk}}{v_e} \right)^2 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{v_{qk}}{v_e} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{v_{qk}}{v_e} \right)^2 \right)$$

and for large arguments is given by

$$\left(\frac{v_e}{v_{qk}} \right)^2 + 3 \left(\frac{v_e}{v_{qk}} \right)^4 + \dots, \quad v_k = \frac{\omega_k}{k_{||}}, \quad v_{qk} = \frac{\omega_{q-k} + \omega_k}{q_{||}}$$

W_1 is the same except v_e is replaced by \bar{v}_1 , and

$$e(q, v_q) = 1 - \frac{1}{(q\lambda_D)^2} (W_e + W_1), \quad v_{qk} = \frac{\omega_{q-k} + \omega_k}{q_{||}}.$$

The non-resonant mode coupling terms can be understood with the aid of the diagrams in Fig. 2 and Fig. 3.

If \vec{E}_k and \vec{E}_{q-k} interact they produce a wave E_d with frequency $\omega_d + \omega_{q-k}$. If $\omega_d + \omega_{q-k} = \omega_q$ then the process is resonant mode coupling. However, if $\omega_d + \omega_{q-k} \neq \omega_q$ then the wave energy in E_d does not increase time proportionally as with resonant mode coupling but comes to an equilibrium value $\bar{E}_d^{(2)}$ which is inversely proportional to the dielectric coefficient evaluated for waves with wave vector \vec{d} , and frequency $\omega_d + \omega_{q-k} \neq \omega_d$. This is illustrated in Fig. 2a. The "virtual wave" $\bar{E}_d^{(2)}$ can subsequently interact with other waves as shown in Fig. 2b. This process usually leads to time dependences of the order of $|E|^6$, which are negligible. However, if the final wave is the same as the initial wave the process is phase coherent and leads to a time dependence which is of order $|E|^4$. This is illustrated in Fig. 3a.

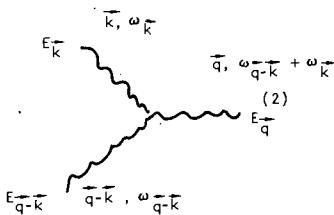


FIG. 2a. Diagram showing production of virtual wave $E_q^{(2)}$.

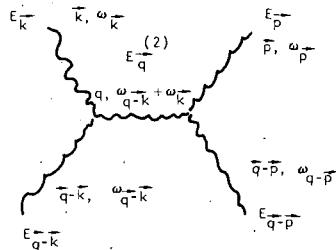


FIG. 2b. Diagram illustrating higher order scattering through the intermediate state $E_q^{(2)}$.

Such a process would ordinarily not lead to a change in the total wave energy but if the phase velocity of $E_q^{(2)}$ is of the order of the thermal velocity of the particles i.e., if $v_{qk} = \bar{v}_i, \bar{v}_e$ then the virtual wave will feed energy into the particles. This is the process which leads to the second term in the curly brackets in Eq. (2). The first term in the curly brackets in Eq. (2.3) comes from the diagram shown in Fig. 3b. As will be seen shortly these two terms almost cancel. Roughly speaking, the physical reason for this is that \vec{E}_k and \vec{E}_{q-k} produce a source current \vec{j}_q^0 which generates $E_q^{(2)}$. The response current due to $E_q^{(2)}$

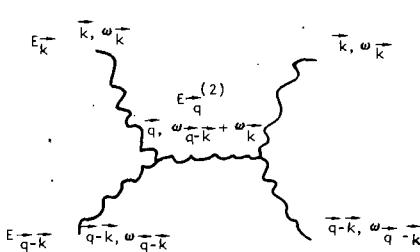


FIG. 3a. Diagram illustrating coherent scattering through the intermediate state $E_q^{(2)}$.

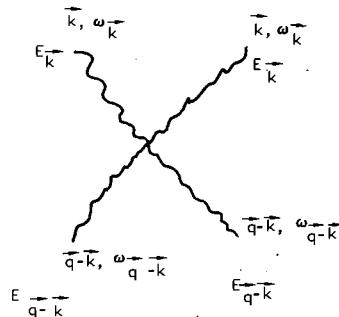


FIG. 3b. Diagram illustrating coherent four wave interaction.

is given by $\vec{j}_q^{(2)} = -\vec{j}_q^0 + \vec{j}_q^0/\epsilon, \epsilon \gg 1$. The subsequent interactions of $\vec{j}_q^{(2)}$ with $\vec{E}_k \vec{E}_{q-k}$ and \vec{j}_q^0 with $\vec{E}_k \vec{E}_{q-k}$ (Fig. 3b) thus almost cancel.

III. NON-LINEAR LANDAU DAMPING AND ANOMALOUS DIFFUSION

In this section we discuss the time development of the distribution function associated with the mode coupling terms. From an iteration of the Vlasov equation this is given by

$$\frac{\partial f_0(v, t)}{\partial t} = -\frac{e}{m} \sum_{\mathbf{k}} \vec{E}_{\mathbf{k}} \cdot \vec{\nabla}_{\mathbf{v}} f_{\mathbf{k}} = \frac{\partial}{\partial v} \frac{e}{m} \sum_{\mathbf{k}} \frac{k}{k} \vec{E}_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}$$

Since \vec{f}_k is proportional to $\partial f_0 / \partial v$ this can be written in the form

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} D(v, t) \frac{\partial f_0}{\partial v} \quad (3.1)$$

where (remembering that $\vec{E}_k = \vec{E}_k^{(1)} + \vec{E}_k^{(2)}$)

$$\begin{aligned} D = & \sum_k L^{(1)} \left| E_k^{(1)} \right|^2 \\ & + \sum_{kp} L^{(2)} \left| E_k^{(2)} \right|^2 + \sum_{kq} Q^{11} E_k^{(2)} E_{k-q}^{(1)} E_q^{(1)} \\ & + \sum_{kqp} \left[\bar{E}_k^{(1)} Q^{12} E_{k-q}^{(1)} E_q^{(2)} + E_k^{(1)} Q^{21} E_q^{(2)} E_{k-q}^{(1)} \right] \\ & + \sum_{kqp} \bar{E}_k^{(1)} T E_{k-q}^{(1)} E_{q-p}^{(1)} E_p^{(1)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

where

$$L^{(1)} = -i \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{k_{\parallel}}{k^2} \frac{1}{(v_k - v)}$$

$$L^{(2)} = -i \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{k_{\parallel}}{k^2} \frac{1}{(v_{kq} - v)}$$

$$Q^{11} = - \left(\frac{e}{m} \right)^3 \frac{(k_{\parallel} - q_{\parallel})}{|k-q|} \frac{1}{qk} \frac{1}{(v_{kq} - v)} \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{(v_q - v)}$$

$$Q^{12} = - \left(\frac{e}{m} \right)^3 \frac{(k_{\parallel} - q_{\parallel})}{|k-q|} \frac{1}{qk} \frac{1}{(v_{kqp} - v)} \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{(v_{qp} - v)}$$

$$Q^{21} = - \left(\frac{e}{m} \right)^3 \frac{q_{\parallel}}{q} \frac{1}{|k-q|} \frac{1}{k} \frac{1}{(v_{kqp} - v)} \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{(v_{k-q} - v)}$$

$$T = i \left(\frac{e}{m} \right)^3 \frac{(k_{\parallel} - q_{\parallel})}{|k-q|} \frac{(q_{\parallel} - p_{\parallel})}{|q-p|} \frac{1}{p_{\parallel} q_{\parallel} k} \frac{1}{(v_{kqp} - v)} \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{(v_{qp} - v)} \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{(v_p - v)}$$

The first term on the r.h.s. of Eq. (3.2) is the usual quasi-linear term, D_{QL} and the pole at $v = v_k \gg \bar{v}$ can be replaced by $i\pi\delta(v_k - v)$. The remaining terms also have poles at $\bar{v} \ll v = v_k, v_q, v_{k-q}, v_{kqp}$, which can be ignored compared with the quasi-linear terms since these terms are of order $|E|^4$. However, in all of the mode coupling terms except Q^{21} there is a pole at $v = v_{qk}, v_{qp}$ and since v_{qk}, v_{qp} can be small compared to \bar{v} these terms must be retained. To evaluate these terms we average over the initial phases and after some tedious, but straightforward algebra obtain for the electrons

$$D_e = D_{QL} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{e}{m} \right)^4 \frac{1}{\omega_p^5} \sum_{kq} \frac{\left| E_k \right|^2 \left| E_{k-q} \right|^2}{\left| (q\lambda_D)^2 \epsilon(q, v_{qk}) \right|^2} \left| -W_1 + (q\lambda_D)^2 - \frac{k_{\parallel}}{q_{\parallel}} (k\lambda_D)^2 \right|$$

$$\left. - \frac{(q_{\parallel} - k_{\parallel})}{q_{\parallel}} |\vec{q} \cdot \vec{k}|^2 \lambda_D^2 \right|^2$$

$$\times \delta(v_{qk} - v) \frac{q_{\parallel}}{|\vec{k} - \vec{q}|^2 k^2} \frac{1}{(v_k - v)^2} \frac{1}{(v_{q-k} - v)^2}$$

For the ions only $L^{(1)}$ and $L^{(2)}$ contribute because the other terms are of higher order in (m/M) , and we obtain

$$D_1 = E_{QL} + \frac{\pi(e)}{2(m)} \left(\frac{m}{M} \right)^2 \sum_{kq} \frac{|E_k|^2 |E_{k-q}|^2}{|(\vec{q}\lambda_D)|^2 \epsilon(q, v_{qk})^2} \left| W_e - \left(\frac{k_{\parallel}}{q_{\parallel}} (k\lambda_D)^2 + \frac{(q_{\parallel} - k_{\parallel})}{q_{\parallel}} |\vec{q} \cdot \vec{k}|^2 \lambda_D^2 \right) \right|^2$$

$$\times \delta(v_{q-k} - v) \frac{q_{\parallel}}{|\vec{k} - \vec{q}|^2 k^2} \frac{1}{(v_k - v)^2} \frac{1}{(v_{q-k} - v)^2}$$

It should be noted that all of the derivatives here dropped out of D and thus $f_0(v, t)$ obeys a simple diffusion equation. The new feature is that the mode coupling terms introduce a diffusion of the low velocity particles, i.e., the bulk of the particles can now diffuse, and the diffusion coefficient in velocity space of the ions and electrons in the plasma can be obtained directly from a knowledge of the electric field spectrum.

In calculating the dynamics of the spectrum we have taken the background distribution function of particles to be Maxwellian. This is justified because the changes in the low velocity parts of the distribution functions are small since the energy in the wave spectrum is small compared to nKT . Changes in the high velocity parts of the distribution function lead to time dependences which are of higher order in γ/ω and can be neglected. Thus in contrast to the quasi-linear theory changes due to mode coupling in the distribution function and in the wave spectrum can be considered independently. It is of interest to see the relation of the diffusion coefficients to the spectrum equations. This can be seen most simply in the low temperature or long wave length limit, i.e., when terms of order $(k\lambda_D)^2$ can be neglected compared to the W functions. In this limit the term in brackets in Eq. (2.3) can be written as

$$\frac{|W_e|^2 W_i + |W_i|^2 W_e}{|(\vec{q}\lambda_D)|^2 \epsilon|^2}$$

where only the imaginary parts of W_e and W_i lead to energy transfer. These of course are proportional to

$$\left. \frac{\partial f_0}{\partial v} \right|_{v=v_{qk}}$$

for electrons and ions respectively. The term involving $|W_e|^2 W_i$ comes from the interaction of waves with the ions. This is reflected in the ion diffusion coefficient by the factor $|W_e|^2$. Similarly the term with $|W_i|^2 W_e$ comes from the interaction with electrons and is related to the factor $|W_i|^2$ in the electron diffusion coefficient. The ratio of energy fed into electrons to that fed into ions is thus proportional to

$$\frac{|W_i|^2 W_e}{|W_e|^2 W_i}$$

for $v_{qk} \approx \bar{v}_i |W_i|^2 \approx |W_e|^2 \approx 1$ and $W_e/W_i \approx v/\bar{v}_e \ll 1$ so that for small v_{qk} only a small fraction of the energy transferred to particles goes to electrons, the bulk going to ions. For $v \approx \bar{v}_e$ all of the energy goes to electrons, however, because of the factor $|W_e|^2 \approx (m/M)^2$ this energy is small.

It is easy to show [8] that the anomalous spatial diffusion coefficient is proportional to the velocity diffusion coefficient and is given by

$$D_{ij} = \left(\frac{m_j c}{eB} \right)^2 \left\langle \left(\frac{k_i}{k_j} \right)^2 D_v \right\rangle$$

Thus, since the factors of $(m/M)^2$ drop out, the spatial diffusion coefficients of the ions and the electrons are of the order of

$$D_{ii} \sim |W_e(v)|^2, \quad D_{ie} = |W_i(v)|^2$$

For the bulk of the ions $v \approx \bar{v}_i$ and $|W_e(\bar{v}_i)|^2 \approx 1$ while for the bulk of the electrons $v \approx \bar{v}_e$ and $W_i(\bar{v}_e) \approx (\bar{v}_i/\bar{v}_e)^2 = (m/M)$. Thus the diffusion coefficient for the bulk of the ions is much larger than for the bulk of the electrons.

III. RESONANT MODE COUPLING

The spectrum which results from the quasi-linear interaction is often a sharply peaked function of μ and k and we are concerned with the time development of this spectrum resulting from resonant mode coupling. This time evolution can happen through the production of different kinds of waves as well as the same kinds of waves at different values of μ and k ; e.g., ion oscillations can be produced as a result of the interaction of two electron waves. However, for the example we have chosen, the dominant resonant mode coupling effect leads merely a redistribution of the spectrum of electron waves.

For electron oscillations in a plasma with a large magnetic field it is easy to satisfy the δ -function in Eq. (2.1) if the spectrum is fairly broad in μ and k space. However, since the quasi-linear equilibrium spectrum is peaked about $\mu = 1$ and has a fairly narrow range in k , it is important to determine if the δ -function can be satisfied for waves in the initial spectrum and further to determine into what ranges of μ and k space the spectrum moves.

Considering first the "scattering in" terms, and assuming times such that the amplitudes of the waves with negative phase velocities $\epsilon^{+}(k, \mu_k)$, are small the first term in Eq. (2.1) reduces to, (using $|E_k|^2 = \epsilon(k)$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon^+(k)}{\partial t} &= 4\alpha \int_0^\infty dq q^2 \int_{-1}^1 d\mu_q G^{++} \frac{[\mu_k(2k+q)-\mu_q(2q+k)]^2 (k\mu_k - q\mu_q)^2}{|\mu_k - \mu_q|^5} \\ &\times \frac{\mu_k^2 \epsilon^+(q, \mu_q) \epsilon^+ \frac{k\mu_k - q\mu_q}{\mu_k - \mu_q}, \mu_k - \mu_q}{\sqrt{(2kq) \sqrt{1-\mu_k^2} \sqrt{1-\mu_q^2}}^2 - \left[k^2 + q^2 - 2kq\mu_k\mu_q - \left(\frac{k\mu_k - q\mu_q}{\mu_k - \mu_q} \right)^2 \right]^2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

and

$$\frac{\partial \epsilon^-(k)}{\partial t} = 4\alpha \int_0^\infty dq q^2 \int_{-1}^1 d\mu_q G^{+-} \frac{(\mu_k - q\mu_q)^2}{|\mu_k + \mu_q|^5} [\mu_k(2k-q)-\mu_q(2q-k)]^2$$

$$x \frac{\mu_k^2 e^+(q, \mu_q) e^+ \left(-\frac{k\mu_k - q\mu_q}{\mu_k + \mu_q}, \mu_k - \mu_q \right)}{\sqrt{(2kq \sqrt{1-\mu_k^2} \sqrt{1-\mu_q^2})^2 - \left[k^2 + q^2 - 2kq\mu_k\mu_q - \left(\frac{k\mu_k - 2\mu_q}{\mu_k + \mu_q} \right)^2 \right]^2}} \quad (3.2)$$

where

$$\alpha = \frac{1}{16\pi m v_p} ,$$

$G^{+++} = 1$ if the function inside the square root is positive, and the $|k-q|$ argument of $e^+(\mu_k - \mu_q)$ is positive, in Eq. (3.1), and $G^{+++} = 0$ otherwise, and similarly for G^{++-} for the same terms occurring in Eq. (3.2). It is easy to show that for $e^+(\vec{q})$, and $e^+(\vec{k}-\vec{q})$ both in the narrow initial spectrum, that resonance can occur for scattering into both plus and minus waves for $k \ll q \sim k_0$, for small μ_k . However, the rate is proportional to μ_k^2 and therefore relatively slow. Similarly, it can be seen that resonance cannot occur for $k \gg q \sim k_0$. For $k \approx q \approx k_0$, Fig. 4 shows that resonance occurs for small μ_k if the spectrum as a function of μ is broad enough. Hence, the "scattering in" terms of the resonant process tend to spread the spectrum to lower values of k and μ .

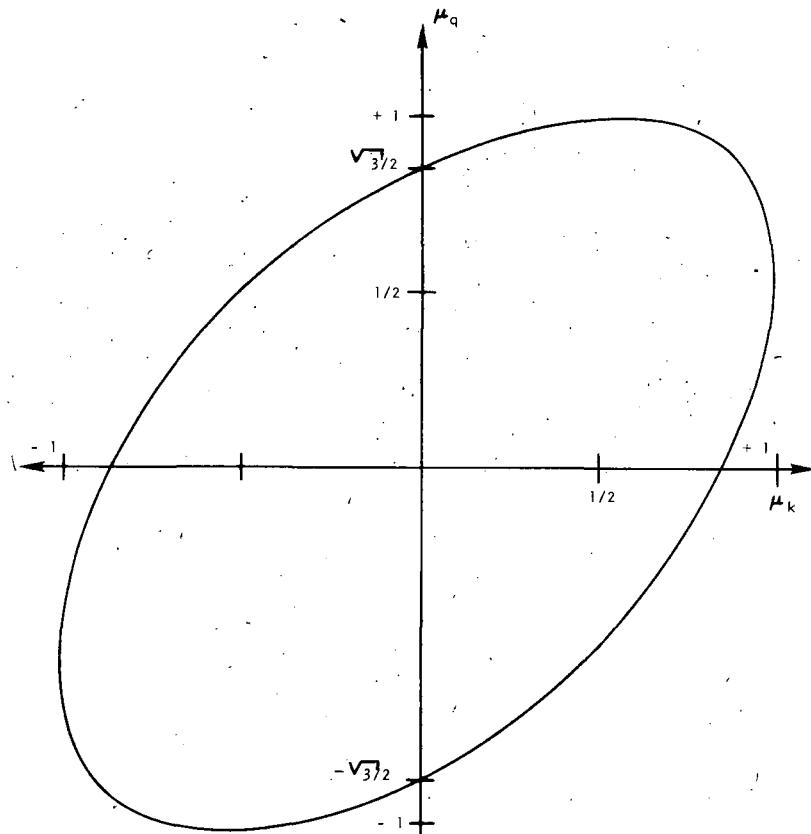


FIG. 4. Resonant region for positive phase velocity waves, $k \approx q$, $\mu_k \neq \mu_q$.

The "scattering out" terms from Eq. (3.1) reduce to the form

$$\frac{\partial \mathcal{E}^+(\vec{k})}{\partial t} = -8\alpha_{kq} \mathcal{E}^+(\vec{k}) \int_0^\infty dqq^2 \int_{-1}^1 du_q \mathcal{E}^+(q, \mu_q) \frac{(k\mu_k - q\mu_q)^2}{|\mu_k - \mu_q|^5}$$

$$\times \frac{[\mu_k(2k+q) - \mu_q(2q+k)]^2 (\mu_k - \mu_q) \{G^{+++} - G^{+-+}\}}{\sqrt{(2kq \sqrt{1-\mu_k^2} \sqrt{1-\mu_q^2})^2 - [k^2 q^2 - 2kq\mu_k\mu_q - \left(\frac{k\mu_k - q\mu_q}{\mu_k - \mu_q}\right)^2]^2}}$$

$$G^{+++} = 1 \text{ if } (2kq \sqrt{1-\mu_k^2} \sqrt{1-\mu_q^2})^2 - [k^2 q^2 - 2kq\mu_k\mu_q - \left(\frac{k\mu_k - q\mu_q}{\mu_k - \mu_q}\right)^2]^2 > 0 \text{ and } \frac{k\mu_k - q\mu_q}{\mu_k - \mu_q} > 0,$$

$$\text{and } G^{+-+} = 1 \text{ if } (2kq \sqrt{1-\mu_k^2} \sqrt{1-\mu_q^2})^2 - [k^2 q^2 - 2kq\mu_k\mu_q - \left(\frac{k\mu_k - q\mu_q}{\mu_k - \mu_q}\right)^2]^2 > 0 \text{ and }$$

$$\frac{k\mu_k - q\mu_q}{\mu_k - \mu_q} < 0, \text{ and both are zero otherwise.}$$

In deriving Eq. (3.3) the amplitudes of $\mathcal{E}^-(\vec{k})$ were assumed negligible, but the fact that the minus mode was present is reflected in the term G^{+-+} . This is a type of non-linear parametric amplification which was mentioned previously. For μ_k outside of the big part of the initial spectrum the resonance Fig. 4 applies. In this region for $k \sim q$ only G^{+++} is non-zero, and the sign of the right hand side of Eq. (3.3) is positive. Hence, for $\mu_k < \mu_q \approx 1$ and $k \sim q$ the amplitudes grow. However, as the right hand side of Eq. (3.3) is proportional to $\mathcal{E}^+(\vec{k})$, and \vec{k} is outside of the initial spectrum the rate is slow. For \vec{k} in the initial spectrum the resonance diagram of Fig. 5 is applicable and here the presence of the negative phase velocity wave is very important. In the regions denoted by the arrows (+), G^{+++} is one, and in the other regions G^{+-+} is one. For an initially narrow spectrum the sign of the right side of Eq. (3.3) can be determined and it can be seen from Fig. 5 and Eq. (3.3) that again, the spectrum damps for some $k_1 > k_0$, k_1 depending on μ_k , and damps for $k_2 < k_0$, the general tendency is to increase the amplitudes for small k and μ_k , and decrease the amplitudes for large k and μ_k . The integrals in Eq. (3.3) can be approximated and the rate is roughly proportional to the resonance area in Fig. 5, and therefore is slow.

Thus, we see that all terms in the resonant wave equation tend to broaden the spectrum and move it towards lower values of k and μ . For a narrow spectrum the rates are slow, but become larger as the spreading takes place, with a maximum time scale of order

$$\left[\omega_p \frac{\int dk \mathcal{E}(\vec{k})}{nKT} (k\lambda_D)^2 \right]^{-1}.$$

However, the total spectral energy is conserved by resonant scattering and the small non-resonant mode coupling processes, which are discussed in the next section, are required to thermalize the turbulence state.

IV. NON-RESONANT MODE COUPLING

In this section we consider some general properties of the non-resonant mode coupling terms. For the sake of simplicity we shall consider only the low temper-

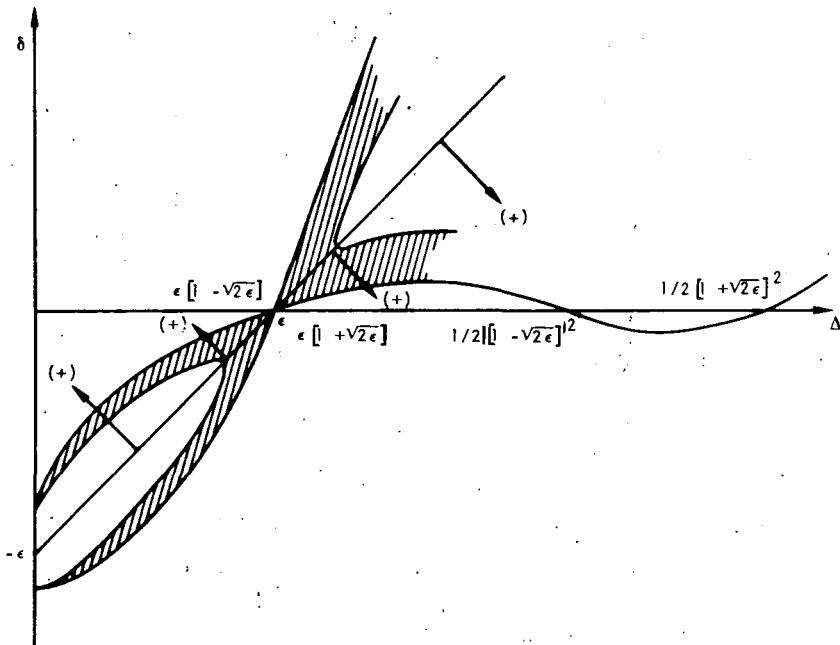


FIG. 5. Resonant region for positive phase velocity waves, $q = k(1 + \delta)$, $\mu_k = 1 - \epsilon$, $\mu_q = 1 - \Delta$, ϵ, δ, Δ small.

ature, long wavelength limit. In this limit

$$\frac{\partial |E_k|^2}{\partial t} = \frac{|E_k|^2}{\frac{\partial \epsilon(k, v_k)}{\partial v}} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1}{\lambda_D^2} \sum_q \frac{(k_{||} - q_{||})^2}{|k - q|^2} \frac{1}{k_{||}^2} \frac{1}{(v_k - v_{qk})^4} \frac{1}{((q\lambda_D)^2 \epsilon)^2} \\ \times \left\{ |W_e(-v_{qk})|^2 \text{Im } W_1(-v_{qk}) + |W_1(-v_{qk})|^2 \text{Im } W_e(-v_{qk}) \right\} |E_{qk}|^2 + \text{C.C.} \quad (5.1)$$

As discussed in Section III, the principal contribution to this comes from $v_{qk} \lesssim \bar{v}_1$ and in this region the electron damping term $\propto \text{Im } W_e(-v_{qk})$ can be neglected. To understand the terms we introduce the notation:

$$\vec{k} = \vec{q} - \vec{k}, \quad \mu_K = \frac{K_{||}}{K}, \quad x = \frac{v_{qk}}{\bar{v}_1} = \frac{\omega_p}{\bar{v}_1} \frac{(\mu_K + \mu_k)}{(K\mu_K + k\mu_k)}$$

$$\sum_K \rightarrow L^3 \int d^3 K = L^3 2\pi \int K^2 dK d\mu_K = L^3 2\pi \int K^2 dK \left(\frac{d\mu_K}{dx} \right) dx$$

$$\epsilon(k, v_k) = 1 - \frac{1}{(k\lambda_D)^2} \left[W_e(-v_k) + \frac{T_1}{T_e} W_k(-v_k) \right] \approx 1 - \left(\frac{k_{||}}{k} \right)^2 \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \text{ for } v_k \gg \bar{v}_e$$

$$\frac{\partial \epsilon(k, v_k)}{\partial v_k} \approx \frac{2}{v_k}, \quad \epsilon(q, v_{qk}) = 1 - \frac{1}{(q\lambda_D)^2} \left[W_e(-v_{qk}) + \frac{T_1}{T_e} W_1(-v_{qk}) \right]$$

Equation (5.1) thus becomes

$$\frac{\partial |E_k|^2}{\partial t} = -v_k \left(\frac{e}{m}\right)^2 \left(\frac{\omega_p}{v_0}\right)^2 \frac{1}{k^3 \mu_k} L^3 2\pi \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int K^2 dK$$

$$\times \int dx \frac{d\mu_K}{dx} \frac{\mu_K^2}{(v_k - v_{qk})^4} |E(K, \mu_K)|^2 \frac{x e^{-x^2/2}}{|(\epsilon \lambda_D)^2 \epsilon(q, v_{qk})|^2} \frac{q_{||}}{|q_{||}|} \quad (5.2)$$

For $\bar{v}_1 \rightarrow 0$, $\int dx \frac{q_{||}}{|q_{||}|} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx$ except for $\mu_k = 1$. In terms of x

$$\mu_k = -\mu_k \begin{pmatrix} 1 - \frac{k\bar{v}_0}{\omega_p} x \\ 1 - \frac{K\bar{v}_0}{\omega_p} x \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mu_K}{dx} = \mu_k \frac{\bar{v}_1}{\omega_p} \frac{(k-K)}{\left(1 - \frac{k\bar{v}_1}{\omega_p} x\right)^2}$$

so the integral in Eq. (5.2) can be written as

$$\mu_k^3 \bar{v}_1 \frac{(k-K)}{\omega_p} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\left(1 - \frac{k\bar{v}_0}{\omega_p} x\right)^2} \frac{1}{(v_k - x\bar{v}_1)^4} \frac{\left(1 - \frac{k\bar{v}_1}{\omega_p} x\right)^2}{\left(1 - \frac{K\bar{v}_1}{\omega_p} x\right)^2} \frac{x e^{-x^2/2}}{|(\epsilon \lambda_D)^2 \epsilon|^2} \\ \times \left| E \left[K, -\mu_k \frac{\left(1 - \frac{k\bar{v}_1}{\omega_p} x\right)}{\left(1 - \frac{K\bar{v}_1}{\omega_p} x\right)} \right] \right|^2 \quad (5.3)$$

In the limit of $\bar{v}_1 \rightarrow 0$ the integrand is an odd function of x and the integral vanishes.

Defining $H(x)$ by $\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{x e^{-x^2/2}}{|(\epsilon \lambda_D)^2 \epsilon|^2}$ expression (5.3) can be integrated by parts to yield

$$\mu_k^3 \bar{v}_1 \frac{(k-K)}{\omega_p} \int_{-\infty}^{\infty} dx H(x) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\left(1 - \frac{k\bar{v}_1}{\omega_p} x\right)^2}{\left(1 - \frac{K\bar{v}_1}{\omega_p} x\right)^4} \left| E \left[K, -\mu_k \frac{\left(1 - \frac{k\bar{v}_1}{\omega_p} x\right)}{\left(1 - \frac{K\bar{v}_1}{\omega_p} x\right)} \right] \right|^2 \right\} \quad (5.4)$$

Expanding the integrand to first order in \bar{v}_1 gives a non-vanishing contribution and we note that the entire expression (5.4) is thus of order \bar{v}_1^2 , which, when combined with the term $(1/\bar{v}_e^2)$ in (5.2) gives a factor of $(T_1/T_e)(m/M)$. To lowest order in \bar{v}_1^2 Eq. (5.2) thus becomes

$$\frac{\partial |E_k|^2}{\partial t} = |E_k|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\omega_p^3} \left(\frac{T_i}{T_e} \right) \left(\frac{m}{M} \right) \mu_k^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx H(x) \sum_K \left\{ 2(2K+k)(K-k) |E(K, \mu_k)|^2 \right. \\ \left. + (K-k)^2 \mu_k \frac{\partial |E(K, \mu_k)|^2}{\partial \mu_k} \right\} \quad (5.5)$$

where we have used $|E(K, -\mu_k)|^2 = |E(K, \mu_k)|^2$.

Thus although the non-resonant mode coupling terms depend on the details of the distribution there is a zero temperature limit provided only that (T_i/T_e) exists. This limit is of interest whenever $|E(K, \mu_K)|^2$ varies slowly in a range of $\Delta \mu_K$ given by $|K-k| \bar{v}_1 / \omega_p$.

For $\mu_k = 1$, $\frac{\partial |E_k|^2}{\partial t} = -1/\bar{v}_1 Q$ where Q is positive so that $|E_k|^2$ goes to zero for $\mu_k = 1$ as $\bar{v}_1 \rightarrow 0$.

If we define $N_K = |E_k|^2 / |\mu_k|$ it follows directly from Eq. (5.4) that $\frac{\partial}{\partial t} \sum_K N_K = 0$, so that the total number of "quasi-particles", N_K is conserved, a result obtained earlier in Ref. 6. The total rate of energy loss is also computed directly to be

$$\sum_k \frac{\partial |E_k|^2}{\partial t} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\omega_p^3} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \left(\frac{T_i}{T_e} \right) \left(\frac{m}{M} \right) \int_{-\infty}^{\infty} H(x) dx \sum_{KK} |K-k|^2 \delta(\mu_K + \mu_k) \mu_k^2 |E_k|^2 |E_K|^2 \quad (5.6)$$

We note that the rate of change of $|E_k|^2$ due to non-resonant mode coupling is smaller by a factor of (m/M) than the resonant mode coupling terms. Thus the non-resonant mode coupling terms can be neglected in calculating the evolution of the spectrum except that they are necessary for the damping of the total energy, i.e., the resonant mode coupling determines the shape of the spectrum in k, μ_k space and the non-resonant mode coupling merely provides a uniform damping of the entire spectrum. The rate of this damping is given by Eq. (5.6).

In many problems of interest resonant mode coupling cannot occur, e.g., Langmuir oscillations in the absence of a magnetic field. In this case the shape of the spectrum as well as the damping is controlled by the non-resonant mode coupling. We shall here investigate some of the general properties of the solutions of Eq. (5.4). In particular, we wish to investigate the angular dependence which results. Summing Eq. (5.4) over $|k|$ gives yields

$$\frac{\partial \epsilon(\mu)}{\partial t} = \alpha \mu_k^2 \epsilon^2(\mu) + \alpha \mu_k^3 \epsilon(\mu) \frac{\partial \epsilon(\mu)}{\partial \mu} \quad (5.7)$$

where

$$\epsilon(\mu) = \sum_{|k|} |E_k|^2, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\Delta k)^2 \frac{1}{\omega_p^3} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \left(\frac{T_i}{T_e} \right) \left(\frac{m}{M} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx H(x)$$

$$(\Delta k)^2 = \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{|K|, |k|} |E_k|^2 |E_K|^2 (K-k)^2$$

Letting $\psi = \mu \epsilon$ Eq. (5.6) becomes

$$\frac{\partial \psi(\mu, t)}{\partial t} - \alpha \mu^2 \psi \frac{\partial \psi}{\partial \mu} = 0 \quad (5.8)$$

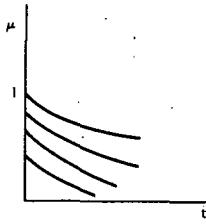


FIG. 6a. Characteristics for
 $\psi(\mu, 0)$ monotonically decreasing

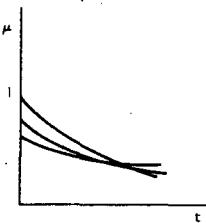


FIG. 6b. Characteristics for
 $\psi(\mu, 0)$ increasing.

Thus $\psi(\mu, t)$ is constant along the characteristics given by

$$\frac{d\mu}{dt} = - \alpha \mu^2 \psi(\mu, 0)$$

This is illustrated in Fig. 6a.

In Fig. 6a the characteristics are plotted assuming that $\psi(\mu, 0)$ is a decreasing function of μ . If $\psi(\mu)$ is an increasing function of μ the characteristics will cross and since ψ has a different value on each characteristic the solution breaks down. This is pictured in Fig. 6b. (Actually the first crossings take place at $t = 0$.) This is easy to understand in terms of the integral in (5.2). As two characteristics carrying different values of ψ approach each other $\partial\psi/\partial\mu$ increases so that $\psi(\mu)$ varies so rapidly that the $\vec{v}_1 \rightarrow 0$ approximation which leads to Eq. (5.5) breaks down. This is similar to the situation in hydrodynamics in which the crossing of characteristics indicates the formation of shock waves. Returning to (5.4) we note that if $|E_K|^2$ is a steep function of μ we need only consider the term involving $\frac{\partial}{\partial x} |E(K, \mu_K)|^2$. Inserting this in Eq. (5.2) and again assuming the K and μ dependences are separable we obtain

$$\frac{1}{\mathcal{E}(\mu t)} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{\alpha \mu_K^3}{\int_{-\infty}^{\infty} H(x) dx} \int_{-\infty}^{\infty} dx H(x) \frac{\partial |E(\mu_K)|^2}{\partial \mu_K} \quad (5.9)$$

If a shock front exists then locally we can write $\mathcal{E}(\mu, t) = \mathcal{E}(\mu - Ut)$ where U is the shock velocity. Inserting this in Eq. (5.9) and integrating over the shock front we have

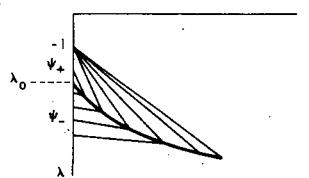


FIG. 7. Time development of spectra with shock trajectory (heavy line) separating regions of continuous spectra.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial t} d\mu_k &= -U \int \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial \mu} d\mu_k = -U \ln \frac{e_+}{e_-} = \int d\mu_k \frac{\alpha \mu_k^3}{\int H dx} \int dx H(x) \frac{\partial e}{\partial \mu_k} \\ &= \iint d\mu_k \left(\frac{d\mu_k}{dx} \right) dx \frac{\alpha \mu_k^3}{\int H dx} \frac{dx}{d\mu_k} H(x) \frac{\partial e}{\partial \mu_k} = \int dx \frac{\alpha \mu_k^3}{\int H dx} H(x) \int d\mu \frac{\partial e}{\partial \mu} = \alpha \mu_k^3 (e_+ - e_-) \end{aligned}$$

where e_+ and e_- are the values of e immediately behind and in front of the shock. The shock velocity is thus given by

$$U = -\alpha \mu_k^3 \frac{(e_+ - e_-)}{\ln \frac{e_+}{e_-}} = -\alpha \mu_k^2 \frac{(\psi_+ - \psi_-)}{\ln \frac{\psi_+}{\psi_-}} \quad (5.10)$$

For $\frac{\psi_+ - \psi_-}{\psi_-} \ll 1$ we obtain $U = -\alpha \mu_k^2 \frac{(\psi_+ + \psi_-)}{2}$ and the shock velocity is just the average of the characteristic velocities ahead of and behind the shock. In order to illustrate the behavior of the solution we change to a straight coordinate system. Letting $\lambda = -1/\mu$ the differential equation (5.8) becomes

$$\frac{\partial \psi(\lambda, t)}{\partial t} - \alpha \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0$$

which has straight characteristics given by $d\lambda/dt = -\alpha \psi(\lambda, 0)$ and the shock velocity is

$$U = -\alpha \frac{(\psi_+ - \psi_-)}{\ln \frac{\psi_+}{\psi_-}}.$$

A typical solution is shown in Fig. 7.

The initial data is taken to be ψ_+ , a constant, for $\lambda_0 < \lambda < 1$ and equal to ψ_- for $\lambda < \lambda_0$. The characteristics leaving from $\psi = \psi_+$ have slope $-\alpha \psi_+$ and those leaving from $\psi = \psi_-$ have slope $-\alpha \psi_-$. For $t > 0$ a shock forms whose trajectory has a slope

$$-\alpha \frac{(\psi_+ - \psi_-)}{\ln \frac{\psi_+}{\psi_-}}. \quad \text{This is shown as the heavy curve in Fig. 7. The spectrum is thus}$$

divided into two regions of continuous spectra separated by the shock trajectory, across which the value of ψ jumps. The centered rarefaction fan starting from

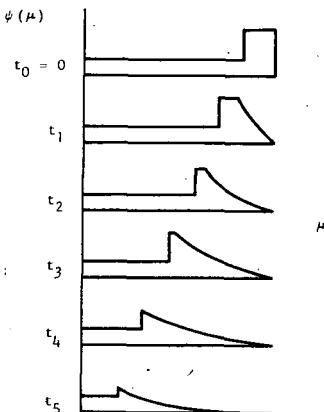


FIG. 8. Spectrum as a function of μ for different times.

$\lambda = -1$ comes from the rapid decay at $\mu_k = 1$ and for late time this slows the shock front. The time development of the spectrum is illustrated in Fig. 8.

In the weak shock limit the characteristics and shock trajectory can be found analytically and thus the time development of the spectrum can be easily evaluated. For strong shocks where Eq. (5.10) must be used the behavior is analytically more difficult but the same general features occur. It should be noted, that for very strong shock $U \rightarrow 0$ and again an approximate solution can be easily obtained.

In this section we have discussed only the long wavelength or low temperature approximation and this requires

$$(k\lambda_D)^4 \ll \frac{m}{M} \text{ or that } \frac{\omega_p}{k} \ll \bar{v}_e \sqrt{\frac{m}{M}}.$$

Thus the phase velocity must be larger than the thermal velocity by a factor of approximately 10. If this is not the case, the electrons play an important role but the general behavior is quite similar.

Another important exception occurs when the wave spectrum is peaked about $\mu = 1$ and is narrow compared to $k\bar{v}_e/\omega_p$ but broad compared to $k\bar{v}_e/\omega_p$. In this case the electron terms are only smaller by a factor of $k\lambda_D$ than the resonant mode coupling terms. This means that for early times the shape of the spectrum depends somewhat on the non-resonant mode coupling terms.

Finally it should be noted that the non-resonant mode coupling of waves which are going in opposite directions is not explicitly included in the above results. This can be easily included and leads to virtually the same results.

VI. DISCUSSION

From the foregoing we see that the evolution of the turbulence spectrum and the associated anomalous diffusion can be obtained in a direct way from the non-linear Vlasov equation. Unfortunately, the turbulence spectrum must be calculated separately for each type of instability and it appears that the turbulent spectrum cannot be obtained by simple dimensional arguments.

A simplifying feature is that to second order in the energy the turbulent spectrum is uninfluenced by the concomitant diffusion of the distribution function and conversely the diffusion coefficient depends simply on the spectrum rather than its time history. Such quantities as the dynamical friction or drag can thus be obtained explicitly in terms of the spectrum.

This project was sponsored in part by the Advanced Research Projects Agency, Department of Defense, as part of Project DEFENDER, and the Defense Atomic Support Agency, monitored by Air Force Weapons Laboratory, Kirtland Air Force Base, New Mexico, Research and Technology Division, Air Force Systems Command, United States Air Force, under Contract No. AF29(601)-6366, and in part by the Air Force Office of Scientific Research of the office of Aerospace Research, under Contract No. AF49(638)-1546.

REFERENCES

- [1] LANDAU, L., *J. Phys.* 10, 45 (1946).
- [2] DRUMMOND, W. E. and PINES, D., *Nucl. Fusion 1962 Suppl. Part 3*, 1049 (1962).
- [3] VEDENOV, A. A., VELOKHOV, E. P., and SAGDEEV, R. Z., *Nucl. Fusion Supp. Part 2*, 465 (1962).
- [4] DRUMMOND, D. and PINES, D., *Ann. of Phys.* 28, 3, 478 (1964).
- [5] DRUMMOND, W. E. and AAMODT, R. E., *Phys. Fluids*, 7, 1861 (1964).
- [6] GALEEV, A. A., KARPMAN, V. I., and SAGDEEV, R. Z., *USSR (Doklady)* 157, 1088 (1964).
- [7] KADOMTSEV, B. B., *Plasma Turbulence*, Academic Press, New York (1965).
- [8] DRUMMOND, W. E., and ROSENBLUTH, M. N., *Phys. Fluids* 5, 1507 (1962).

DISCUSSION

R. M. KULSRUD: Was the calculation one-dimensional?

R. E. AAMODT: Yes, it was. If there is a magnetic field, one can consider the problem to be one-dimensional.

R. M. KULSRUD: How large a magnetic field is necessary to make this valid?

R. E. AAMODT: I do not know.

R. M. KULSRUD: Is there linear Landau damping in three dimensions?

R. E. AAMODT: Yes, but its magnitude relative to mode coupling is uncertain.

C. OBERMAN: What units are used on the time scale?

R. E. AAMODT: $\tau \sim [(\alpha \omega_p / nkT) / \xi(k) dk]^{-1}$

SPECIAL CONTRIBUTION TO THE THEORY OF TRANSFER PROCESSES IN A WEAKLY TURBULENT PLASMA

R. RAMAZASHVILI AND N. TSINTSADZE

Investigations of the kinetic properties of a turbulent plasma have recently increased. It has been shown in a number of works that fluctuating

electric fields in a plasma lead to an abnormally strong diffusion of particles across the magnetic field. Employing the convenient concept of "collision frequencies", one can say that turbulence leads to an effective increase in the frequency of ion-electron collisions. It is natural to assume that these effective collisions will have a substantial effect not only on the diffusion of particles across the magnetic field, but also on other kinetic processes in the turbulent plasma.

We have investigated transfer processes in a weakly turbulent plasma with quasi-stationary uniform turbulence. The oscillations are assumed to be potential. Given these conditions, only low-frequency oscillations involving electrons and ions make a substantial contribution to the kinetic coefficients. In this case the ions are treated non-linearly, whereas the electrons are treated quasi-linearly. Also, the force of turbulent friction and the work performed by this force are equal and of opposite sign for electrons and ions.

Expressions are found for the effective frequencies of the turbulent collisions along ($\nu_{||}^t$) and across (ν_{\perp}^t) the magnetic field; these expressions are determined with the help of expansions of the turbulence function:

$$\nu_{\perp}^t = (\pi / sm_e)^{1/2} e^2 T_e^{-3/2} \int dk \vec{\phi}_k^2 k_z^2 / |k_z|$$

$$\nu_{||}^t = (\pi / sm_e)^{1/2} e^2 T_e^{-3/2} \int dk \vec{\phi}_k^2 |k_z|$$

where $\vec{\phi}_k = -\vec{k} \cdot \vec{E}_k / k^2$.

In a number of cases the turbulent collision frequency may be several times larger than the frequency of normal coulomb collisions (ν_c). For example, let us consider the Drummond-Rosenbluth instability; the effective turbulent collision frequency is of the order $\nu_{\perp}^t \sim 0.1 \Omega_e = 0.1 eB/m_ec$. It is clear that in strong magnetic fields and in a low-density plasma $\nu^t \gg \nu_c$. It can be shown that this inequality may in certain conditions also be satisfied for other types of instability.

We obtain general expressions for the transfer coefficients, from which it follows that for $\nu^t \gg \nu_c$ the turbulence has a substantial effect on the plasma kinetics. For example, the longitudinal thermal flux in a turbulent plasma is less than the thermal flux in a non-turbulent plasma, whereas the transverse thermal flux decreases if $\Omega_1 < \nu_{\perp}^t$ and increases if $\Omega_1 > \nu_{\perp}^t$.

COLLISIONAL AND ANOMALOUS DIFFUSION

O.C. ELDRIDGE AND E.G. HARRIS

UNIVERSITY OF TENNESSEE,

KNOXVILLE, TENN., UNITED STATES OF AMERICA

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

COLLISIONAL AND ANOMALOUS DIFFUSION. The diffusion coefficients for the transport of a plasma across a magnetic field are calculated directly from the motion of test particles. The method is sufficiently general to describe anomalous diffusion as well as collisional diffusion. A consistent perturbation theory is developed for calculating particle orbits, in which secular terms are eliminated. These secular terms, quantities that increase linearly with time, appear when conventional perturbation theory is applied to the orbits and invalidates the basis of the theory.

The spatial diffusion coefficient is found to be directly related to the diffusion in velocity space. An equation is developed which describes the diffusion in phase space, both spatial and velocity diffusion. The diffusion coefficients are derived for an arbitrary spectrum of fluctuations of the electric field. The electric field is assumed to be longitudinal, but no restrictions are imposed on its frequency or wavelength.

The same diffusion coefficients are derived from a simpler model which is based on the Langevin equation for a particle in a magnetic field. In contrast to the usual treatment, correlations between the particle and the fluctuating electric field are included in the calculation. The comparison of the two models makes clearer the relationships between previous calculations of the diffusion coefficient.

When the collisional diffusion coefficient is evaluated by assuming a thermal spectrum for the electric field, the classical result is obtained with the coefficient varying as the inverse square of the magnetic field.

A new long wavelength divergence appears in spite of the Debye shielding which is automatically included. This logarithmic divergence is interpreted as the result of the drift across field lines of pairs of particles with opposite charge. The driving force is the electric field between the two particles.

DIFFUSION COLLISIONNELLE ET DIFFUSION ANORMALE. Les auteurs calculent directement les coefficients de diffusion pour le transport de plasma à travers un champ magnétique en se fondant sur le mouvement de particules test. Cette méthode a un caractère assez général pour décrire la diffusion anormale aussi bien que la diffusion collisionnelle. Les auteurs ont mis au point une nouvelle théorie des perturbations pour le calcul des orbites de particules, dans laquelle les termes séculaires sont éliminés. Ces termes séculaires sont des quantités qui augmentent linéairement en fonction du temps et apparaissent lorsqu'on applique aux orbites la théorie classique des perturbations; ils remettent en cause les bases de cette théorie.

Les auteurs ont trouvé que le coefficient de diffusion spatial est directement en rapport avec la diffusion dans l'espace des vitesses. Ils ont établi une équation qui décrit tant la diffusion spatiale que la diffusion des vitesses dans l'espace des phases. Ils ont calculé les coefficients de diffusion pour un spectre arbitraire de fluctuations du champ électrique. Ils supposent que le champ électrique est longitudinal, mais que sa fréquence ou sa longueur d'onde ne sont pas limitées.

Ils ont calculé les mêmes coefficients de diffusion d'après un modèle plus simple fondé sur l'équation de Langevin pour une particule dans un champ magnétique. Contrairement à la pratique habituelle, ils ont fait figurer dans le calcul les corrélations entre la particule et le champ électrique fluctuant. La comparaison des deux modèles fait mieux comprendre les rapports entre les calculs antérieurs des coefficients de diffusion.

Lorsqu'on évalue le coefficient de diffusion collisionnelle en supposant un spectre thermique pour le champ électrique, on obtient le résultat classique dans lequel le coefficient varie en raison inverse du carré du champ magnétique.

Une nouvelle divergence de grande longueur d'onde apparaît malgré l'effet d'écran de Debye, qui y est automatiquement inclus. Les auteurs interprètent cette divergence logarithmique comme le résultat de la dérive à travers les lignes du champ de paires de particules à charges opposées. La force motrice est le champ électrique entre les deux particules.

СТОЛКНОВИТЕЛЬНАЯ И АНОМАЛЬНАЯ ДИФФУЗИЯ. Коэффициенты диффузии для переноса плазмы через магнитное поле вычисляются непосредственно из движения пробных частиц. Данный метод имеет достаточную общность, чтобы описывать аномальную диффузию, так же, как и столкновительную. Для расчета орбит частиц разработана последовательная теория возмущений, в которой устранены секулярные члены. Эти секулярные члены, представляющие собой величины, линейно растущие со временем, появляются, когда применяется обычная теория возмущений и делают недействительной основу этой теории.

Установлено, что коэффициент пространственной диффузии непосредственно связан с диффузией в пространстве скоростей. Разработана формула, которая описывает диффузию в фазовом пространстве — как пространственную и скоростьную диффузию. Коэффициенты диффузии получены для произвольного спектра флуктуаций электрического поля. Предполагается, что электрическое поле продольное, но не накладывается никаких ограничений на его частоту или длину волны.

Те же самые коэффициенты диффузии получены из более простой модели, основанной на уравнении Ланжевена для частицы в магнитном поле. В противоположность обычному подходу в расчетах включена корреляция между частицей и флуктуирующими электрическим полем. Сравнение двух моделей делает более отчетливой связь между прежними расчетами коэффициента диффузии.

Когда коэффициент столкновительной диффузии оценивается в предположении теплового спектра для электрического поля, получается классический результат с коэффициентом, изменяющимся как обратный квадрат магнитного поля.

Несмотря на экранировку Дебая, учтенную автоматически, появляется новая длинноволновая расходимость. Эта логарифмическая расходимость интерпретируется как результат дрейфа через силовые линии поля пар частиц с противоположным зарядом. Движущей силой является электрическое поле между двумя частицами.

DIFUSION POR COLISIONES Y DIFUSION ANOMALA. Los autores calculan directamente los coeficientes de difusión correspondientes al transporte de un plasma a través de un campo magnético basándose en el movimiento de partículas de ensayo. El método posee un carácter suficientemente general para describir tanto la difusión anómala como la difusión por colisiones. Han perfeccionado una nueva teoría coherente de las perturbaciones destinada a calcular órbitas de partículas, en la cual se eliminan los términos seculares. Estos términos seculares son cantidades que aumentan linealmente en función del tiempo y aparecen cuando se aplica la teoría clásica de las perturbaciones a las órbitas; se caracterizan por invalidar las bases de la teoría.

Los autores han comprobado que el coeficiente de difusión espacial guarda una relación directa con la difusión en el espacio de las velocidades. Deducen una ecuación que describe tanto la difusión espacial como la difusión de las velocidades en el espacio de las fases. Han calculado los coeficientes de difusión para un espectro arbitrario de fluctuaciones del campo eléctrico, suponiendo que el campo eléctrico es longitudinal, pero no imponen restricciones a su frecuencia ni a su longitud de onda.

Además, han calculado los mismos coeficientes de difusión con arreglo a un modelo más simple, basado en la ecuación de Langevin para una partícula situada en un campo magnético. A diferencia del procedimiento habitual, incluyen en el cálculo las correlaciones entre la partícula y el campo eléctrico fluctuante. La comparación entre los dos modelos aclara las relaciones entre cálculos anteriores del coeficiente de difusión.

Cuando se evalúa el coeficiente de difusión por colisiones suponiendo un espectro térmico para el campo eléctrico, se obtiene el resultado clásico según el cual el coeficiente varía en proporción inversa al cuadrado del campo magnético.

Pese al blindaje de Debye, incluido automáticamente, aparece una nueva divergencia de gran longitud de onda. Los autores interpretan esta divergencia logarítmica como resultado de la deriva de pares de partículas con cargas opuestas a través de las líneas del campo. La fuerza que las impulsa es el campo eléctrico entre las dos partículas.

1. Introduction

The diffusion of a plasma across a magnetic field has been approached from at least three reasonably distinct viewpoints. From the consideration of binary collisions of the particles of the plasma a collisional diffusion coefficient has been calculated which is inversely proportional to the square of the magnetic field B . Examples of calculations of this type are the papers of Longmire and Rosenbluth [1] and Rosenbluth and Kaufman [2]. The collective behavior of the plasma was neglected in these papers. From the model of the Brownian motion which is based on the Langevin equation Taylor [3, 4] has derived a

diffusion coefficient which depends on the coefficient of dynamic friction. He explicitly neglected correlations between particles and the fluctuating electric field, except for those correlations responsible for the dynamic friction. With an appropriate choice of the friction coefficient the collisional diffusion coefficient was derived. However Taylor noted that the maximum diffusion possible by this method was the anomalous diffusion predicted by Bohm [5]. Bohm suggested that in some cases the diffusion coefficient is proportional to B^{-1} . In the third approach to the problem the diffusion has been calculated in terms of the autocorrelation function of the fluctuating electric field. If the plasma is unstable the field fluctuations may become very large and this in turn leads to a large increase in the diffusion. The autocorrelation function has not been calculated in general, but depends on the kind of instability present. Spitzer [6] has derived an anomalous diffusion coefficient proportional to B^{-1} . His calculation was based on some plausible but unproved assumptions about the spectrum of fluctuations.

To our knowledge, the only calculation of an anomalous diffusion coefficient which is free of arbitrary assumption is that of Drummond and Rosenbluth [7]. They consider an unstable plasma, calculate the spectrum of fluctuations, and from this derive a diffusion coefficient that turns out to be proportional to B^{-1} , but small compared to the Bohm diffusion. They calculate the field spectrum by using the quasi-linear theory in which the energy fed into field fluctuations is small. Rostoker [8] has obtained a general expression for diffusion and Taylor [9] has derived the collisional diffusion coefficient in terms of the field spectrum.

The calculation presented here is related to the papers of this group in that the diffusion coefficient is calculated in terms of the spectrum of fluctuations. However, the basis of our calculation is the Langevin equation. A simplifying assumption made by Spitzer [6] and by Drummond and Rosenbluth [7] is not made in our work. Since they were considering low frequencies and long wavelengths of the electric field they assumed that the drift velocity was given by cE/B , where E is the fluctuating electric field. For wavelengths comparable to the radius of gyration or frequencies comparable to the cyclotron frequency this assumption is not justified.

In section 2 we give a derivation of the diffusion coefficient based on the Langevin equation. The result, given by Eq. (14), depends on correlations between the particle orbit and the electric field, and also on the friction coefficient β . We find that there are contributions to the diffusion coefficient that vanish when β is set equal to zero, but there are other contributions which do not. The result is devoid of content until the correlation functions have been evaluated. As in previous calculations the evaluation is accomplished by using the unperturbed orbits of the particles in the magnetic field. This amounts to an assumption that the electric field is small and constitutes the most severe limitation of the theory.

In section 3 we confirm the results of the simple Langevin theory by developing a perturbation theory in which secular terms in the orbits of test particles are systematically eliminated. The resulting diffusion coefficients are the Langevin equation, but the method allows us to write an equation in which velocity diffusion and spatial diffusion are both included.

In section 4 we evaluate the diffusion coefficient for some simple cases. When we calculate collisional diffusion we find that the coefficient is divergent at long wavelengths in spite of the Debye screening which is automatically included. We investigate the origin of the divergence and find a cutoff procedure which yields a collisional diffusion coefficient quite similar to the classical result.

2. A Theory of Diffusion Based on the Langevin Equation

We shall consider the motion of a test particle which is described by the Langevin equation [3, 4, 10, 11]:

$$\frac{dv}{dt} = -\vec{\beta} \cdot \vec{v} + \vec{v} \times \vec{\Omega}_0 + \vec{A}. \quad (1)$$

The first term on the right hand side is a frictional force which is assumed to be proportional to the velocity. The second term is the force due to the magnetic field. The vector

Ω_0 has the magnitude eB/mc , where e and m are the charge and mass of the test particle; and the direction of the magnetic field, which is taken to be the z direction. The third term is a fluctuating acceleration, proportional to the incoherent electric field. The frictional term β is in general velocity dependent; in this section we will assume it to be constant and diagonal with the diagonal components (β_{\perp} , β_{\perp} , β_z). For test particles with a velocity less than the mean velocity of the background plasma this approximation is quite good. Equation (1) can now be decomposed into

$$\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \beta_{\perp}\vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\perp} \times \vec{\Omega}_0 + \vec{A}_{\perp}, \quad (2)$$

and

$$\frac{dv_z}{dt} = -\beta_z v_z + A_z, \quad (3)$$

where \vec{v}_{\perp} represents the components of the velocity perpendicular to B .

Now we take the scalar product of Eq. 2 with \vec{v}_{\perp} and find

$$\frac{d}{dt} (v_{\perp}^2/2) = -\beta_{\perp} v_{\perp}^2 + \vec{v}_{\perp} \cdot \vec{A}_{\perp}. \quad (4)$$

We average this equation over an ensemble of test particles to obtain

$$\frac{d}{dt} \langle v_{\perp}^2/2 \rangle = -\beta_{\perp} \langle v_{\perp}^2 \rangle + \langle \vec{v}_{\perp} \cdot \vec{A}_{\perp} \rangle, \quad (5)$$

Where the angular brackets denote an ensemble average. In a similar manner we find

$$\frac{d}{dt} \langle v_z^2/2 \rangle = -\beta_z \langle v_z^2 \rangle + \langle v_z A_z \rangle. \quad (6)$$

Three other equations may be obtained by multiplying by \vec{x} and z where $\vec{x} = (\vec{x}_{\perp}, z)$ is the position vector of the test particle:

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle x_{\perp}^2/2 \rangle = \langle v_{\perp}^2 \rangle - \beta_{\perp} \frac{d}{dt} \langle \frac{x_{\perp}^2}{2} \rangle + \langle \vec{x}_{\perp} \times \vec{v}_{\perp} \rangle \cdot \vec{\Omega}_0 + \langle \vec{x}_{\perp} \cdot \vec{A}_{\perp} \rangle, \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{x}_{\perp} \times \vec{v}_{\perp} \rangle \cdot \vec{\Omega}_0 = -\beta_{\perp} \langle \vec{x}_{\perp} \times \vec{v}_{\perp} \rangle \cdot \vec{\Omega}_0 - \Omega_0^2 \frac{d}{dt} \langle x_{\perp}^2/2 \rangle + \langle \vec{x}_{\perp} \times \vec{A}_{\perp} \rangle \cdot \vec{\Omega}_0, \quad (8)$$

and

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle z^2/2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle - \beta_z \frac{d}{dt} \langle z^2/2 \rangle + \langle z A_z \rangle. \quad (9)$$

The usual theory of Brownian motion may be based on Eqs. (6) and (9). It is argued that after a long time $\langle v_z^2 \rangle$ approaches its equilibrium value of θ/m , determined by the background. This implies that there is a correlation between test particle velocity and the fluctuating force so that asymptotically

$$\langle v_z A_z \rangle^{as} = \beta_z \langle v_z^2 \rangle^{as} = \beta_z \frac{\theta}{m}. \quad (10)$$

Usually it is assumed that the correlation between test particle position and the fluctuating force is zero. Equation (9) can then be solved to yield

$$\langle z^2 \rangle^{as} = \frac{2\theta}{m\beta_z} t = 2 \langle D_z \text{ (gas)} \rangle t. \quad (11)$$

We know however that this correlation is not zero in a plasma. If we assume that $\frac{d}{dt} \langle z^2 \rangle$ approaches a constant asymptotically, we find

$$\frac{d}{dt} \langle z^2/2 \rangle^{as} = \langle D_z (\text{plasma}) \rangle = \frac{\langle v_z^2 \rangle^{as} + \langle z A_z \rangle^{as}}{\beta_z}. \quad (12)$$

Equations (5), (7) and (8) can be treated in an analogous manner. If it is assumed that asymptotically $\langle v_\perp^2 \rangle$, $\frac{d}{dt} \langle x_\perp^2 \rangle$, and $\langle \vec{x}_\perp \cdot \vec{v}_\perp \rangle \cdot \vec{\Omega}_0$ approach constant values these equations can be solved to obtain

$$\langle v_\perp \cdot A_\perp \rangle^{as} = \beta_\perp \langle v_\perp^2 \rangle^{as}, \quad (13)$$

and

$$2\langle D_\perp (\text{plasma}) \rangle = \frac{d}{dt} \langle x_\perp^2/2 \rangle^{as} = \frac{\beta_\perp}{\beta_\perp^2 + \Omega_0} [\langle v_\perp^2 \rangle^{as} + \langle x_\perp \cdot A_\perp \rangle^{as}] + \frac{\langle \vec{x}_\perp \cdot \vec{A}_\perp \rangle^{as} \cdot \vec{\Omega}_0}{\beta_\perp^2 + \Omega_0^2} \quad (14)$$

If the correlation terms in this equation are neglected, one obtains a standard result in the form given by Taylor [3, 4]:

$$\langle D_\perp (\text{gas}) \rangle = \frac{\beta_\perp}{m(\beta_\perp^2 + \Omega_0^2)} \quad (15)$$

He noted that the Bohm diffusion coefficient is the maximum possible value of this expression as the friction term is varied. We will find that this contribution is canceled by the other correlation terms of Eq. (14) and that the diffusion is due entirely to the correlations between the test particle position and the electric field.

2.1 Calculation of the Correlation Functions

In order to compute the correlations we must make some assumptions about the fluctuating acceleration \vec{A} . First we assume it is due to a superposition of electrostatic waves in the plasma:

$$\vec{A}(t) = \frac{e}{m} \vec{E}(\vec{x}(t), t) = \frac{e}{m} \vec{E}(t) = \frac{e}{m} \int \frac{d^3 k d\Omega}{(2\pi)^4} \vec{E}(\vec{k}, \Omega) e^{i[\vec{k} \cdot \vec{x}(t) - \Omega t]} \quad (16)$$

We shall take $\vec{x}(t)$ in the argument of the electric field to be the unperturbed orbit of the test particle in the magnetic field. This implies that the terms $\vec{\beta} \cdot \vec{v}$ and \vec{A} in Eq. (1) are small. We introduce the one sided Fourier transform

$$\vec{\xi}(\omega) = \int_0^\infty dt e^{-i\omega t} \vec{E}(t), \quad (17)$$

and similar transforms for $\vec{x}(t)$ and $\vec{v}(t)$. Then the solution of Eq. (1) may be written.

$$v_i(\omega) = \sigma_{ij}(\omega) \xi_j(\omega) \quad (18)$$

where the summation convention is used, and

$$x_i(\omega) = \frac{v_i(\omega)}{i\omega} \quad (19)$$

We have dropped the initial values, since they damp away. The components of the matrix σ_{ij} are

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{e}{m} \frac{i(\omega - i\beta_z)}{\Omega_0^2 - (\omega - i\beta_z)^2}, \quad (20)$$

$$\sigma_{33} = \frac{e}{m} \frac{1}{i(\omega - i\beta_z)}, \quad (21)$$

$$\sigma_{12} = -\sigma_{21} = \frac{e}{m} \frac{\Omega_0}{\Omega_0^2 - (\omega - i\beta_z)^2}, \quad (22)$$

$$\text{and } \sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0. \quad (23)$$

It is also convenient to write

$$\vec{E}(\vec{\omega}) = \int \frac{d^3 k d\Omega}{(2\pi)^4} \vec{E}(\vec{k}, \Omega) G(\vec{k}, \Omega, \omega), \quad (24)$$

where

$$G(\vec{k}, \Omega, \omega) = \int_0^\infty dt e^{-i\omega t} e^{i[\vec{k} \cdot \vec{x}_0(t) - \Omega t]} \quad (25)$$

At this point we must make some assumption about the statistical properties of the fields. We shall assume that

$$\langle E_\ell(\vec{k}, \Omega) E_m(\vec{k}', \Omega') \rangle = (2\pi)^4 S(\vec{k}, \Omega) \frac{k_\ell k_m}{k^2} \delta^3(\vec{k} + \vec{k}') \delta(\Omega + \Omega'). \quad (26)$$

This equation states that the field is electrostatic and that the fluctuations are stationary in space and time, which implies that the background plasma is spatially uniform. We show in the appendix that the spectrum takes this form if the fields are produced by uncorrelated dressed test particles. We also assume that the spectral density $S(k, \omega)$ is independent of the azimuthal angle in k -space:

$$S(\vec{k}, \Omega) = S(k_\perp, k_z, \Omega).$$

where $k_x = k_\perp \cos \alpha$,

$$k_y = k_\perp \sin \alpha. \quad (27)$$

This implies that the distribution of the velocities of the background plasma is azimuthally symmetric.

We shall now calculate $\langle v_i(t) v_j(t) \rangle$. Using Eqs. (18) and (24) we find

$$\begin{aligned} \langle v_i(t) v_j(t) \rangle &= \langle \int \frac{d\omega'}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3 k d\Omega}{(2\pi)^4} \frac{k_\ell k_m}{k^2} S(\vec{k}, \Omega) e^{i(\omega+\omega')t} \sigma_{i\ell}(\omega) \sigma_{jm}(\omega') \\ &\times G(\vec{k}, \Omega, \omega) G(-\vec{k}, -\Omega, \omega') \rangle. \end{aligned} \quad (28)$$

We take the remaining ensemble average to be an average over a distribution of test particles specified by a distribution function $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$. Now we evaluate

$$G(\vec{k}, \Omega, \omega) G(-\vec{k}, -\Omega, \omega') = \int_0^\infty dt e^{-i\omega t} \int_0^\infty dt' e^{-i\omega' t'} e^{i\Omega(t-t')} e^{i\vec{k} \cdot [\vec{x}_0(t) - \vec{x}_0(t')]}, \quad (29)$$

Where $\vec{x}_0(t)$ represents the zero-order orbit of a test particle:

$$x_0(t) = x_0(0) + \frac{v_{\perp}}{\Omega} [\sin \Phi - \sin(\Phi - \Omega_0 t)],$$

$$y_0(t) = y_0(0) - \frac{v_{\perp}}{\Omega} [\cos \Phi - \cos(\Phi - \Omega_0 t)],$$

and $z_0(t) = z_0(0) + wt.$ (30)

Here $v_{\perp} \cos \Phi$, $v_{\perp} \sin \Phi$, and w are the initial values of the test particle velocity. By using the relation

$$e^{i\alpha \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(a) e^{in\theta}, \quad (31)$$

one can average Eq. (29) over the azimuthal angle α and obtain

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} G(\mathbf{k}, \Omega, \omega) G(-\mathbf{k}, -\Omega, \omega') = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2 \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\Omega_0} \right) \frac{1}{(\omega - \gamma_n)(\omega' + \gamma_n)} \quad (32)$$

where $\gamma_n = k_z w + m \Omega_0 - \Omega.$ (33)

This may be used in Eq. (28) to obtain

$$\begin{aligned} \langle v_i(t) v_j(t) \rangle &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 k d\Omega}{(2\pi)^4} S(\vec{k}, \Omega) \frac{k_i k_j m}{k^2} J_n^2 \left(\frac{k_z v_{\perp}}{\Omega_0} \right) \\ &\times \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\omega'}{2\pi} e^{i(\omega + \omega')t} \frac{\sigma_{il}(\omega) \sigma_{jm}(\omega')}{(\omega - \gamma_n)(\omega' + \gamma_n)}. \end{aligned} \quad (34)$$

By some simple changes in the integrand one can obtain $\langle v_i \varepsilon_i \rangle$, $\langle x_i \varepsilon_i \rangle$ and similar expressions. To replace v_i by ε_i change $\sigma_{jm}(\omega')$ to δ_{jm} . To replace v_i by x_i introduce a factor $(i\omega)^{-1}$ in the integrand. For instance, to calculate $\langle \varepsilon^2 \rangle$ we replace σ_{il} by δ_{il} and σ_{jm} by δ_{jm} and find

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 k d\Omega}{(2\pi)^4} S(\vec{k}, \Omega) J_n^2 \left(\frac{k_z v_{\perp}}{\Omega_0} \right) = \int \frac{d^3 k d\Omega}{(2\pi)^4} S(\vec{k}, \Omega), \quad (35)$$

which shows the relation of $S(\vec{k}, \Omega)$ to the energy density of the electric field.

We now proceed to calculate the correlation functions of most interest. To shorten the formulas we introduce the integral operator

$$P_n(v_{\perp}, w) = \frac{e^2}{m^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 k d\Omega}{(2\pi)^4} S(\vec{k}, \Omega) J_n^2 \left(\frac{k_z v_{\perp}}{\Omega_0} \right). \quad (36)$$

First we find

$$\begin{aligned} \langle v_z(t)^2 \rangle &= P_n \frac{k_z^2}{k^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{e^{i(\omega + \omega')t}}{(\omega - \gamma_n)(\omega - i\beta_z)(\omega' + \gamma_n)(\omega' - i\beta_z)} \\ &= P_n \frac{k_z^2}{\beta_z^2 + \gamma_n^2} (1 - e^{-2\beta_z t} - 2 e^{-\beta_z t} \cos \gamma_n t). \end{aligned} \quad (37)$$

The asymptotic value is

$$\langle v_z^2 \rangle^{as} = \langle P_n \frac{k_z^2}{k^2} \frac{1}{\beta_z^2 + \gamma_n^2} \rangle. \quad (38)$$

It is worth noting that if $\beta_z = 0$ we have

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{\gamma_n^2} (1 - \cos \gamma_n t) = 2\pi t \delta(\gamma_n), \quad (39)$$

so that

$$\langle v_z^2 (\beta_z = 0) \rangle^{as} = 2\pi t P_n \delta(\gamma_n) \frac{k_z^2}{k^2}. \quad (40)$$

To evaluate D_z (plasma) we calculate

$$\langle z A_z \rangle^{as} = P_n \frac{k_z^2}{k^2} \left[\frac{\pi \delta(\gamma_n)}{\beta_z^2} - \frac{1}{\beta_z^2 - \gamma_n^2} \right]. \quad (41)$$

and substitute in Eq. (12) to find

$$D_z (\text{plasma}) = \frac{\pi}{\beta_z^2} P_n \frac{k_z^2}{k^2} \delta(\gamma_n). \quad (42)$$

The contribution from the $\langle v_z^2 \rangle$ term has disappeared. In the limit where the friction term β_z^2 vanishes the diffusion along field lines reduces to free streaming.

To find the perpendicular diffusion coefficient we need

$$\langle \vec{x} \cdot \vec{A} \rangle^{as} = \langle P_n \frac{k_x^2}{k^2} \left[\frac{\pi \beta_z \delta(\gamma_n)}{\beta_z^2 + \Omega_0^2} + \frac{\Omega_0^2 - \beta_z^2 - \gamma_n^2}{|\Omega_0^2 - (\gamma_n - i\beta_z)^2|^2} \right] \rangle, \quad (43)$$

$$\langle \vec{x} \cdot \vec{A} \rangle^{as}, \Omega_0 = \langle P_n \frac{k_x^2}{k^2} \left[\frac{\pi \Omega_0^2 \delta(\gamma_n)}{\beta_z^2 + \Omega_0^2} - \frac{2\beta_z \Omega_0^2}{|\Omega_0^2 - (\gamma_n - i\beta_z)^2|^2} \right] \rangle \quad (44)$$

$$\text{and } \langle v_\perp^2 \rangle^{as} = \langle P_n \frac{k_x^2}{k^2} \frac{\gamma_n + \beta_z^2 + \Omega_0^2}{|\Omega_0^2 - (\gamma_n - i\beta_z)^2|^2} \rangle. \quad (45)$$

Using Eq. (14) we find

$$D_\perp (\text{plasma}) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\beta_z^2 + \Omega_0^2} P_n \delta(\gamma_n) \frac{k_x^2}{k^2} \quad (46)$$

where again the term proportional to the drag coefficient has vanished.

3. A Perturbation Theory

We now consider a more elaborate theory in which the electric forces are considered small from the beginning. A perturbation theory seems logical for a hot stable plasma where one forms a picture of diffusion coming from a large number of small deviations of the particle trajectories. We first write the equation of motion for a test particle in a completely uniform plasma in a constant magnetic field:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times \vec{\Omega}_0 + \frac{e}{m} \vec{E}[\vec{x}(t), t]. \quad (47)$$

The density of test particles may vary in space but the density of all particles, test particles and field particles, is substantially constant. The distribution of test particles may differ from that of field particles and both may be changing slowly with the time.

When one attempts to apply standard perturbation theory to this equation one finds that it is valid for only a limited time. In the second approximation terms appear which increase

linearly with the time, so that first order quantities do not remain small. These secular terms will be treated by a method first applied to plasma dynamics by Sandri [12] and by Frieman [13]. The method is based on the existence of two natural time scales for a plasma. The fast time scale is characterized by the cyclotron frequency of either species or by the plasma frequency. The slow time scale is characterized by the collision frequency.

We redefine all functions of time in terms of the two times, t_0 and t_1 . We expand each function:

$$\begin{aligned}\vec{v}(t_0, t_1) &= \vec{v}_0(t_0, t_1) + \epsilon \vec{v}_1(t_0, t_1) \\ \vec{x}(t_0, t_1) &= \vec{x}_0(t_0, t_1) + \epsilon \vec{x}_1(t_0, t_1),\end{aligned}\quad (48)$$

and $\vec{E}[\vec{x}(t_0, t_1), t_0, t_1] = \epsilon \vec{E}_1[\vec{x}_0(t_0, t_1), t_0, t_1]$,

where ϵ is a small parameter. The time derivative becomes

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t_1}. \quad (49)$$

to lowest order the orbit of a test particle is

$$\begin{aligned}v_o^+(t_0, t_1) &= v_{ox} + v_{oy} = v(t_1) e^{i\Phi(t_1) - i\Omega_o t_0}, \\ v_{oz}^+(t_0, t_1) &= w_o(t_1), \\ x_o^+(t_0, t_1) &= \xi_\perp(t_1) e^{i\gamma(t_1)} - \frac{v_\perp(t_1)}{i\Omega_o} e^{i\Phi(t_1) - i\Omega_o t_0},\end{aligned}\quad (50)$$

and $z_o(t_0, t_1) = \xi_z(t_1) + w_o(t_1) t_0$.

The quantities $\xi_\perp \cos \gamma$ and $\xi_\perp \sin \gamma$ are the cartesian coordinates of the guiding center. Along with v_\perp , w , Φ , and ξ_z they are considered to be functions of the slow time variable.

With these orbits we determine the response of a fluid plasma to the test particle by using the linearized Vlasov equations. This method is known to be faulty for the calculation of the dynamic friction, since correlations between pairs of particles are not taken explicitly into account [8]. However, we will find that the dynamic friction will not appear explicitly in the spatial diffusion coefficient. The details of this calculation are worked out in the appendix. After a time characteristic of the damping time of an electrostatic wave the fluid force on the particle is

$$\frac{e}{m} \vec{E}(\text{coherent}) = -\beta_\perp(t_1) \vec{v}_0(t_0, t_1) - \beta_z(t_1) \hat{w}(t_1) \hat{z} + \Omega_1(t_1) \vec{v}_0(t_0, t_1) \times \hat{z}, \quad (51)$$

where β_\perp , β_z , and Ω_1 are given by Eqs. (88) and (89) of the appendix. This force depends on the fast time variable only through the explicit dependence on velocity.

3.1 The First Order Perturbation

The first order equations of motion are

$$\frac{\partial v_1^+}{\partial t_0} = -\frac{\partial v_o^+}{\partial t_1} - [\beta_\perp + i\Omega_1] v_o^+ - i\Omega_o v_1^+ + \frac{e}{m} \mathcal{E}^+, \quad (52)$$

$$\text{and } \frac{\partial w_1}{\partial t_0} = -\frac{\partial w_o}{\partial t_1} - \beta_z w_o + \frac{e}{m} \mathcal{E}_z, \quad (53)$$

where $\vec{\epsilon}$ represents the incoherent electric field and $\vec{\epsilon}^+ = \vec{\epsilon}_x + i\vec{\epsilon}_y$. The first order time derivative includes both the fast change of the small quantity and the slow change of the large quantity. These equations are easily integrated and yield

$$v_1^+(t_0, t_1) = -t_0 e^{-i\Omega_0 t_0} \left[\frac{d}{dt_1} (v_\perp e^{i\Phi}) + (\beta_\perp + i\Omega_1) v_\perp e^{i\Phi} \right] + \delta v^+, \quad (54)$$

$$\text{and } w_1(t_0, t_1) = -t_0 \left[\frac{dw_0}{dt_1} + \beta_z w_0 \right] + \delta w, \quad (55)$$

$$\text{where } \delta v^+ = \frac{e}{m} e^{-i\Omega_0 t_0} \int_0^{t_0} d\tau e^{i\Omega_0 \tau} \vec{\epsilon}^+(\tau, t_1),$$

$$\text{and } \delta w = \frac{e}{m} \int_0^{t_0} d\tau \vec{\epsilon}_z(\tau, t_1).$$

We now average over an ensemble of test particles and assume that the average electric field is zero. We see that $\langle v \rangle$ increases linearly on the fast time scale and the perturbation theory becomes invalid unless we have

$$\frac{d}{dt_1} \langle v_\perp e^{i\Phi} \rangle = - \langle v_\perp e^{i\Phi} (\beta_\perp + i\Omega_1) \rangle, \quad (56)$$

$$\text{and } \frac{d}{dt_1} \langle w_0 \rangle = - \langle w_0 \beta_z \rangle. \quad (57)$$

We evaluate the square of the velocity in the same way:

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_\perp \cdot \vec{v}_\perp \rangle_1 &= \langle v_0^+ v_1^- + v_0^- v_1^+ + \delta v^+ \delta v^- \rangle \\ &= -t_0 \left[\frac{d}{dt} \langle v_\perp^2 \rangle + 2 \langle \beta_\perp v_\perp \rangle \right] + \langle \delta v^+ \delta v^- \rangle \end{aligned} \quad (58)$$

The last term is evaluated by the method of section 2 with the result:

$$\begin{aligned} \langle \delta v^+ \delta v^- \rangle^{\text{as}} &= 4 \langle B_\perp \rangle t_0, \\ \text{with } B_\perp(v_\perp, w_0) &= \frac{\pi}{4} P_n \frac{k_\perp^2}{k^2} [\delta(\gamma_n + \Omega_0) + \delta(\gamma_n - \Omega_0)]. \end{aligned} \quad (59)$$

In order to avoid the secular behavior we must have

$$\frac{d}{dt_1} \langle v_\perp^2 \rangle = -2 \langle \beta_\perp v_\perp^2 \rangle + 4 \langle B_\perp \rangle. \quad (60)$$

For the velocity parallel to the field we find

$$\frac{d}{dt_1} \langle w_0^2 \rangle = -2 \langle \beta_z w_0^2 \rangle + 2 \langle B_z \rangle,$$

$$\text{with } B_z(v_\perp, w_0) = \frac{\pi}{4} P_n \frac{k_z^2}{k^2} \delta(\gamma_n). \quad (61)$$

One can continue in this way and determine consistent equations for arbitrary powers of the velocity. For example, if we calculate the first order part of the quantity $(\vec{v}_\perp \cdot \vec{v}_\perp)^p$, we find

$$\frac{d}{dt_1} \langle v_\perp^{2p} \rangle = -2p \langle \beta_\perp v_\perp^{2p} \rangle + 4p^2 \langle v_\perp^{2p-2} B_\perp \rangle. \quad (62)$$

3.2 Spatial Diffusion

In the same spirit we write the equation for the first order coordinates:

$$\frac{\partial \mathbf{x}_1^+}{\partial t_0} = -\frac{\partial \mathbf{x}_0^+}{\partial t_1} + \mathbf{v}_1^+. \quad (63)$$

This solution is

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^+(t_0, t_1) = & -t_0 \left\{ \frac{d}{dt_1} (\xi_\perp e^{i\gamma}) - \frac{e^{-i\Omega_0 t_0}}{i\Omega_0} [\frac{d}{dt_1} (\mathbf{v}_\perp e^{i\Phi}) \right. \\ & \left. + \mathbf{v}_\perp e^{i\Phi} (\beta_\perp + i\Omega_1)] \right\} \\ & + \frac{1}{\Omega_0^2} \left\{ \frac{d}{dt_1} (\mathbf{v}_\perp e^{i\Phi}) + (1 - e^{-i\Omega_0 t_0}) \mathbf{v}_\perp e^{i\Phi} (\beta_\perp + i\Omega_1) \right\} + \delta \mathbf{x}^+, \end{aligned} \quad (64)$$

with $\delta \mathbf{x}^+ = \int_0^{t_0} d\tau \delta \mathbf{v}^+(\tau, t_1).$

In the direction of the magnetic field we cannot eliminate the secular behavior by the simple scheme that we are using. To make the model consistent we will take the test particle distribution to be uniform in the axial direction. Eliminating the secular dependence of $\langle \mathbf{x}_1^+ \rangle$ requires

$$\frac{d}{dt_1} \langle \xi_\perp e^{i\gamma} \rangle = 0 \quad (65)$$

For the quadratic term we find

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp \rangle_1 = & -t_0 \left\{ \frac{d}{dt_1} \langle \xi_\perp^2 \rangle + \frac{1}{\Omega_0^2} \frac{d}{dt_1} \langle \mathbf{v}_\perp^2 \rangle + 2 \frac{\langle \beta_\perp \mathbf{v}_\perp^2 \rangle}{\Omega_0} \right. \\ & - \frac{2}{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t_1} \langle \mathbf{v}_\perp \xi_\perp \sin(\Phi - \gamma - \Omega_0 t_0) \rangle - \frac{2}{\Omega_0} \langle \beta_\perp \xi_\perp \mathbf{v}_\perp \sin(\Phi - \gamma - \Omega_0 t_0) \rangle \\ & \left. - \frac{2}{\Omega_0} \langle \Omega_1 \xi_\perp \mathbf{v}_\perp \cos(\Phi - \gamma - \Omega_0 t_0) \rangle \right\} + \langle \delta \mathbf{x}^+ \delta \mathbf{x}^- \rangle + \{ \text{non secular terms} \}. \end{aligned} \quad (66)$$

The $\langle \delta \mathbf{x}^+ \delta \mathbf{x}^- \rangle$ term is evaluated by the method of section 2:

$$\langle \delta \mathbf{x}^+ \delta \mathbf{x}^- \rangle = 4 \langle C_\perp \rangle t_0 = \frac{\pi t_0}{\Omega_0^2} P_n [2\delta(\gamma_n) + \delta(\gamma_n + \Omega_0) + \delta(\gamma_n - \Omega_0)]. \quad (67)$$

When we eliminate the secular term here and combine the result with similar equations for the quantities $\langle \mathbf{x}_\perp \cdot \mathbf{v}_\perp \rangle \cdot \frac{1}{\Omega_0}$ and $\langle \mathbf{x}_\perp \cdot \mathbf{v}_\perp \rangle_1$, the terms involving the fast oscillation separately vanish and we find

$$\frac{d}{dt_1} \langle \xi_\perp^2 \rangle = -\frac{1}{\Omega_0^2} \langle \mathbf{v}_\perp^2 \rangle - \frac{2}{\Omega_0^2} \langle \beta_\perp \mathbf{v}_\perp^2 \rangle + 4 \langle C_\perp \rangle. \quad (68)$$

We simplify the equation by applying Eq. 60 and find

$$\frac{d}{dt_1} \langle \xi_{\perp}^2 \rangle = 4 \langle D_{\perp} \rangle, \quad (69)$$

with

$$\begin{aligned} D_{\perp}(v_{\perp}, w_0) &= C_{\perp} - \frac{B_{\perp}}{\Omega_0^2} 2 = \frac{\pi}{2\Omega_0^2} P_n \delta(\gamma_n) \\ &= \frac{\pi}{2\Omega_0^2} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 k d\Omega}{(2\pi)^4} J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_0} \right) S(\vec{k}, \Omega) \delta(k_z w_0 + n \Omega_0 - \Omega) \frac{k_z^2}{k^2} \end{aligned} \quad (70)$$

which is the same as Eq. (46) for small β_{\perp} .

3.3 The Diffusion Equation

We can combine all the results into a single equation. We define a test particle distribution function $f(\xi, u, t_1)$ where the variables are $\xi = (\xi_{\perp} \cos \gamma, \xi_{\perp} \sin \gamma)$ and $u = (v_{\perp} \cos \Phi, v_{\perp} \sin \Phi, w_0)$. The general result, which reproduces all the previous equations, is

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} (D_{\perp} f) + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} [\beta_{ij} u_j f + \frac{\partial}{\partial u_j} (B_{ij} f)], \quad (71)$$

with

$$\beta = \begin{vmatrix} \beta_{\perp} - \Omega_1 & 0 \\ \Omega_1 & \beta_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_z \end{vmatrix}$$

and

$$B = \begin{vmatrix} B_{\perp} + \frac{E}{2} (u_1^2 - u_2^2) & E u_1 u_2 & F u_1 u_3 \\ E u_1 u_2 & B_{\perp} - \frac{E}{2} (u_1^2 - u_2^2) & F u_2 u_3 \\ F u_1 u_3 & F u_2 u_3 & B_z \end{vmatrix}.$$

The additional coefficients are

$$u_3 F = \frac{\pi \Omega_0}{v_{\perp}^2} P_n \frac{k_z}{k^2} n \delta(\gamma_n), \quad (72)$$

and

$$E = \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{1}{v_{\perp}^2} \int \frac{d^3 k d\Omega}{(2\pi)^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n-1} \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_0} \right) J_{n+1} \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_0} \right) \frac{k_z^2}{k^2} S(\vec{k}, \Omega) \delta(\gamma_n). \quad (73)$$

The dynamic friction coefficients do not quite agree with those calculated by Rostoker [8]. The coefficients would be the same if we were to replace the term $\beta_{ij} u_j$ of Eq. (69) by

$$\bar{\beta}_{ij} u_j = \beta_{ij} u_j - \frac{\partial}{\partial u_j} B_{ij}. \quad (74)$$

4. Discussion

The diffusion coefficient of Eq. (68) reduces to previous results with some further approximations. For example, we can derive the result of Drummond and Rosenbluth [7] by assuming that $S(\vec{k}, \Omega)$ is appreciable only for those values of k_z for which $k_z v_{\perp}/\Omega_e \ll 1$, with electrons as test particles. Then the only Bessel function which contributes is $J_0 \cong 1$. The frequencies are given by a dispersion relations so $\Omega = \Omega(\vec{k})$ and we write

$$S(\vec{k}, \Omega) = 2\pi S(k_{\perp}, k_z) \delta[\Omega - \Omega(\vec{k})], \quad (75)$$

and

$$\begin{aligned} D_{\perp} &= \frac{\pi c^2}{2B^2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} S'(\mathbf{k}_{\perp}, k_z) \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \delta[k_z w_0 - \Omega(\mathbf{k})] \\ &= \frac{c^2}{4B^2} \int \frac{d^2 k_{\perp}}{(2\pi)^2} S \left(\frac{(k_{\perp}, \frac{\Omega(\mathbf{k})}{w_0})}{|w_0 - \frac{\partial \Omega(\mathbf{k})}{\partial k_z}|} \right) \frac{k_{\perp}^2}{k_{\perp}^2 + \frac{\Omega^2(\mathbf{k})}{w_0^2}} \end{aligned} \quad (76)$$

Since the frequency $\Omega(\mathbf{k})$ of the ion-cyclotron drift instability does not depend on k_z , the term $\frac{\partial \Omega(\mathbf{k})}{\partial k_z}$ disappears. The spectrum was sharply peaked at a value of k_z which made the last term of the equation unity. The diffusion coefficient they derived was anomalous only because the spectrum was proportional to the magnetic field.

4.1 Collisional Diffusion

We will examine critically the diffusion of a stable plasma, since a peculiar problem appears. We first write the complete diffusion coefficient using Eq. (70) and Eq. (95):

$$\begin{aligned} D_{\perp} &= \left(\frac{c}{B} \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3 k \frac{k_{\perp}^2}{k^4} \frac{1}{|k_z|} J_n^2 \left(\frac{k_z v_{\perp}}{\Omega_0} \right) \\ &\times \int d^2 v' \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sum_{\alpha} e_{\alpha}^2 F_{\alpha}(v', w_0 + \frac{n\Omega_0}{k_z} - \frac{m\Omega_{\alpha}}{k_z}) J_m^2 \left(\frac{k_z v_{\perp}}{\Omega_{\alpha}} \right)}{|\epsilon(\mathbf{k}, k_z w_0 + n\Omega_0)|^2} \end{aligned} \quad (77)$$

where the index α refers to the particle species and Ω_{α} is the cyclotron frequency of species α . We have used the two delta functions to integrate over Ω and the field particle axial velocity. When the Bessel function indices m and n are zero the factor $1/|k_z|$ produces a logarithmic divergence for long wave lengths parallel to the magnetic field. With this form of the integral one suspects the divergence to be related to the absence of Landau damping for waves propagating perpendicular to the field.

If we use one of the delta functions to integrate over k_z instead of w' we find the alternative form

$$\begin{aligned} D_{\perp} (\text{dominant}) &= \left(\frac{c}{B} \right)^2 \lambda_D^{-4} \int d^2 k_{\perp} \frac{k_{\perp}^2}{(k_{\perp}^2 + k_{\perp}^2 \lambda_D^{-2})^2} J_0^2 \left(\frac{k_z v_{\perp}}{\Omega_0} \right) \\ &\times \int d^3 v' \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2 F_{\alpha}(v')}{|v_z' - w_0|} J_0^2 \left(\frac{k_z v_{\perp}'}{\Omega_{\alpha}} \right), \end{aligned} \quad (78)$$

where we have kept only the divergent term in the sums. Only the zero frequency part of the dielectric coefficient remains and contributes the term containing the Debye length λ_D . Integrating over k_{\perp} we find the largest term comes from the usual divergence at large k which we cut off at $k_{\perp} = 1/b_0$ and find

$$D (\text{dominant}) \approx 2\pi \left(\frac{c}{B} \right)^2 \ln \left(\frac{\lambda_D}{b_0} \right) \int d^3 v' \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2 F_{\alpha}(v')}{|v_z' - w_0|} \quad (79)$$

This expression is divergent for small relative axial velocities between field particles and test particles.

We suggest the following interpretation. Consider an electron moving in a tightly wound helix with axial velocity w_0 . It interacts with a cold ion with axial velocity v_z' . The mutual electric fields on each particle are in the same direction, so that they

drift together across the magnetic field. If no other particles are considered, the drift can continue indefinitely.

We take the impact parameter to be b and take the distance of closest approach to occur at $t=0$. The electric field is

$$E = \frac{e_\alpha b}{r^3} = \frac{e_\alpha b}{[b^2 + (v'_z - w_0)^2 t^2]^{3/2}}, \quad (80)$$

which produces a drift velocity $c E / B$. The displacement due to the collision is

$$\Delta x_\perp = \frac{e_\alpha c}{B} \int_{-T}^T \frac{b dt}{[b^2 + (v'_z - w_0)^2 t^2]^{3/2}}. \quad (81)$$

The number of particles of charge e_α and velocity v' is $dv'_z F_\alpha(\vec{v}') d^2 v'_\perp$ and the number of collisions per second with impact parameter b is

$$2\pi b db |v'_z - w_0| dv'_z F_\alpha(\vec{v}') d^2 v'_\perp$$

we obtain $\langle (\Delta x_\perp)^2 \rangle / t$ by multiplying this expression by Δx_\perp^2 and integrating over b and v'_z and summing over all field particles α :

$$D_{\perp}(\text{drift}) = 2\pi \left(\frac{c}{B}\right)^2 \sum_\alpha e_\alpha^2 \int d^3 v' F_\alpha(\vec{v}') \int_0^\infty b^2 db \int_{-T}^T \frac{dt}{[b^2 + (v'_z - w_0)^2 t^2]^{3/2}} \quad (82)$$

If we take $T = \infty$ and cut off the divergent b integration at λ_D and b_0 , we obtain Eq. 77. The collision lasts for an infinite time and D_{\perp} is infinite. If we limit the time T by specifying a distance b_1 , so that the configuration of field particles in the neighborhood of a test particle changes as it drifts this distance, the diffusion coefficient is finite.

Assuming that

$$T = \frac{b_1 B}{c E_\perp} = \frac{b_1 B^2}{2ce}, \quad (83)$$

we find

$$D_{\perp}(\text{drift}) = \left(\frac{c}{B}\right)^2 \pi \sum_\alpha e_\alpha^2 \int \frac{d^3 v' F_\alpha(\vec{v}')}{|v'_z - w_0|} \ln \left[1 + \frac{B^2 \lambda_D^2 b_1^2 |v_z - w_0|^2}{4e_\alpha^2 c^2} \right], \quad (84)$$

for which we have used only one other cutoff, for large impact parameters.

5. Appendix

5.1 The Response of the Plasma to a Test Particle.

We consider a single test particle with charge e in a fluid plasma with a constant magnetic field. The Poisson equation takes the form

$$-\nabla^2 \Phi = 4\pi \rho + 4\pi e \delta^3 [\vec{x} - \vec{x}_0(t)], \quad (85)$$

where Φ is the electric potential and ρ is the charge density of the background. When we take the Fourier transform defined by Eq. (17) and use the test particle orbits of Eq. (50) we have

$$k^2 \Phi(\vec{k}, \omega) = 4\pi \rho(\vec{k}, \omega) + 4\pi e i \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \frac{(\vec{k} \cdot \vec{v}_n) e^{in(\Phi - \alpha)} - ik \cdot \vec{\xi}_n}{\omega - k_z v_{n0} - n\Omega_0}. \quad (86)$$

To find the fluid charge-density we use the linearized Vlasov equations and in a well-known manner [14] find

$$4\pi \rho(\vec{k}, \omega) = k^2 [1 - \epsilon(\vec{k}, \omega)] \Phi(\vec{k}, \Phi). \quad (87)$$

where the dielectric coefficient is

$$\epsilon(\vec{k}, \omega) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{k^2 m_{\alpha}} \int d^3 v \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2 \left[\frac{\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_{\alpha}}}{\omega - k_z w - n\Omega_0} \right] \left[\frac{n\Omega_{\alpha}}{v_{\perp}} \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial v_{\perp}} + k_z \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial w} \right]. \quad (88)$$

The subscript α denotes the particle species and F_{α} is the distribution function of the background plasma.

The Fourier transform of the electric field is now

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi e \vec{k}}{k^2 \epsilon(\vec{k}, \omega)} e^{-ik \cdot \vec{\xi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \frac{\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_0} \right)}{\omega - k_z w_0 - n\Omega_0} e^{in(\Phi - \alpha)}. \quad (89)$$

5.2 The Coherent Field

When we evaluate this field at the position of the test particle we find

$$\vec{E}[\vec{x}_0(t_0), t_0] = 4\pi e \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\vec{k}}{k^2} \int d\omega e^{i\omega t_0} X \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} J_m \frac{\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_0} \right) J_n \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_0} \right)}{[\omega - (n-m)\Omega_0] \epsilon(\vec{k}, \omega + k_z \omega_0 + n\Omega_0)} e^{i(n-m)(\Phi - \alpha)}. \quad (90)$$

which does not depend on the position of the test particle.

For E_z the dominant contribution comes from a pole at $\omega=0$, $m=0$, $n=0$. Most of the roots of ϵ are damped and die away in time. There remains a faint suspicion that we should be more careful with the series of undamped roots with $k_z=0$, which we neglect. In the asymptotic limit for the fast time variable we find

$$\begin{aligned} \frac{e}{m} E_z (\text{coherent}) &= -w_0 \beta_z(t_1) \\ &= \frac{4\pi e^2}{m} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k_z}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_0} \right) \text{Im} \left[\frac{1}{\epsilon(\vec{k}, k_z w_0 + n\Omega_0)} \right]. \end{aligned} \quad (91)$$

In the perpendicular direction the coherent field oscillates with the cyclotron frequency. Asymptotically the phase of the oscillation is the same as the phase of the velocity so we can write

$$\frac{e}{m} \vec{E}_{\perp} (\text{coherent}) = -\beta_{\perp}(t_1) \vec{v}_{\perp}(t_0) + \Omega_1(t_1) \vec{v}_{\perp}(t_0) \times \hat{z}, \quad (92)$$

with

$$\begin{aligned} \Omega_1(t_1) &= \frac{4\pi e^2}{m} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k_{\perp}}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_0} \right) J_n' \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_0} \right) \\ &\quad \times \text{Re} \left[\frac{1}{\epsilon(\vec{k}, k_z w_0 + n\Omega_0)} \right], \end{aligned} \quad (93)$$

and

$$\beta_{\perp}(t_1) = -\frac{4\pi e^2}{m} \frac{\Omega_0}{v_{\perp}^2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_0} \right) \quad (94)$$

$$X \text{Im} \left[\frac{1}{\epsilon(\vec{k}, k_z w_0 + n\Omega_0)} \right]$$

These expressions are only valid for a stable plasma.

5.3 The Spectral Density

We evaluate $\langle E_i E_j \rangle$ using the electric field of Eq. (84). The ensemble average is taken to be an average over the field particles. We find in the time asymptotic limit

$$\langle E_i E_j \rangle = \int \frac{d^3 k d\omega}{(2\pi)^4} \frac{k_i k_j}{k^2} S(\vec{k}, \omega),$$

with

$$S(\vec{k}, \omega) = \frac{2(2\pi)^2}{k^2} \int d^3 v \sum_{\alpha} 4\pi e_{\alpha}^2 F_{\alpha}(\vec{v}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2 \left(\frac{k \cdot v}{\Omega_{\alpha}} \right) \times \frac{\delta(\omega - k_z w - n\Omega_{\alpha})}{|\epsilon(\vec{k}, \omega)|^2} \quad (95)$$

REFERENCES

- [1] Longmire, C. L. and Rosenbluth, M. N., Phys. Rev. 103 (1956) 507.
- [2] Rosenbluth, M. N. and Kaufman, A. N., Phys. Rev. 109 (1958) 1.
- [3] Taylor, J. B., Phys. Rev. Letters 6 (1961) 262.
- [4] Taylor, J. B., Nuclear Fusion Suppl. Pt. 2 (1962) 477.
- [5] Bohm, D., in the Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields (Gurthrie, A., and Wakerling, R. K., eds.) McGraw-Hill, New York (1949).
- [6] Spitzer, L. Jr., Phys. Fluids 3 (1960) 659.
- [7] Drummond, W. E. and Rosenbluth, M. N., Phys. Fluids 5 (1962) 1507.
- [8] Rostoker, N., Nuclear Fusion 1 (1960) 101.
- [9] Taylor, J. B., Phys. Fluids 4 (1961) 1142.
- [10] Kittel, C., in Elementary Statistical Physics, John Wiley and Sons, Inc., New York (1958), 153-156.
- [11] Chandrasekhar, S., Rev. Mod. Phys. 15 (1943) 1.
- [12] Sandri, G., Ann. Phys. (N.Y.) 24 (1963) 332.
- [13] Frieman, E., J. Math. Phys. 4 (1963) 410.
- [14] Bernstein, I., Phys. Rev. 109 (1958) 10.

ACKNOWLEDGEMENT

One of the authors (O. E.) had the benefit of several discussions on this subject with Marc Feix. This work was partially done while the authors were consultants at Oak Ridge National Laboratory. Our work at The University of Tennessee was supported by the Atomic Energy Commission under contract AT-(40-1)-2598.

STABILITE D'UN PLASMA DE DIFFUSION

M. BERNARD, C. BRIFFOD, R. FRANK ET J. WEISSE
CENTRE D'ETUDES NUCLEAIRES DE SACLAY, S.-ET-O.,
FRANCE

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

STABILITY OF A DIFFUSING PLASMA. In the DAPHNIS experiment the plasma produced by a magnetron source diffuses along a static magnetic field B_0 . There will, therefore, be neither a macroscopic current nor a flux of fast electrons through the measuring chamber located about a metre from the source. Since the neutral gas pressure in the chamber may vary from 10^{-2} to 10^{-5} Torr it is verified first that the plasma in fact behaves as a true diffusing plasma, namely, that its density increases with B_0 and decreases as the pressure is increased.

However, by measuring $D_{a\perp}$, the coefficient of ambipolar diffusion perpendicular to B_0 , it was found that anomalous diffusion takes place. We therefore analysed the noise emitted by the plasma, and determined a distinct emission in two clearly defined regions of the spectrum: a) a UHF noise emitted in two separate bands on either side of the electron cyclotron frequency; b) an HF noise from 1 to 10 Mc/s whose amplitude is correlated with density fluctuations of frequency equal to some tens of kilocycles per second. But the coefficient of diffusion $D_{a\perp}$ varies as a function of B_0 similarly to the emitted noise intensity. In order to identify the two types of instability responsible for this emission, we measured the velocity distribution function of the electrons in the source and in the measuring chamber. The influence of these instabilities on the particle diffusion perpendicular to B_0 is analysed in this investigation.

STABILITE D'UN PLASMA DE DIFFUSION. Dans l'expérience DAPHNIS, on laisse diffuser le long d'un champ magnétique statistique B_0 le plasma produit dans une source du type magnétron. Il n'existe ainsi aucun courant macroscopique et aucun flux d'électrons rapides dans la chambre de mesure située à un mètre environ de la source. La pression du gaz neutre pouvant varier de 10^{-2} à 10^{-5} Torr dans la chambre, les auteurs vérifient que le plasma se comporte bien comme un véritable plasma de diffusion: sa densité croît avec B_0 et décroît quand la pression augmente.

Cependant, la mesure du coefficient de diffusion ambipolaire perpendiculaire à B_0 , $D_{a\perp}$, montre que la diffusion est anormale. Les auteurs analysent donc le bruit émis par le plasma et constatent une très nette émission en deux régions distinctes du spectre: a) Bruit UHF dans deux bandes séparées de part et d'autre de la fréquence cyclotronique des électrons; b) Bruit HF, de 1 à 10 MHz, dont l'amplitude est corrélée avec des fluctuations de densité de fréquence égale à quelques dizaines de kilohertz. D'autre part, le coefficient de diffusion $D_{a\perp}$ varie en fonction de B_0 de la même manière que la puissance du bruit émis. Afin de caractériser les deux types d'instabilités, responsables de cette émission, les auteurs ont mesuré la fonction de distribution des électrons selon la vitesse dans la source et dans la chambre de mesure. Dans ce mémoire, ils analysent l'influence de ces instabilités sur la diffusion des particules perpendiculairement à B_0 .

УСТОЙЧИВОСТЬ ДИФФУЗИОННОЙ ПЛАЗМЫ. В установке Дафнис плазма, создаваемая в источнике магнетронного типа, диффундирует вдоль статического магнитного поля B_0 . Таким образом, не существует никакого макроскопического потока и никакого потока быстрых электронов в измерительной камере, установленной приблизительно в одном метре от источника. Давление нейтрального газа в камере может изменяться от 10^{-2} до 10^{-5} торр. В связи с этим мы установили, что плазма, как и должно быть в случае действительно диффузионной плазмы, ведет себя удовлетворительно: ее плотность возрастает с B_0 и уменьшается при увеличении давления.

Однако измерение коэффициента амбиополярной диффузии $D_{a\perp}$, перпендикулярной к B_0 , показывает, что диффузия не является нормальной. Анализируется создаваемый плазмой шум и отмечается его довольно ясное появление в двух различных областях спектра: а) Шум СВЧ в двух отдельных полосах, расположенных по обеим сторонам циклотронной частоты электронов. б) Шум ВЧ от 1 до 10 мегагерц, амплитуда которого связана с флюктуациями плотности частоты, равной нескольким десяткам килогерц.

С другой стороны, коэффициент диффузии $D_{a\perp}$ изменяется в зависимости от B_0 , так же, как и мощность издаваемого шума. С целью определения обоих типов неустойчивости, при-

водящих к подобному излучению, были проведены измерения функции распределения электронов по скоростям в источнике и в измерительной камере. В этой работе анализируется влияние данных неустойчивостей на диффузию частиц перпендикулярно к B_0 .

ESTABILIDAD DE UN PLASMA DE DIFUSIÓN. En la instalación experimental DAPHNE, el plasma producido en una fuente de tipo magnetrón se difunde a lo largo de un campo magnético estático B_0 . En la cámara de medición situada a 1 m de la fuente no circula entonces ninguna corriente macroscópica, ni flujo de electrones rápidos. La presión del gas neutro en la cámara puede variar de 10^{-2} a 10^{-5} Torr; los autores verifican que con esa variación de presión el plasma se comporta como un verdadero plasma de difusión: su densidad aumenta con B_0 y disminuye al crecer la presión.

Sin embargo, la medición del coeficiente de difusión ambipolar en dirección perpendicular a B_0 , $D_{a\perp}$ pone de manifiesto que la difusión es anómala. Los autores analizaron el ruido emitido por el plasma y comprobaron la existencia de una emisión muy clara en dos regiones distintas del espectro: a) Ruido de frecuencia ultraelevada en dos bandas separadas, situadas a uno y otro lado de la frecuencia ciclotrónica de los electrones. b) Ruido de (alta frecuencia) de 1 a 10 MHz, cuya amplitud se correlaciona con fluctuaciones de la densidad, de frecuencia igual a algunas decenas de kHz. Por otro lado, el coeficiente de difusión $D_{a\perp}$ varía en función de B_0 , tal como la potencia del ruido emitido. A fin de caracterizar los dos tipos de inestabilidad a los cuales se debe esta emisión, los autores midieron la función de distribución de la velocidad de los electrones en la fuente y en la cámara de medición. Los autores analizan la influencia de estas inestabilidades sobre la difusión de las partículas en dirección perpendicular a B_0 .

I) - INTRODUCTION :

Les études de diffusion montrent que la présence d'électrons rapides [1] ou d'un courant [2], le long des lignes de force du champ magnétique B , provoque dans le plasma des instabilités qui modifient les coefficients de transport.

Pour éviter ces causes d'instabilités, dans l'expérience DAPHNIS, le gaz neutre est ionisé dans une source cylindrique à champ électrique radial, puis diffuse le long de B . La géométrie du système interdit aux électrons énergétiques de se diriger vers la région de diffusion. Dans cette expérience, le champ magnétique B croît de la source à la chambre de mesure où il est uniforme.

Les premiers résultats confirment que l'on est en présence d'un régime de diffusion, mais les valeurs de la densité (quelques $10^{11}/cm^3$) et de la température électronique dans la direction parallèle à B (≈ 15 eV) semblent élevées compte tenu de la présence du gradient de champ magnétique.

D'autre part, la mesure des variations des coefficients de diffusion ambipolaire, en fonction du champ B , révèle l'existence de fuites radiales anormalement importantes. Une étroite corrélation entre une émission pulsée de bruit haute fréquence et une déformation macroscopique de la colonne de plasma est alors mise en évidence et peut justifier des pertes de particules.

La comparaison entre ces résultats et ceux obtenus sur une expérience identique sans champ magnétique - IRIS - montre que les caractéristiques essentielles de l'émission de bruit, spectre et corrélation, sont conservées et que la diffusion reste anormale. Le champ magnétique n'est donc pas le seul mécanisme responsable de l'apparition des phénomènes conduisant à une diffusion accélérée. L'anisotropie de la fonction de distribution des vitesses électroniques mesurée dans la source est en effet à l'origine des instabilités observées dont les effets non linéaires entraînent la fuite anormale des particules.

Ce dernier point sera discuté dans cet article après la présentation des résultats des deux expériences et l'interprétation que l'on peut donner des phénomènes observés sans champ magnétique.

II) - PRINCIPE DE L'EXPERIENCE :

Le dispositif expérimental DAPHNIS est schématisé sur la figure 1. Une source cylindrique, où le gaz est ionisé, est placée dans un tube de verre coaxial, dans lequel le plasma peut diffuser. Cette source est constituée d'une cathode centrale et d'une anode cylindrique coaxiale. La cathode à oxydes est chauffée à 950° environ. L'anode est en acier refroidi par circulation d'eau. Le vide limite dans l'enceinte est de quelques 10^{-6} Torr et la pression de travail varie de 10^{-4} à 10^{-2} Torr.

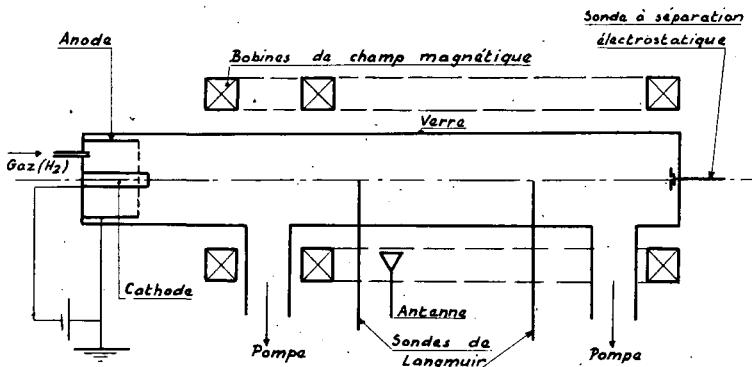


FIG. 1: Principe de l'expérience

Le champ magnétique axial croît de la source à la chambre de mesure où il est uniforme. La longueur du gradient est de 30 cm, pour un rapport miroir de l'ordre de 30 ou 40.

Le champ électrique appliqué dans la source étant radial, les trajectoires des électrons rapides sont situées dans un plan perpendiculaire à l'axe. En conséquence, ces électrons ne peuvent s'écouler le long du tube et pénétrer dans la chambre de mesure.

Les densités sont mesurées au moyen de sondes de Langmuir. Nous avons d'autre part étudié et réalisé des sondes à séparation électrostatique [3] qui permettent de mesurer les fonctions de distribution des vitesses et les températures électroniques.

Les caractéristiques de la décharge sont présentées sur la figure 2. Le gaz utilisé sera toujours l'hydrogène.

III) - REGIME DE DIFFUSION EN PRESENCE DE CHAMP MAGNETIQUE :

A - Mesures des grandeurs moyennes :

1. Diffusion du plasma le long du tube.

Les variations de la densité n des particules en un point de l'axe du tube situé à un mètre de la source, en fonction de B , du courant d'arc I_{arc} et de la pression p sont représentées sur la figure 3 : n croît avec B et I_{arc} , décroît lorsque p augmente.

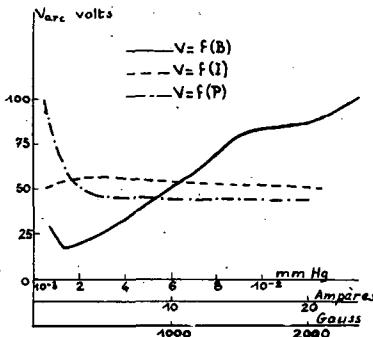


FIG. 2. Caractéristiques de décharge

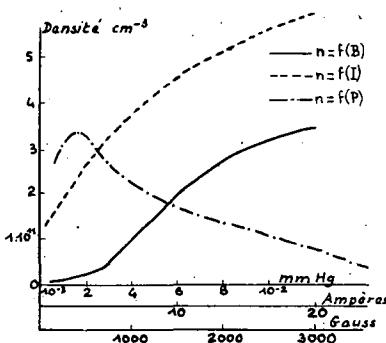


FIG. 3. Densité en fonction des différents paramètres

La fonction de distribution des vitesses électroniques parallèles à B , mesurée à deux mètres de la source, est maxwellienne, la température électronique T_e étant supérieure à 10 eV. Cette température croît lorsque B augmente, reste sensiblement stationnaire avec I_{arc} , diminue lentement lorsque p augmente et décroît du centre vers l'extérieur du tube.

Ce régime de diffusion semble conforme à la théorie classique des collisions. Toutefois, les valeurs de la densité (quelques 10^{11} cm^{-3}) et de la température T_e (jusqu'à 15 eV) sont anormalement élevées, compte tenu de la présence du gradient de champ magnétique. En effet, si l'énergie radiale d'une particule est de l'ordre de 1 eV, il lui faut, suivant la théorie adiabatique, une énergie longitudinale de 55 eV pour conserver après le gradient une énergie longitudinale de 15 eV. Or, le champ électrique dans la source étant radial et le champ de fuite faible, les particules ne peuvent acquérir cette énergie longitudinale, de l'ordre de 50 eV, que par un mécanisme d'instabilités.

2. Diffusion perpendiculaire à B dans la chambre de mesure.

a) - Confinement et coefficients de diffusion -

La mesure en fonction de B , de la distribution radiale de densité $n(r)$, à une distance supérieure à un mètre de la source, met en évidence un important phénomène de confinement du plasma (fig. 4).

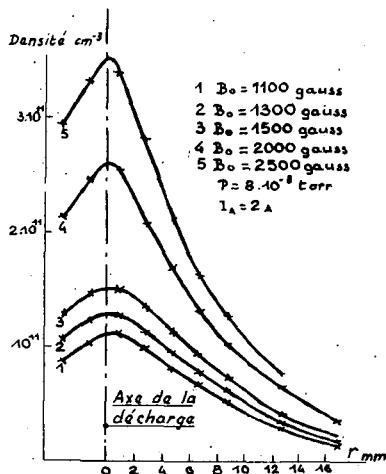
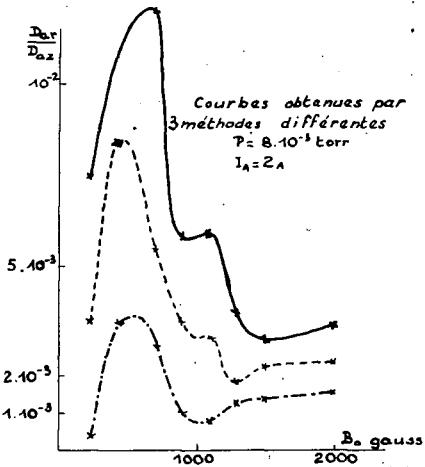


FIG. 4. Distributions radiales de densité

Nous avons étudié des méthodes de mesure des coefficients de diffusion ambipolaire $D_{a\parallel}$ et $D_{a\perp}$, parallèlement et perpendiculairement au champ B , utilisant des relevés dans deux plans radiaux des distributions $n(r)$ [4].

Les résultats obtenus montrent que le rapport $D_{a\perp}/D_{a\parallel}$ ne suit pas la loi en B^{-2} , prévue par la théorie collisionnelle (fig. 5). D'importantes fuites radiales de particules sont en effet constatées, révélant ainsi une diffusion accélérée perpendiculairement à B .

FIG. 5. Coefficients de diffusion en fonction de B_0

Pour préciser le comportement anormal de ce plasma, l'étude du spectre d'émission est nécessaire.

b) - Etude du spectre -

Ce spectre peut se décomposer en trois parties :

- une partie couvrant la bande 0-3 MHz, dans laquelle le bruit est particulièrement important. Vers les basses fréquences apparaît un pic très net situé entre 30 et 100 KHz (fig. 6).
- une deuxième partie à caractère blanc s'étendant de 3 MHz à quelques centaines de MHz, avec une émission plus forte de 30 à 140 MHz (maximum vers 120 MHz).
- une troisième partie, U.H.F., s'étendant de 900 MHz à 11000 MHz, où l'émission a lieu de part et d'autre de la fréquence gyromagnétique des électrons f_{ce} , avec un minimum pour f_{ce} (fig. 7).

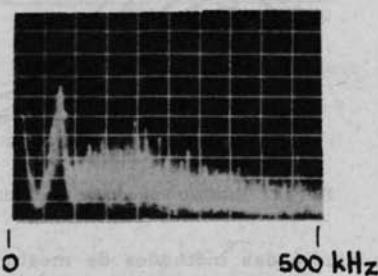


FIG. 6. Spectre basse fréquence

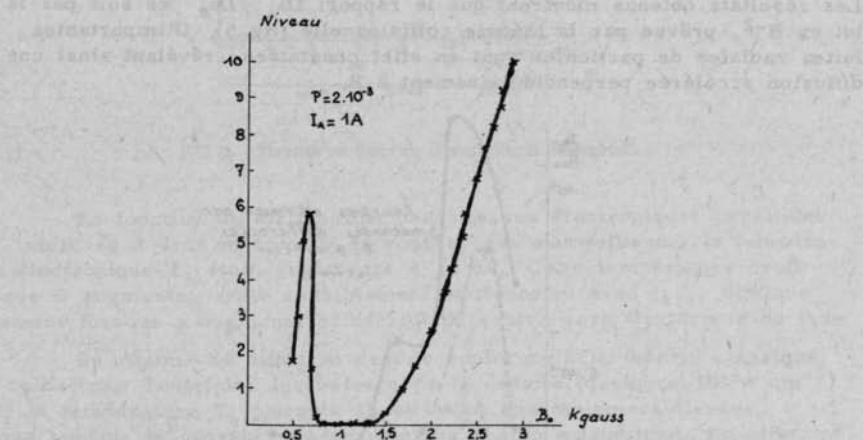


FIG. 7. Emission à 2000 MHz en fonction de B_0

Les deux premières parties ont été étudiées sur des analyseurs de spectre ; la troisième partie a nécessité l'emploi d'un radiomètre. Le signal a été prélevé sur des sondes blindées flottantes, plongées dans le plasma, ou bien des antennes (dipole ou cornet) placées à l'extérieur du tube.

L'importance de ces phénomènes de diffusion anormale et d'émission de bruit nous conduit à étudier le comportement du plasma en fonction du temps.

B - Mesures des grandeurs instantanées -

1. Mesures dans la chambre centrale.

Le signal prélevé sur une sonde de Langmuir flottante est analysé sur un oscilloscope cathodique. Pour séparer les composantes à haute fréquence (HF) et à basse fréquence (BF) du signal, nous avons utilisé des filtres passe-haut ou passe-bas, dont la fréquence de coupure se situe aux environs de 300 KHz.

On constate une émission HF pulsée - ou très fortement modulée - et une oscillation BF très organisée.

Il est fondamental de noter que les signaux HF et BF sont très fortement corrélés : la fréquence de répétition de l'émission HF correspond à la fréquence de l'oscillation BF (fig. 8, 9).

Les déphasages des signaux BF recueillis sur plusieurs sondes identiques placées le long du tube (fig. 10) correspondent à une vitesse de phase inférieure à 10^5 m/seconde (Il est intéressant de rappeler à ce sujet que des mesures spectroscopiques ont indiqué une vitesse des ions, parallèlement à B, au plus égale à quelques 10^4 m/sec.).

D'autre part, les signaux BF obtenus sur des sondes placées à angle droit ou de part et d'autre du tube dans un même plan radial, se trouvent déphasés respectivement de $\frac{\pi}{2}$ et π (fig. 11).

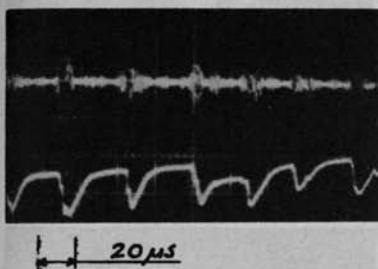


FIG. 8. Corrélation H. F. - B. F.

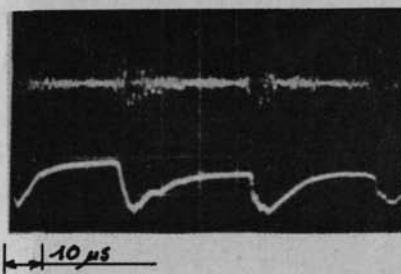


FIG. 9. Corrélation H. F. - B. F.

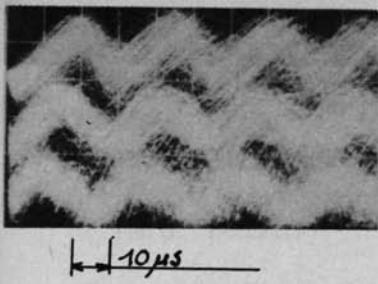


FIG. 10. Déphasage

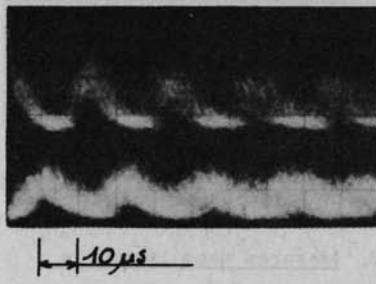


FIG. 11. Déphasage

Les mesures de la luminosité en un point du plasma (fig. 12), effectuées avec un photomultiplicateur, présentent une modulation importante à cette même basse fréquence.



FIG. 12. Luminosité du plasma mesurée avec un photomultiplicateur

On peut donc considérer qu'il s'agit d'une déformation macroscopique hélicoïdale dont la fréquence est de l'ordre de 50 KHz et le pas de un à deux mètres. Cette fréquence croît en fonction de B et reste stationnaire lorsque les autres paramètres varient.

La recherche de l'origine de ces instabilités conduit naturellement à effectuer des mesures analogues dans la région source.

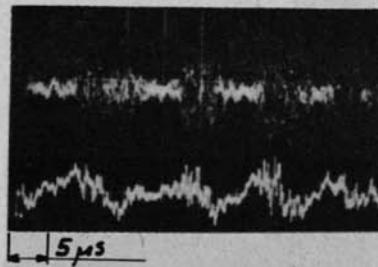


FIG. 13. Corrélation B. F. - H. F.

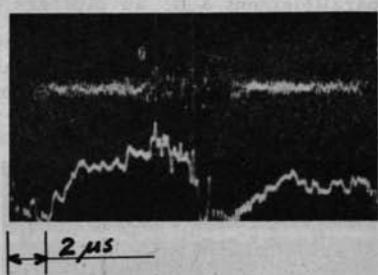
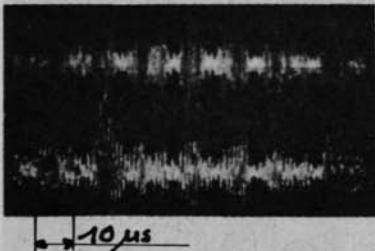
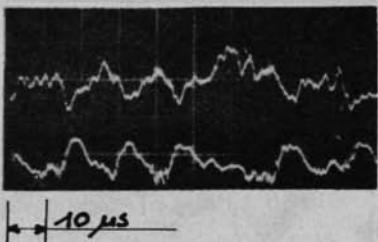


FIG. 14. Corrélation B. F. - H. F.

FIG. 15. Corrélation I_{arc} - I_{sonde}FIG. 16. Corrélation I_{arc} - I_{sonde}

2. Mesures dans la source.

La même analyse des paramètres de la source fait apparaître en particulier que le courant d'arc est profondément modulé par des signaux HF et BF qui sont comme précédemment étroitement corrélés, fig. 13, 14. On constate d'autre part, par l'enregistrement simultané des signaux recueillis dans la source et dans la chambre de mesure (courant I_{arc} et courant sonde sur les fig. 15 et 16), que les composantes HF et BF sont corrélées dans tout le plasma.

C - Commentaires -

Les résultats précédents montrent que le régime de diffusion est caractérisé par deux phénomènes très distincts :

- d'une part, une fraction très importante du plasma produit dans la source s'écoule au travers du miroir,
- d'autre part, dans la chambre de mesure, les variations des coefficients de diffusion sont anormales.

Pour rendre compte de ces mesures, des instabilités d'origines différentes peuvent être considérées : instabilités liées aux propriétés de la colonne, instabilité de dérive par exemple [5], instabilités liées aux propriétés du miroir, pression anisotrope [6] ou fonction de distribution tronquée [7].

La parfaite corrélation entre l'apparition de l'instabilité dans la colonne de diffusion et son apparition dans la source (fig. 15 et 16) montre que le même phénomène est à la fois responsable de la fuite au miroir et de la diffusion accélérée dans la région de mesure.

Ceci nous amène à considérer les causes d'instabilités possibles dans le miroir ou dans la source. Une étude expérimentale a été entreprise séparément, sans champ magnétique, afin d'éliminer le rôle de ce champ ou de son gradient sur l'apparition des instabilités.

IV) - INSTABILITES EN ABSENCE DE CHAMP MAGNETIQUE :

En absence de champ magnétique, les caractéristiques des instabilités observées peuvent se résumer comme suit :

A - Spectre de bruit -

Le spectre de bruit des grandeurs analysées, V_{arc} , I_{arc} , n , $V_{flottant}$ est très voisin de celui observé en présence de champ magnétique. On retrouve comme précédemment :

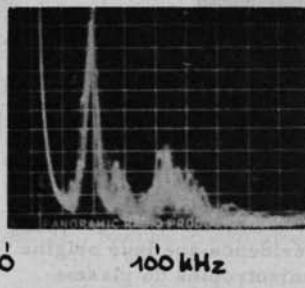


FIG. 17. Spectre B.F.

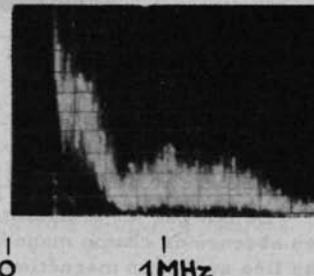


FIG. 18. Spectre H.F.

- Une bande 0 - 3 MHz qui présente deux pics très prononcés ; l'un entre 30 et 100 kHz (fig. 17) et l'autre au voisinage de 1 MHz (fig. 18) correspondant aux fluctuations BF et HF des grandeurs mesurées.

- Une émission à caractère blanc dans un large domaine (30 à 90 MHz) avec un maximum vers 60 MHz.

B - Fréquence de répétition et corrélation -

Les principales caractéristiques du plasma sont analysées sur un oscilloscope cathodique en utilisant, comme pour l'étude avec champ magnétique, des filtres pour séparer les variations basse fréquence (30-100 KHz) des variations haute fréquence (1 MHz). On constate sur les fig. 19 et 20 :

- que l'émission HF est discontinue dans le temps,
- que les fluctuations BF et l'émission HF sont étroitement corrélées. Les caractéristiques du plasma se modifient durant la période d'émission HF. En son absence, le plasma retourne à son état initial.

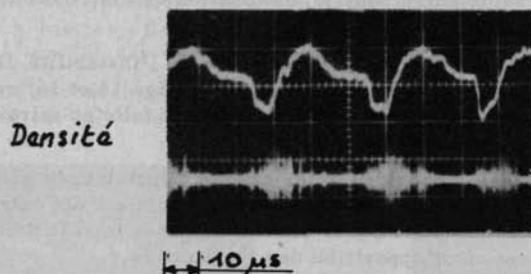


FIG. 19. Corrélation B.F. - H.F.

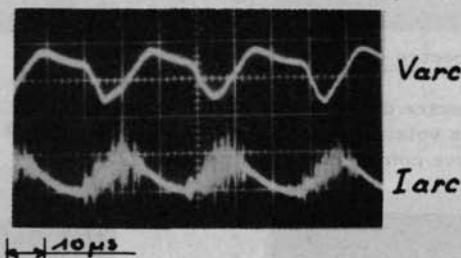


FIG. 20. Corrélation B.F. - H.F.

V) - ORIGINE DES INSTABILITES :

Le fait que les instabilités conservent les mêmes caractéristiques en absence de champ magnétique met en évidence que leur origine n'est pas liée au champ magnétique, mais aux anisotropies du plasma de la source.

A - Anisotropie de la fonction de distribution des vitesses dans la source -

Pour expliquer les fluctuations observées sur la tension d'arc, ou le potentiel flottant (50 ~ 100 Volts), il est nécessaire de faire appel à des particules dont l'énergie est égale ou supérieure à cette valeur. Les particules ne peuvent acquérir cette énergie que dans la gaine où la chute de potentiel est de l'ordre de la tension d'arc comme l'indique la carte de potentiel de la source (fig. 21 et 22).

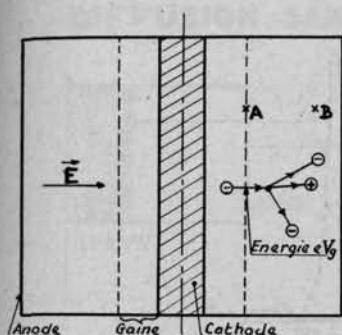


FIG. 21. Schéma de la source

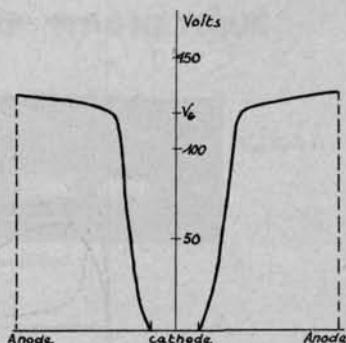


FIG. 22. Répartition du potentiel dans la source

Les mesures de la fonction de distribution des vitesses électroniques dans la source montrent :

- que les électrons émis par la cathode et accélérés dans la gaine forment une population dont les caractéristiques : vitesse dirigée V_{OR} , densité N_R et dispersion en vitesse C_R , sont très différentes de celles de la population des électrons lents résultant de l'ionisation des neutres (fig. 23 et 24).
- que la dispersion en vitesse C_R des électrons rapides dans le plasma est plus grande que celle due au seul mécanisme des collisions.

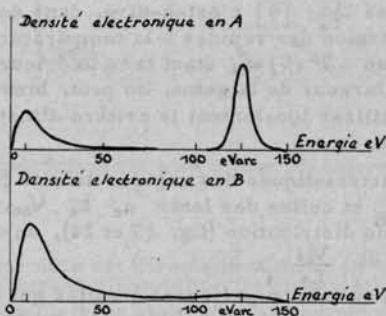


FIG. 23. Fonctions de distribution des électrons aux points A (limite de la gaine) et B

B - Instabilités électrostatiques -

La relation de dispersion des ondes électrostatiques se propageant dans un plasma homogène et infini est donnée par :

$$1 = \sum \frac{\omega_p^2}{k} \int \frac{1/n_{ej} \frac{\partial f_0}{\partial v}}{v - \frac{\omega}{k}} dv$$

où ω_p et f_0 sont les fréquences plasma et les fonctions de distribution des vitesses. Si ces distributions sont des maxwelliennes déplacées,

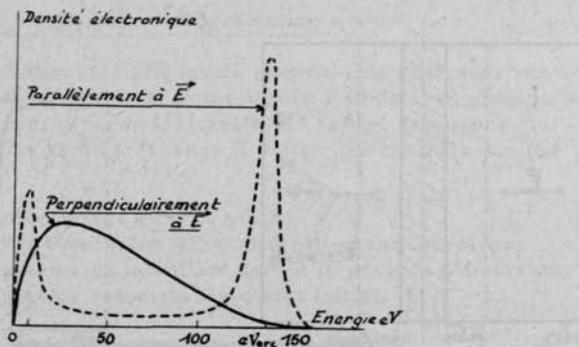


FIG. 24. Fonctions de distribution des électrons dans les directions parallèle et perpendiculaire à E

la relation prend la forme étudiée par plusieurs auteurs [8]

$$k^2 + \sum_j D_j^{-2} G(Z_j) = 0$$

avec $D_j = \frac{C_j}{\omega_{pj}}$, $Z_j = \frac{\omega - kV_{oj}}{kC_j}$, $G(Z_j) = 1 + Z_j e^{-Z_j^2} (i\sqrt{\pi} - 2 \int_0^{Z_j} e^{-u^2} du)$

où C_j est la dispersion en vitesse ou la température, V_{oj} la vitesse dirigée, j caractérisant dans notre expérience les trois populations $j = i$ les ions, $j = e$ les électrons, $j = R$ les électrons rapides.

La vitesse relative ion-électron nécessaire pour exciter des instabilités ioniques telles que $kV_{oi} < \omega < kV_{or}$ dépend essentiellement du rapport des températures $\frac{C_i}{C_e}$ [9] c'est-à-dire, dans notre cas, du rapport $\frac{C_i}{C_R}$ de la dispersion des rapides à la température des ions. La distance de Debye ionique $D_i = C_i \omega_{pi}$ étant très inférieure au rayon de la source et même à la largeur de la gaine, on peut, bien que le plasma ne soit pas uniforme, utiliser localement le critère d'instabilité déduit de l'équation précédente.

Avec les caractéristiques des rapides densité N_R , vitesse V_{OR} dispersion en vitesse C_R et celles des lents n_e, C_e, V_{oe} déduites des mesures de la fonction de distribution (fig. 23 et 24), on obtient pour les rapports $\frac{C_i}{C_R} > 0,5 \cdot 10^{-2}$ et $\frac{V_{or}}{C_R} > 5$

Ces valeurs sont très supérieures à celles qui sont nécessaires pour rendre les ondes ioniques instables $kV_{oi} < \omega < kV_{or}$. Ces ondes semblent bien rendre compte des instabilités HF observées et la raison physique qui permet de les exciter est que la dispersion des rapides C_R est très supérieure à la vitesse thermique des ions C_i .

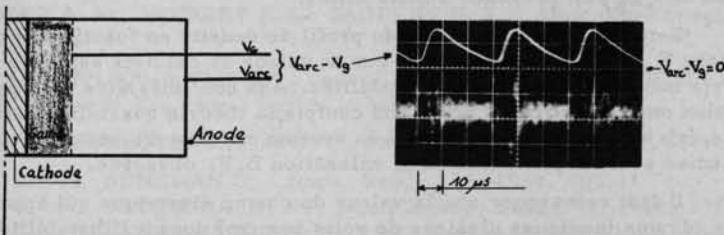
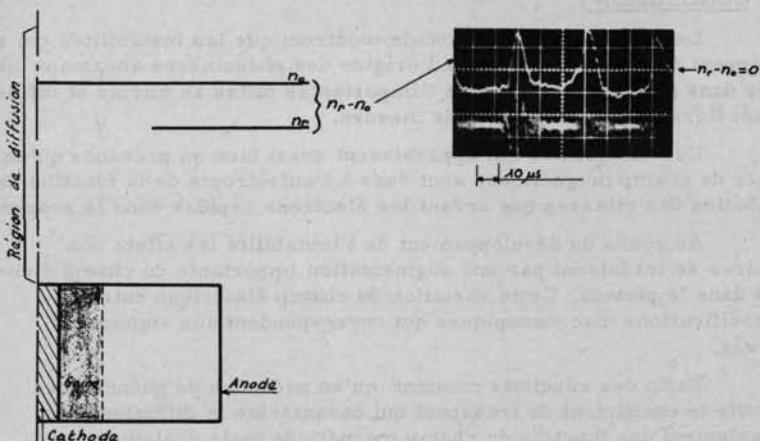
VI) - DIFFUSION ANORMALE :

Le champ électrique radial E_A et la densité sont reliés, lorsque la diffusion est ambipolaire, par la relation :

$$E_A = \frac{D_i - D_e}{\mu_i - \mu_e} \frac{\nabla n}{n} \approx \frac{kT_e}{e} \frac{\nabla n}{n}$$

Les figures 25 et 26 représentent les variations dans le temps de la chute de potentiel dans le plasma de la source ($V_{anode} - V_{gaine}$) et la variation du gradient de densité dans la région de diffusion (∇n proportionnel à $n_o - n_R$) en absence de champ magnétique.

DIFFUSION SANS CHAMP MAGNETIQUE

FIG. 25. $V_{arc} - V_{gaine}$ FIG. 26. Mesure de la différence entre la densité à une distance r du centre (n_r) et la densité au centre (n_0)

La diffusion anormale est directement mise en évidence sur ces mesures où l'on voit que durant l'instabilité, le champ électrique dans le plasma augmente considérablement alors que le gradient de densité décroît puis s'inverse.

Cette inversion du gradient de densité montre bien que la relation ambipolaire précédente n'est pas satisfaite et qu'en absence de champ magnétique le coefficient de transport $\langle D_0 \rangle$ qui caractérise la diffusion anormale est fonction du champ électrique E ;

Ceci entraîne qu'en présence de champ magnétique ce coefficient de transport $\langle D_B \rangle$ n'est pas seulement fonction de B^2 comme l'indique la théorie ambipolaire :
mais dépend également de E *.

* Cette remarque nous a été suggérée par le Dr. Simon au cours d'une visite à Saclay.

On voit donc qu'en général la connaissance des deux relations $\langle D_o \rangle = f(E)$ et $E = g(B)$ est nécessaire pour atteindre la loi de variation de $\langle D_B \rangle$ en présence d'instabilités.

Cette variation anormale du profil de densité en fonction du champ électrique E s'explique par le fait que la valeur de celui-ci est fixée par les effets non linéaires dus aux instabilités. Aux non linéarités du type interaction ondes-particules dont rend compte la théorie quasi-linéaire par exemple, s'ajoutent ici celles liées à la section efficace d'ionisation. Ces mécanismes sont responsables de la relaxation B.F. observée.

Il faut remarquer que la valeur du champ électrique qui apparaît dans le plasma (quelques dizaines de volts par cm) durant l'instabilité permet d'expliquer le passage des particules à travers le miroir et la température mesurée dans la colonne de diffusion en présence du champ magnétique.

VII) - CONCLUSION :

Les résultats de cette étude montrent que les instabilités qui se développent dans la source sont à l'origine des phénomènes anormaux observés dans la colonne de plasma : importantes fuites au miroir et diffusion accélérée dans la chambre de mesure.

Ces instabilités qui apparaissent aussi bien en présence qu'en absence de champ magnétique, sont dues à l'anisotropie de la fonction de distribution des vitesses que créent les électrons rapides dans la source.

Au cours du développement de l'instabilité les effets non linéaires se traduisent par une augmentation importante du champ électrique dans le plasma. Cette variation du champ électrique entraîne des modifications macroscopiques qui correspondent aux signaux BF observés.

Enfin ces résultats montrent qu'en présence de phénomènes collectifs le coefficient de transport qui caractérise la diffusion n'est pas seulement une fonction du champ magnétique mais également une fonction du champ électrique qui résulte des non-linéarités liées aux instabilités.

REMERCIEMENTS :

Nous tenons à remercier tout particulièrement M. Legrand et M. Privé dont le concours nous a été précieux au cours de cette étude.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 - GREGOIRE M. : Thèse de Doctorat, Paris, 1965.
BRIFFOD G., GREGOIRE M. : Int. Symp. on Diffusion, Munich (1964).
- 2 - Voir par ex. LEHNERT B.O., HOH F.C. : Phys. of Fluids 3, 1960, 600
KADOMTSEV B.B., NEDOSPASOV A. : J. Nucl. Energy Part C I, 1960,
230.
ALLEN T.K., PAULIKAS G.A., PYLE R.V. : Phys. Rev. 5, 1960, 409
- 3 - BERNARD M., BRIFFOD G., FRANK R., WEISSE J. : Int. Symp. on Diffusion, Munich (1964).

- 4 - BERNARD M., BRIFFOD G., FRANK R., WEISSE J. : VII Int. Conf. Phenomena in Ionized Gases, Beograd (1965) à paraître.
- 5 - GALEEV A.A., MOISEEV S.S., SAGDEEV R.Z. : Atomnaja Energija 15, 1963, n° 6
- 6 - ADVANCED PLASMA THEORY, course 25 edited by M. N. ROSENBLUTH Acad. Press N.Y., chap. Topics in Microinstabilities p. 137.
- 7 - M. N. ROSENBLUTH, R.F. POST : Phys. of Fluids, 8, 1965, 547
- 8 - Voir par ex. BUNEMAN O. : Phys. Rev., 115, 1959, 503
JACKSON J.D. : J. Nucl. Energy Part C I, 1960, 171
STRINGER T.E. : J. Nucl. Energy Part C, 1964, 267
- 9 - ATLEE - JACKSON E. : Phys. of Fluids, 3, 1960, 786.



LANDAU DAMPING OF ELECTRON PLASMA WAVES

J.H. MALMBERG, C.B. WHARTON AND W.E. DRUMMOND
GENERAL ATOMIC DIVISION, GENERAL DYNAMICS CORPORATION,
SAN DIEGO, CALIF., UNITED STATES OF AMERICA

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

LANDAU DAMPING OF ELECTRON PLASMA WAVES. It has been predicted by Landau that longitudinal electron waves in a plasma of finite temperature are damped, even in the absence of collisions. The validity of the theory has been challenged on various grounds. Experimental verification is desirable both because the damping is an important phenomena and because the method of calculation has been widely used for related problems. We have measured the damping of electron plasma waves propagating along a cylindrical plasma column immersed in a magnetic field. The plasma matches the assumptions of the theory, namely, collisions are so rare as to produce negligible damping, the number of particles in a Debye sphere is large, the plasma radius is large compared to the Debye length, and the electron velocity distribution function is Maxwellian. The frequency, wavelength and damping length of the waves are measured. The electron velocity distribution function is measured for electron velocities corresponding to the range of wave phase velocities. We observe heavy exponential damping of the waves in a density range where collisional damping is negligible. The magnitude of the observed damping and its dependence on phase velocity are predicted accurately, without any normalizations, by the theory of Landau. The plasma boundary conditions may be adjusted to remove electrons exceeding a given velocity from the plasma. When the velocity at which the distribution function is truncated is reduced to the phase velocity of the wave, the wave damping decreases dramatically. By making this measurement as a function of wave phase velocity, we establish that the damping is caused by a very few electrons travelling in the direction of and at the phase velocity of the wave, as expected from theory.

AMORTISSEMENT DE LANDAU DES ONDES DE PLASMA ELECTRONIQUE. Landau avait prévu que les ondes électroniques longitudinales dans un plasma de température finie sont amorties, même en l'absence de collisions. On a contesté, pour diverses raisons, la validité de cette théorie. Il est souhaitable d'en faire la vérification expérimentale à la fois parce que l'amortissement est un phénomène important et parce que la méthode de calcul a été largement utilisée pour des problèmes connexes. Les auteurs ont mesuré l'amortissement d'ondes de plasma électronique se propageant le long d'une colonne de plasma cylindrique plongée dans un champ magnétique. Le plasma se comporte comme prévu, c'est-à-dire que les collisions sont si rares qu'elles ne produisent qu'un amortissement négligeable, le nombre de particules dans une sphère de Debye est important, le rayon de plasma est grand par rapport à la longueur de Debye, et la fonction de distribution des vitesses électroniques est maxwellienne. Les auteurs ont mesuré la fréquence, la longueur d'onde et la longueur d'amortissement des ondes. Ils ont mesuré la fonction de distribution des vitesses électroniques pour des vitesses d'électrons correspondant à la gamme des vitesses de phase des ondes. Ils ont observé un fort amortissement exponentiel des ondes dans un intervalle de densités où l'amortissement par collisions est négligeable. La théorie de Landau permet de prévoir de façon exacte, sans aucune normalisation, la grandeur de l'amortissement observé et sa dépendance à l'égard de la vitesse de phase. On peut ajuster les conditions aux limites du plasma pour écarter du plasma les électrons dont la vitesse dépasse une valeur donnée. Lorsque la vitesse à laquelle la fonction de distribution est tronquée est réduite à la vitesse de phase de l'onde, l'amortissement de l'onde décroît fortement. En procédant à cette mesure en fonction de la vitesse de phase de l'onde, les auteurs ont établi que l'amortissement est causé par quelques rares électrons se déplaçant dans la direction de l'onde et à la vitesse de phase de cette onde, comme prévu d'après la théorie.

ЛАНДАУСКОЕ ЗАТУХАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН. Ландау предсказал затухание продольных электронных волн в плазме конечной температуры даже при отсутствии столкновений. Правильность этой теории подверглась сомнению по различным причинам. Экспериментальное подтверждение желательно как из-за того, что затухание представляет собой важное явление, так и потому, что метод расчетов широко использовался для решения родственных проблем. Мы измерили затухание электронных плазменных волн, распространяющихся по цилиндрическому столбу, помещенному в магнитное

поле. Плазма соответствует предположениям теории; а именно, столкновения столь редки, что возникает лишь незначительное затухание; число частиц в сфере Дебая велико, радиус плазмы по сравнению с длиной Дебая является большим, а функция распределения электронов по скоростям — максвелловским. Измерялась частота, длина волны и длина затухания волн. Для скоростей электронов, соответствующих диапазону фазовых скоростей волн, измерена функция распределения скоростей электронов. Мы наблюдаем сильное экспоненциальное затухание волн в диапазоне плотности, где столкновительное затухание является незначительным. Теория Ландау точно, без всяких нормализаций, предсказывает величину наблюдавшегося затухания ее зависимость от фазовой скорости. Границные условия плазмы могут быть подобраны так, чтобы удалить из плазмы электроны, превышающие данную скорость. Когда скорость, при которой функция распределения обрезается, уменьшается до фазовой скорости волны, затухание волн резко уменьшается. Производя это измерение как функцию фазовой скорости волны, мы устанавливаем, что затухание вызывается очень небольшим количеством электронов, двигающихся в направлении волн и имеющих фазовую скорость волны, как и следовало ожидать из теории.

AMORTIGUAMIENTO DE LANDAU DE LAS ONDAS DE PLASMA ELECTRÓNICO. Según la teoría de Landau, las ondas electrónicas longitudinales en un plasma de temperatura finita están amortiguadas aun en ausencia de colisiones. Por diversos motivos, se ha puesto en tela de juicio la validez de esta teoría. La verificación experimental es deseable, tanto porque el amortiguamiento es un fenómeno importante cuanto porque el método de cálculo se ha aplicado extensamente a problemas conexos. Los autores midieron el amortiguamiento de ondas de plasma electrónico que se propagaban a lo largo de una columna de plasma situada en un campo magnético. El plasma satisface los supuestos teóricos; las colisiones son tan raras que el amortiguamiento debido a ellas es despreciable; el número de partículas contenidas en una esfera de Debye es elevado; el radio del plasma es grande comparado con la longitud de Debye; la función correspondiente a la distribución de las velocidades de los electrones es maxwelliana. Los autores midieron la frecuencia, la longitud de onda y la longitud de amortiguamiento de las ondas. Determinaron también la distribución de velocidades de los electrones para valores correspondientes al intervalo de velocidad de fase de la onda. Observaron un marcado amortiguamiento exponencial de las ondas en un intervalo de densidades en el cual puede despreciarse el amortiguamiento por colisiones. La teoría de Landau predice con exactitud, sin normalizaciones de ninguna índole, la magnitud del amortiguamiento observado y su relación con la velocidad de fase. Las condiciones de contorno del plasma pueden ajustarse para extraer del mismo los electrones cuya velocidad supere un determinado valor. Cuando la velocidad a la cual queda truncada la función de distribución se reduce a la velocidad de fase de la onda, el amortiguamiento de esta última decrece en forma muy acentuada. Efectuando esta medición en función de la velocidad de fase de la onda, los autores establecieron que el amortiguamiento es causado por unos pocos electrones que se desplazan en la dirección de la onda y a la velocidad de fase de la misma, como cabría esperar según la teoría.

I. INTRODUCTION

It has been predicted by Landau [1] that electrostatic electron waves in a plasma of finite temperature will be damped, even in the absence of collisions. The theory has been challenged on various grounds [2] and a number of experiments designed to detect the effect for electrostatic electron waves or ion acoustic waves have been reported [3]. The existence of the damping is of interest not only for its own sake, but because the method of calculation has been widely used for related problems. We report here measurements of the damping of electron waves propagating along a cylindrical column immersed in a magnetic field. The experimental results agree in detail with the theory of Landau.

II. THEORY

The theory of spatial Landau damping in an infinite homogeneous medium [1] can be generalized, in the limit of large magnetic field, to the case of a plasma which is inhomogeneous in the direction perpendicular to the magnetic field [4]. The result is

$$\nabla_{\perp}^2 \phi = - k_{\perp}^2 \phi = e k_{\parallel}^2 \phi \quad (1)$$

where k_{\parallel} is the (complex) eigenvalue for a given frequency, ω , and

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi e^2}{mk} \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} \frac{\frac{\partial f_0(v, v_{\perp})}{\partial v_{\parallel}}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} \quad (2)$$

For a Maxwellian plasma with mean thermal speed $\bar{v} = KT/m$, and plasma frequency, ω_p , ϵ is approximately given by

$$\epsilon = \epsilon_r + i\Gamma \quad (3)$$

where

$$\epsilon_r \approx 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \left(1 + \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^4} + \dots \right) \quad (3a)$$

$$\Gamma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 x e^{-x^2/2} \quad (3b)$$

and we have defined

$$x \equiv \frac{\omega}{k_{\parallel} \bar{v}} \quad (4)$$

The function $(\nabla^2 \phi)/k_{\parallel}^2 \phi$ depends only on $k_{\parallel} a$ and is generally a decreasing function of the mean radius of the plasma, a ; that is, $(k_{\perp}/k_{\parallel})^2 = f(k_{\parallel} a)$ and $f' < 0$, where f is different for different radial distributions. For example in a cylindrical plasma of uniform density with radius a , and $k_{\parallel} a \gg 1$

$$\left(\frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \right)^2 = \left(\frac{P_{nv}}{k_{\parallel} a} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (5)$$

where P_{nv} is the v^{th} zero of the n^{th} order Bessel function. For a slab plasma with a density variation in the y direction of the form $n = n_0/\cosh^2(y/a)$

$$\left(\frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \right)^2 = \frac{n(n+1)}{(k_{\parallel} a)^2} + \frac{(2n+1)}{k_{\parallel} a}, \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (6)$$

However, it is not necessary to measure the radial density distribution to calculate the damping if the group velocity is measured, as we will now show.

The dispersion relation can be written as

$$(\epsilon_r + f) + i\Gamma = 0 \quad (7)$$

Letting $k_1 = \text{Im}(k_{\parallel})$, $k_r = \text{Re}(k_{\parallel})$, and assuming $k_1 \ll k_r$, k_r and k_1 can be found by expanding $(\epsilon_r + f)$ around $k_{\parallel} = k_r$ to give

$$(\epsilon_r + f) = 0 \quad (8a)$$

$$ik_1 \left[\frac{d(\epsilon_r + f)}{dk_{\parallel}} \right]_{k_r} + i\text{Re}\Gamma = 0 \quad (8b)$$

where we have neglected $\text{Im}\Gamma$.

From Eq. (8a) we have

$$\frac{\partial(\epsilon_r + f)}{\partial k} = - \frac{\partial(\epsilon_r + f)}{\partial \omega} \left(\frac{d\omega}{dk} \right) = - \frac{\partial \epsilon_r}{\partial \omega} v_g \quad (9)$$

since f is not a function of ω and $d\omega/dk = v_g$, the group velocity. From Eq. (3a),

$$\frac{\partial \epsilon_r}{\partial \omega} = + \frac{2}{\omega} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \left(1 + \frac{6}{x^2} + \frac{15}{x^4} + \dots \right) \quad (10)$$

and using Eq. (9)

$$\frac{\partial(\epsilon_r + f)}{\partial k} = - \frac{2}{\omega} v_g \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \left(1 + \frac{6}{x^2} + \frac{15}{x^4} + \dots \right) \quad (11)$$

Inserting this in Eq. (8b) and using Eq. (3b) for the real part of Γ we obtain

$$\frac{k_i}{k_r} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{\bar{v}}{v_g} \right) \frac{x^4 e^{-x^2/2}}{\left(1 + \frac{6}{x^2} + \frac{15}{x^4} + \dots \right)} \quad (12)$$

In Eq. (12), $x = \omega/k_{\parallel}\bar{v}$ can be replaced by $x_r = (\omega/k_r\bar{v})$ without loss of accuracy except in the exponent, where we have

$$x^2 = x_r^2 \left(1 - 21 \frac{k_i}{k_r} \right).$$

Our final result is thus

$$\frac{k_i}{k} = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{\bar{v}}{v_g} \right) x_r^4 e^{-x_r^2/2} \cos \left(x_r^2 \frac{k_i}{k_r} \right)}{\left(1 + \frac{6}{x_r^2} + \frac{15}{x_r^4} + \dots \right)} \quad (13)$$

It can be shown the corrections to Eq. (13) for the effect of finite magnetic field are less than 1% for the present experiment ($\Omega/\omega_0 \approx 3$). The purpose of the present experiment is to test Eq. (13). All quantities appearing in the equation are measured. Note that the radial density distribution does not appear explicitly.

III. DESCRIPTION OF THE PLASMA

A schematic diagram of the machine which produces the plasma [5] is given in Fig. 1. The plasma is produced in a duoplasmatron arc source and drifts from it into a long uniform magnetic field of a few hundred gauss. Since the duoplasmatron has a magnetic field of approximately 3 kilogauss at its orifice, there is a strong magnetic mirror at its end of the machine. At the other end, the ions are attracted to the negatively charged end plate and die, but the electrons are reflected by the electrostatic field and return to the magnetic mirror. Some electrons are scattered out of the loss cone by the time they return to the mirror, and are captured in the plasma. Thus, the electrons are contained at one end by a magnetic mirror and at the other end by an electrostatic field. The ions are not contained; they simply flow through the machine, providing a background of positive charge. The entire machine is steady-state. The suppressor grid is held 15 volts negative with respect to the end plate to prevent the secondary electrons due to ions striking the end plate from being injected into the plasma. It is important to note that electrons whose velocity along the magnetic field is several times the mean thermal velocity are preferentially in the loss cone. These electrons are not contained. Since they are in the loss

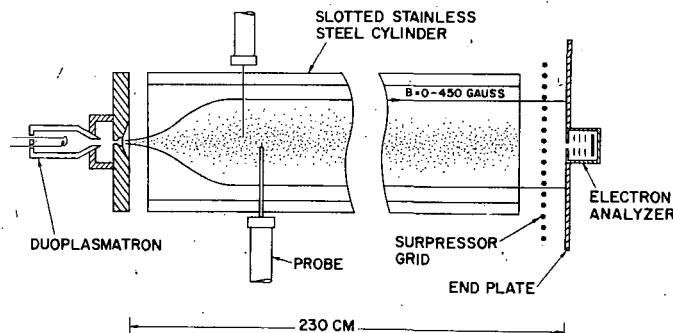


FIG. 1. Schematic diagram of the machine.

cone they enter the collision dominated region at the orifice of the duoplasmatron and die after one transit to the end plate and back. If the end plate is not sufficiently negative to reverse the motion of these electrons, they are lost to the end plate of the machine. In this situation, the electron velocity distribution function in the machine is normal in the downstream direction (from duoplasmatron to end plate) but truncated at a velocity determined by the end plate potential in the upstream direction. This circumstance enables us to remove a few electrons from the velocity distribution; in fact, just those electrons which cause Landau damping for waves propagating toward the duoplasmatron. The damping of waves propagating in the other direction is not affected.

An electron velocity analyzer is mounted behind a 1 mm diameter hole in the end plate. Electrons in line with the hole and with enough energy to reach the end plate pass into the analyzer. By means of a series of grids the analyzer rejects any ions which enter it, and measures current of electrons with energy greater than a given adjustable value. Thus we obtain the part of the electron velocity distribution function of interest for damping experiments by direct measurement. A typical result is shown in Fig. 2. The ordinate is the logarithm of electron current. The abscissa is electron energy measured in electron volts and on a separate scale, in units of the mean thermal energy. This is a plot of $\int E F(E)dE$. The straight curve on this semi-log plot proves that the distribution function is decreasing exponentially with energy for this range of electron energies, i.e., it is Maxwellian. The temperature of the plasma may be obtained directly from the slope of the curve to an accuracy of about 5%. We have differentiated such data electronically as the analyzer voltage is swept, obtaining the distribution function itself, and obtained the same conclusion. The range of electron energies shown in Fig. 2 corresponds to the relevant velocities for the associated damping data. The distribution function is measured at various radii by varying the position of the plasma with magnetic correction coils and the plasma temperature is not a function of radius.

For a given gas in the arc (usually H_2), the plasma temperature is determined almost entirely by the relationship of pressure in the duoplasmatron to arc current. At a fixed current the temperature rises as the pressure is reduced, at first very slowly and then rapidly, until a point is reached at which the arc goes out. Temperatures range from 5 to 20 ev. The radial distribution of plasma density as measured by ion saturation current to a Langmuir probe is given in Fig. 3. The radial size is influenced by the adjustments of the machine, especially by the magnitude of the magnetic field. The central density is typically $10^8 - 10^9$ electrons/cm³. In the pressure range where the temperature is not very sensitive to arc current, the density of the plasma is almost directly proportional to arc current. The density is also a function of longitudinal position, since the ions diffuse radially as they drift down the machine. This diffusion process is much too fast to be the result of two-body collisions. It is not understood

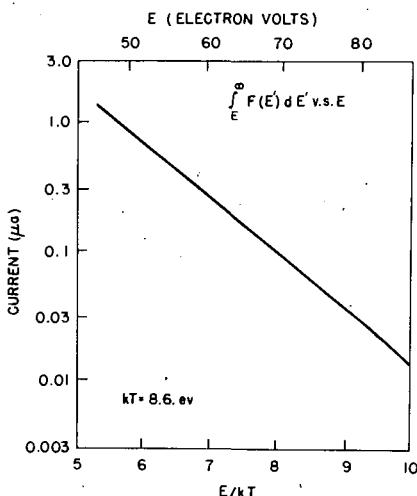


FIG. 2. $\int_{E}^{\infty} F(E') dE'$ versus E .

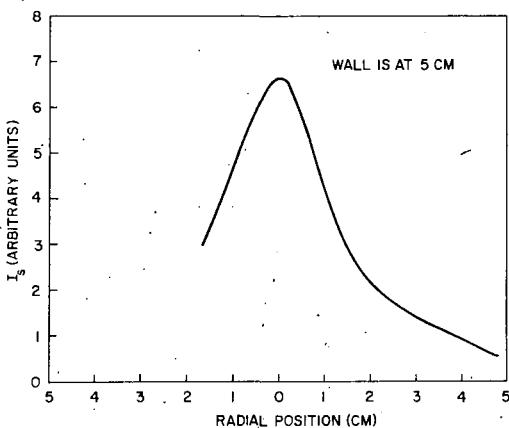


FIG. 3. Radial density distribution.

at this time. Typically the central density decreases a factor of two from one end of the machine to the other.

The machine is pumped by two 10" diameter oil diffusion pumps with liquid nitrogen cooled baffles to remove neutrals escaping from the source and neutralized ions which have hit the end plate. The background pressure is typically 1.7×10^{-5} torr (mostly hydrogen). The electron mean free path for electron-ion collisions is of the order of 1000 meters and for electron-neutral collisions is about 40 meters. Thus the damping length due to collisions is of the order of 40 meters. Since the measured damping lengths are in the range 2 to 50 cm, collisional damping is completely negligible. Debye length is typically 1 mm, and the number of particles in a Debye sphere about 10^6 . The machine thus provides us with a plasma which matches all the assumptions of the theory and whose electron velocity distribution function is known.

The density of ions and electrons in the plasma must be approximately equal, both in the main part of the machine and in the collision dominated orifice of

the duoplasmatron. The ions acquire a much larger Larmor radius than the electrons at the point of injection, and some electrons are contained while the ions are not. Both effects tend to increase the relative electron density. To maintain quasi-neutrality, the center of the plasma charges negatively with respect to the duoplasmatron anode by roughly 3 KT. When the duoplasmatron anode is grounded, the center of the plasma is about 3 KT negative with respect to the grounded stainless steel cylinder bounding the plasma, and a radial electric field of a few volts per centimeter is established. This radial field crossed into the longitudinal magnetic field produces an $E \times B$ rotation of the plasma and an associated instability. This rotation is readily observed with probes. The rotation may be prevented by removing the radial electric field. As the potential of the duoplasmatron anode is varied from ground to positive values, the rotation slows, stops, and then begins again in the opposite direction. For the experiments reported here, the anode potential was adjusted to prevent the rotation. This phenomenon will be reported in more detail elsewhere. The fluctuations in ion saturation current to a Langmuir probe are less than 1% when the anode potential is adjusted so the plasma does not rotate. The strongest component of the fluctuations is 360 cycle ripple which directly reflects the ripple in the arc current supply. The remaining noise is less than 1% and contains frequencies from almost zero to many megacycles. Some of this noise is due to sheath noise at the probe; some of it represents actual fluctuations of the plasma.

IV. WAVE MEASUREMENTS

The dispersion and damping measurements, which have previously been the subject of a preliminary report [6], are made in the following manner:

Two probes, each consisting of a 0.2 mm diameter radial tungsten wire are placed in the plasma. One probe is connected by coaxial cable to a chopped amplifier driven by a signal generator. The other probe is connected to a receiver which includes a tuned rf amplifier with a bandwidth of about 2 megacycles, a string of broad-band amplifiers, an rf detector, a video amplifier, and a coherent detector operated at the transmitter chopping frequency.

For some measurements we use a sharp rf filter in the receiver to obtain a band-width of about 200 kilocycles. Provision is made to add a reference signal from the transmitter to the receiver rf signal with a balanced mixer, i.e., we may use the system as an interferometer. The reference signal, which is not chopped, is orders of magnitude larger than the received signal, so the chopped part of the interferometer output is linear with the received rf signal for at least 30 db. The contribution of the unchopped reference signal to the detected signal is steady state and rejected by both the video amplifier and the coherent detector.

The transmitter is set at a series of fixed frequencies, and at each, the receiving probe is moved longitudinally. The position of the receiving probe, which is transduced, is applied to the x axis of an x-y recorder, and the interferometer output, its logarithm, or the logarithm of the received power is applied to the y axis.

Typical raw data are given in Fig. 4. The slope of the power curve is the e-folding length for power damping of the wave. In the case shown this is accurately exponential for two orders of magnitude, and in fact more, since the range is limited by the range of the logging circuit. The wave power in the plasma is of the order of $1 \mu\text{W/cm}^2$. A 30 db reduction in transmitter power does not change the damping length. The signal decreases smoothly as the probe is retracted radially with a half-maximum diameter about equal to that of the density profile. The distance between maxima on the interferometer curve is the wavelength, which can be determined to 2% over most of the range of the experiment. (Since the wave is damped, the distance between maxima is slightly less than one wavelength. The correction, which can be accurately determined from the damping data, is too small to be important in most cases.)

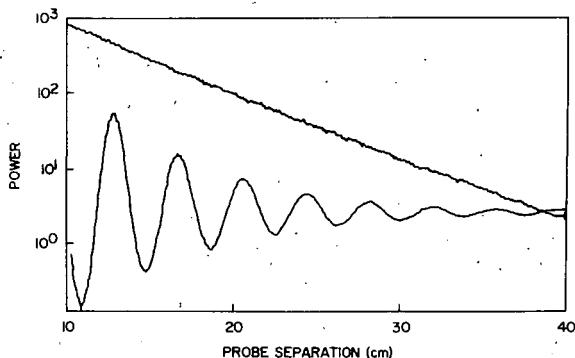


FIG. 4. Raw data. Upper curve is the logarithm of received power. Lower curve is interferometer output. Abscissa is probe separation.

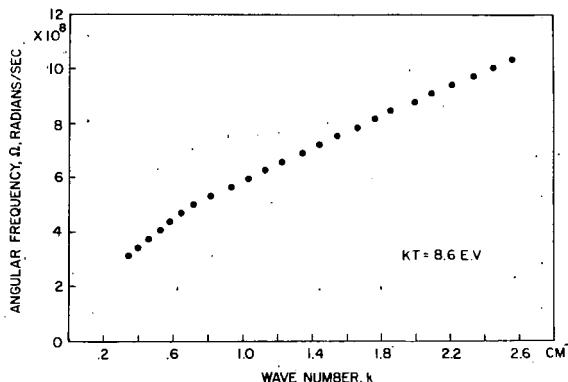
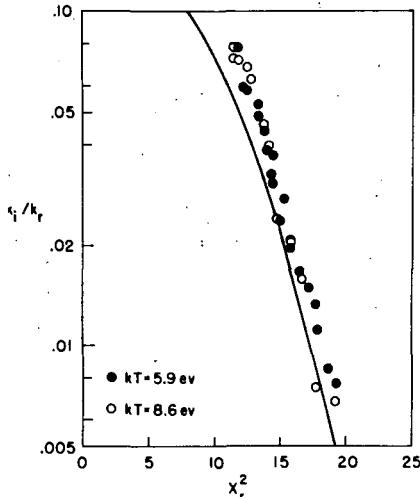


FIG. 5. Dispersion curve.

From data such as Fig. 4 we determine, as a function of frequency the real and imaginary parts of the parallel wave number, ($k_{\parallel} = 2\pi/\lambda$, $k_1 = 1/2\lambda$). A typical measured dispersion relation for the waves is plotted in Fig. 5. These data have not been analyzed in detail, but the absolute magnitude and shape of the curve are approximately as expected for longitudinal electron oscillations in a strong magnetic field when the radial density distribution and finite temperature are included in the theory. The dispersion is dominated by the radial density distribution, and to obtain an exact fit to the dispersion curve, the actual density profile would have to be put into the theory, presumably numerically.

In Fig. 6, we compare the measured damping with the theory. The ordinate is the ratio of the imaginary to the real part of longitudinal wave number and the abscissa is the square of the ratio of the phase velocity to the mean thermal velocity. The ratio k_1/k_{\parallel} and the phase velocity of the wave (the product of the wave length and frequency) are obtained directly from data like Fig. 4. Since we have shown previously that the electron velocity distribution is a Maxwellian and measured its temperature, the mean thermal velocity is also known experimentally.

The experimental points are from two separate sets of data taken with different plasma parameters, especially a temperature difference by about 50%. The magnitude of the damping at any given phase velocity for these two sets of data is different by an order of magnitude. However, when the phase velocity is

FIG. 6. k_i/k_r versus x_r^2 .

normalized to the mean thermal velocity agreement is obtained. To compute the theory, we require the ratio of the mean thermal velocity to the group velocity. The slope of the dispersion curve, ($\text{Fig. } 5$), dv/dk , is the group velocity, so this quantity too is experimentally measured. The ratio is not sufficiently different between the two sets of data to significantly affect the theoretical curve. Thus the theoretical curve is not subject to any normalization. The experimental data have also not been normalized in any manner. We have not attempted to assign errors to the data but some idea may be obtained from the scatter of the points, which is typical of several similar sets of data. The most important systematic error in $\text{Fig. } 6$ is due to the uncertainty of about 5% in the temperature measurement, which is sufficient to completely account for the small horizontal shift between the theoretical curve and the experimental points.

Figure 6 demonstrates that the magnitude of the damping, its dependence on phase velocity, and its dependence on plasma temperature, are as predicted by Landau. The damping lengths observed range from 2 cm to 50 cm while the electron mean free path, which is roughly the collisional damping length, is of the order of 40 m. Damping due to currents in the boundary shield, wave scattering from irregularities in the plasma, and from wave-wave scattering from noise in the plasma have been estimated and also appear to be orders of magnitude too small to explain the result. And none of these effects are expected to give a damping with such a strong dependence on phase velocity.

The damping observed for wave propagation in the upstream and downstream directions agrees within the random errors when plotted against x_r^2 , provided that the end plate is sufficiently negative to contain all the electrons. To test the effect of end plate potential on the damping, we have observed the power transmission between two fixed probes as a function of end plate voltage. This is a very sensitive way to observe small changes in damping length since the received power depends exponentially on damping length. For downstream propagation the signal is almost independent of end plate potential. For propagation in the upstream direction, the signal is almost independent of the end plate potential until a particular voltage is reached, and then switches to a much larger value. This voltage corresponds to the "escape energy" of the electrons producing the damping, and allowing for the plasma potential, may be converted to the velocity of these electrons in the plasma. Only one electron in 10^3 to 10^4 is escaping the plasma when the abrupt change in damping occurs. By repeating the measurement at a variety of frequencies (and thus various phase

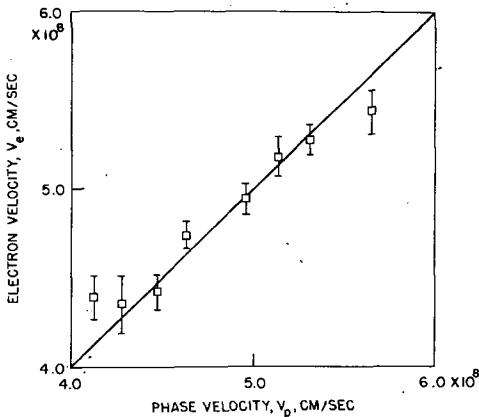


FIG. 7. Electron velocity versus wave phase velocity.

velocities) we obtain the velocity of the electrons producing the damping as a function of wave phase velocity. The result, shown in Fig. 7, demonstrates that the damping is caused by electrons traveling at the phase velocity of the wave, as expected from theory.

The stainless steel cylinder bounding the plasma at 5 cm acts as a wave guide beyond cutoff to suppress direct capacitive coupling between the probes. The limit for the short wavelength measurements is reached when the damping length for the waves becomes approximately equal to the attenuation length of the much stronger direct capacitive signal. The phase of the direct capacitive signal changes very slowly as a function of position along the wave guide (in an idealized system, not at all), and thus the phase of the reference signal in the interferometer may be adjusted to reject this component of the received signal. We are able to discriminate against the direct signal by 20-30 db by this method. The damping is then obtained by measuring the amplitude of successive maxima on the interferometer curve. Since only signals which remain in phase during the final averaging time of the system contribute to these peaks, the bandwidth of this sort of receiver is about one cycle per second.

Extra care must be taken with the measurement of very long damping lengths because of the longitudinal plasma density variation mentioned previously. Very slight changes in plasma density change the dispersion relation and thus the phase velocity at a given frequency. However, a slight change in phase velocity causes a large change in the damping length, which depends exponentially on the square of the phase velocity. For long damping lengths, it is observed that the phase velocity and damping length are functions of longitudinal position. However, as long as both are measured at the same point in the machine, the expected damping is obtained. When the damping length becomes very long, strong standing waves are generated for the whole length of the machine.

The receiver bandwidth can be made sufficiently narrow that plasma noise picked up by the probe is reduced to a completely negligible level, especially when the interferometer with a relative bandwidth of about 10^{-3} is used. However, the influence of plasma noise on the dynamics of wave propagation must be considered. Especially since the damping depends on a very few electrons on the tail of the distribution function, and their density may be fluctuating more than that of the bulk of the plasma. Large noisy fluctuations in the phase and amplitude of the received signal are observed. That this modulation is introduced in part by the sheath around the probes may be proved in the following manner: A wave is launched in the plasma and then detected by two separate identical probes placed in the plasma and separated by a distance short compared to the wavelength, but long compared to the Debye length. The probes are connected to two separate receivers. It is observed that the fluctuations in the

phase and amplitude of the received signals are not highly correlated with each other. This means that these fluctuations were not introduced in transmission through the plasma, but rather in a region immediately surrounding the probes which is a few Debye lengths thick.

Fluctuations in the phase and amplitude of the received signal are averaged over time by the receiver. However, such fluctuations represent frequency modulation of the transmitted wave. If the receiver bandwidth is too narrow, they remove energy from the signal accepted by the receiver. This effect is not important for fluctuations introduced by the sheath around the probe since the power loss is not changed as the probe is moved. However, fluctuations introduced during transmission through the plasma became larger as the probes are separated and result in an apparent damping. At phase velocities for which the Landau damping is large, this effect is negligible. At phase velocities for which the Landau damping is small, this produces an apparent residual damping. This effect can be distinguished experimentally from Landau damping by showing it is not caused by electrons traveling at the phase velocity of the wave, and by investigating the details of the damping curves as a function of receiver bandwidth. This apparent residual damping provides a limit on the longest damping lengths which can be measured. The data reported here were taken with a bandwidth of two megacycles and terminated at the point where a bandwidth 200 kc gave a materially different result. There are other systematic differences in the damping observed with various bandwidth receivers which are not completely understood, but these effects are too small to be important for the present experiment.

V. CONCLUSIONS

The experiment demonstrates that longitudinal electron waves exhibit heavy exponential damping under conditions where collisional damping is negligible. The damping is caused by electrons traveling at the phase velocity of the wave, and the magnitude of the damping, its dependence on phase velocity, and its dependence on plasma temperature are accurately predicted by the theory of Landau.

ACKNOWLEDGMENTS

We wish to thank Mr. Charles D. Moore for his contributions to the experimental work.

This project was sponsored by the Advanced Research Projects Agency, Department of Defense, as part of Project DEFENDER, and the Defense Atomic Support Agency, monitored by Air Force Weapons Laboratory, Kirtland Air Force Base, New Mexico, Research and Technology Division, Air Force Systems Command, United States Air Force, under Contract No. AF29(601)-6366.

REFERENCES

- [1] LANDAU, L., J. Phys. 10, 45 (1946).
- [2] WEITZNER, H., Phys. Fluids 6, 1123 (1963); ECKER, G. and HOLLING, J., Phys. Fluids 6, 70 (1963).
- [3] KOFOID, M. J., to be published; CAULTON, M., HERSHENOV, B., and PASCHKE, F., J. Appl. Phys. 33, 800 (1962); STOVER, H. L., and KINO, G. S., Bull. Am. Phys. Soc. 9, 336 (1964); HIRSHFIELD, J. L., and DENNIS, Jr., R. N., Proceedings of the Sixth International Conference on Ionization Phenomena in Gases, Paris, 1963, edited by P. Hubert (S.E.R.M.A., Paris, 1964); DOLGAPOLOV, V. V. et al, Zh. Ekspерим. i Teор. Fiz. 45, 1260 (1963) [translation: Soviet Phys.--JETP 18, 866 (1964)]; WONG, A. Y., MOTLEY, R. W., and D'ANGELO, N., Phys. Rev. 133, A436 (1964).
- [4] DRUMMOND, W. E., Phys. Fluids 7, 816 (1964).

- [5] MALMBERG, J. H., et al, Proceedings of the Sixth International Conference on Ionization Phenomena in Gases, Paris, 1963, edited by P. Hubert (S.E.R.M.A. Paris, 1964).
- [6] MALMBERG, J. H., and WHARTON, C. B., Phys. Rev. Letters 6, 184 (1964).

DISCUSSION

H. MOTZ: In your paper in Physical Review Letters, [6], you stated that the received power varies by as much as 100% owing to changes in the tail of the electron distribution function. The detector averages out fluctuations, but does the choice of filters not change the attenuation curves significantly?

J. H. MALMBERG: For receiver bandwidths which are too small, yes. We terminated the series of measurements at the point where 200-kc/s and 2-Mc/s bandwidths gave different results. A detailed study of attenuation curves as a function of bandwidth showed that this procedure was the proper one.

H. MOTZ: An exact calculation by Wu and Klevans on the basis of the Lenard-Guernsey-Balescu equations shows that the ratio of non-collisional and collisional damping changes sharply with k . You might be more certain of evidence for non-collisional damping if you could go to somewhat higher values of k . Would this be possible?

J. H. MALMBERG: The damping is caused by a very few electrons travelling at the phase velocity of the wave, about 1 in 10^3 or 10^4 of the total. This seems to be conclusive evidence that we are not seeing collisional damping. In addition, the electron mean free path is about 10^3 times the damping length's observed. Finally, the parameter dependence of the damping agrees with the prediction of Landau but is completely wrong for collisional damping, especially the observed spectacular dependence on phase velocity.

M. N. ROSENBLUTH (Chairman): I believe that under the conditions described by Dr. Malmberg the collisional effects are negligible.

H. MOTZ: Can you identify the mode of propagation in your plasma column by comparison with the curve of k_r versus ω ? I have made a very approximate comparison and find the (02) mode fits better than the lowest mode.

J. H. MALMBERG: I believe your calculation is for a uniform radial distribution of density terminated by a wall; our density distribution is strongly non-uniform, and this circumstance dominates the dispersion curve. We believe this is an $m=0$ mode because all higher modes at a given frequency have somewhat lower phase velocity and, as a result, should exhibit much more violent damping.

J. B. TAYLOR: In quasi-linear theory of instability arising from inverse Landau damping, the waves interact with the particle distribution in such a way as to change the growth rate and so limit the instability. Should one not similarly expect that in your experiment the waves would also modify the particle distribution function and so affect the damping rate? This would perhaps lead to a non-linear damping.

J. H. MALMBERG: The effect should occur, but at much larger wave powers than we use. The wave power is chosen so that the effect, which can be calculated, is negligible. In addition, we have reduced the power by a factor of 1000 and no change in damping length is observed.

S. J. BUCHSBAUM: Did you vary the radius of the plasma column?

J. H. MALMBERG: The data exhibited are typical of results using various magnetic fields which control the radius of the plasma. It should be noted that, except for a weak dependence on the group velocity (which is experimentally measured), the theory is independent of the radial distribution of the density.

R. M. KULSRUD: Is any correction to exponential space damping of the wave observed or predicted?

J. H. MALMBERG: W. E. Drummond did the work by the theory of Landau, therefore no such correction was considered. For weakly damped waves, and hence long distances, the density, dispersion and, consequently, the damping of the wave are a function of position.

The only precaution required in this case is that phase velocity and damping be measured in the same region.

S. YOSHIKAWA: Is k_i essentially zero when there is no wave damping by Landau damping (that is to say, if the electron collector is sufficiently biased)?

J. H. MALMBERG: Within our experimental accuracy, which is limited by fluctuation effects, it is.

UNIVERSAL INSTABILITY IN A THERMAL PLASMA DEVICE (Q-MACHINE)

H. LASHINSKY*

UNIVERSITY OF MARYLAND,
COLLEGE PARK, MD., UNITED STATES OF AMERICA

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

UNIVERSAL INSTABILITY IN A THERMAL PLASMA DEVICE (Q-MACHINE) The fully ionized column in a thermal plasma device (Q-machine) provides a convenient medium for studying the universal (drift-wave) instability arising from the joint effect of the finite ion Larmor radius and the density gradient perpendicular to the magnetic confining field. The pertinent dimensionless parameters can be varied over a range such that the results can be scaled to make comparisons with plasmas of thermonuclear interest, and the instability can be excited in controlled fashion by appropriate adjustment of the sheath conditions at the metal end plates by using sheath-control techniques that are discussed together with the underlying theory. By exploiting these techniques the oscillation amplitude can be held at arbitrarily low levels and the behaviour of the instability can be traced from the low-amplitude ($e\phi/kT \sim 10^{-3}$) "quasilinear" regime, characterized by a monochromatic "locked-mode" spectrum, into the non-linear regime, and then into a weakly turbulent state ($e\phi/kT \lesssim 1$) characterized by a noisy "hash" spectrum. A novel "raster-display" method provides a complete picture of the development of the instability and the transition to turbulence.

The experimentally determined basic characteristics of the instability such as the mode frequencies, direction of azimuthal propagation, coherence properties, density independence, magnetic field dependence, and spatial dependence of mode amplitude, are in good qualitative agreement with the linear theory of the universal instability. Experiments have also been carried out on the effect of column length on the real part of the frequency (approximately a 10% correction) and on the imaginary part. The effect on the latter is due to ion Landau damping and the method provides an excellent means of studying the Landau damping mechanism itself. The results of these experiments are also in good agreement with the linear theory and have, in addition, revealed a number of non-linear effects such as "mode jumping" and "mode locking". These non-linear phenomena have been analyzed by generalizing standard methods of non-linear mechanics to distributed systems and are found to be related to similar phenomena observed in optical masers and lumped-parameter vacuum-tube systems.

INSTABILITE UNIVERSELLE DANS UNE MACHINE A PLASMA THERMIQUE (MACHINE-Q). La colonne entièrement ionisée dans une machine à plasma thermique (machine-Q) fournit un milieu qui convient à l'étude de l'instabilité universelle (onde de dérive) produite par l'effet combiné du rayon de Larmor fini des ions et du gradient de densité perpendiculaire au champ magnétique de confinement. On peut faire varier les paramètres sans dimension appropriés dans un intervalle tel que les résultats puissent être gradués pour permettre des comparaisons avec des plasmas présentant un intérêt thermonucléaire, et on peut exciter l'instabilité sous contrôle par un ajustement approprié des conditions de couche aux plaques métalliques terminales en recourant aux techniques de contrôle de couche qui sont examinées en même temps que la théorie sur laquelle elles reposent. En recourant à ces techniques, on peut maintenir l'amplitude d'oscillation à des niveaux arbitrairement bas et on peut suivre le comportement de l'instabilité dans son passage du régime «quasi linéaire» de basse amplitude ($e\phi/kT \sim 10^{-3}$) — caractérisé par un spectre monochromatique de «mode fermé» — au régime non linéaire, puis à un état faiblement turbulent ($e\phi/kT \lesssim 1$) — caractérisé par un spectre de bruit «haché». Une méthode nouvelle «d'agencement en grille» fournit un tableau complet du développement de l'instabilité et de la transition vers la turbulence.

Les caractéristiques fondamentales de l'instabilité, déterminées expérimentalement, telles que les fréquences de mode, la direction de la propagation azimutale, les propriétés de cohérence, l'indépendance à l'égard de la densité, la dépendance à l'égard du champ magnétique et la dépendance spatiale de l'ampli-

* Former address: Plasma Physics Laboratory, Princeton University, Princeton, N.J., United States of America.

tude de mode sont qualitativement en bon accord avec la théorie linéaire de l'instabilité universelle. L'auteur a également procédé à des expériences sur l'effet de la longueur de la colonne sur la partie réelle de la fréquence (une correction d'environ 10%) ainsi que sur sa partie imaginaire. L'effet sur cette dernière partie est dû à l'amortissement de Landau des ions et cette méthode fournit un excellent moyen d'étudier le mécanisme même de l'amortissement de Landau. Les résultats de ces expériences sont aussi en bon accord avec la théorie linéaire et ils ont, en outre, révélé plusieurs effets non linéaires tels que le «saut de mode» et la «fermeture de mode». L'auteur a analysé ces phénomènes non linéaires en étendant l'application des méthodes courantes de la mécanique non linéaire à des systèmes discontinus et il a trouvé une relation entre eux et des phénomènes similaires observés dans des masers optiques et dans des dispositifs à tube et paramètres globaux.

ИССЛЕДОВАНИЯ УНИВЕРСАЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В УСТРОЙСТВЕ ДЛЯ ТЕРМОЧЕСКИ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ. Полнотью ионизированный столб в устройстве для тепловой плазмы (Q – машина) является удобной средой для изучения универсальной неустойчивости (неустойчивости дрейфующей волны), возникающей из совместного эффекта конечного ларморовского ионного радиуса и градиента плотности, перпендикулярного удерживающему магнитному полю. Соответствующие безразмерные параметры могут варьироваться в таких пределах, чтобы результаты можно было сопоставлять в целях сравнения с плазмами, представляющими интерес для термоядерных исследований, и управляемая неустойчивость могла бы быть вызвана соответствующим регулированием анодного режима на пластинах с металлическими окончаниями путем использования методов управления анодом, которые рассматриваются вместе с основной теорией. При использовании этих методов амплитуда асцилляций, может удерживаться на произвольно установленных низких уровнях, и поведение неустойчивости может быть прослежено, начиная от низкоамплитудного ($e\phi/kT \sim 10^{-3}$) "квази-линейного" режима, который характеризуется монохроматическим "замкнутовидным" спектром, до нелинейного режима, а затем до слабо-турбулентного состояния ($e\phi/kT \lesssim 1$), которое характеризуется искаженным "хаотическим" спектром. Новый "растровоизводящий" метод дает полную картину развития неустойчивости и перехода к турбулентности.

Экспериментально определенные основные характеристики неустойчивости, такие как частотные моды, направление азимутального распространения, свойства когерентности, независимость плотности, зависимость магнитного поля, пространственная зависимость модовой амплитуды хорошо согласуются в качественном отношении с линейной теорией универсальной неустойчивости. Эксперименты проводились также относительно эффекта длины столба на реальную часть частоты (поправка примерно в 10%) и на воображаемую часть. Эффект на воображаемую часть имеет место благодаря ионному демпфированию Ландау, и данный метод является отличным средством изучения самого механизма демпфирования Ландау. Результаты этих экспериментов также хорошо согласуются с линейной теорией и, кроме того, обнаруживают ряд нелинейных эффектов, таких как "модовый скачок" и "модовое замыкание". Эти нелинейные явления проанализированы путем распространения стандартных методов нелинейной механики на распределенные системы и установлено, что они имеют отношение к аналогичным явлениям, наблюдаемым в оптических мазерах и блочно-параметрических вакуумно-трубных системах.

INESTABILIDAD UNIVERSAL EN UN DISPOSITIVO DE PLASMA TERMICO (MAQUINA Q). La columna totalmente ionizada en un dispositivo de plasma térmico (máquina Q) constituye un medio conveniente para estudiar la inestabilidad universal (onda de deriva) producida por el efecto combinado del radio de Larmor finito de los iones, y del gradiente de densidad-perpendicular al campo magnético de confinamiento. Es posible modificar los parámetros adimensionales adecuados en un intervalo de valores tal que los resultados puedan graduarse a fin de permitir comparaciones con plasmas que presentan interés termonuclear; la inestabilidad puede provocarse de manera controlada regulando adecuadamente las condiciones de la capa límite en las placas metálicas terminales mediante técnicas de control que se analizan conjuntamente con la teoría en que se basan. Recurriendo a estas técnicas, es posible mantener la amplitud de las oscilaciones en valores arbitrariamente bajos y seguir el comportamiento de la inestabilidad desde el régimen «cuasi lineal» de baja-amplitud ($e\phi/kT \sim 10^{-3}$), caracterizado por un espectro monocromático de «modo inmovilizado», pasando por el régimen no lineal, hasta el estado débilmente turbulento ($e\phi/kT \lesssim 1$), caracterizado por un espectro de ruidos «entre cortados». Un nuevo método de «presentación en cuadros» permite obtener una imagen completa del desarrollo de la inestabilidad y de la transición a la turbulencia.

Las características fundamentales de la inestabilidad determinadas experimentalmente, tales como las frecuencias modales, la dirección de propagación azimutal, las propiedades de coherencia, la independencia con respecto a la densidad, la dependencia del campo magnético y la dependencia espacial de la amplitud modal concuerdan cualitativamente con la teoría lineal de la inestabilidad universal. El autor efectuó también

experiments sobre el efecto que la longitud de la columna ejerce sobre la parte real de la frecuencia (corrección del orden de 10%) y sobre su parte imaginaria. El efecto sobre la última parte se debe al amortiguamiento de Landau de los iones y el método constituye un excelente medio para estudiar el mecanismo del amortiguamiento de Landau propiamente dicho. Los resultados de estos experimentos concuerdan asimismo con la teoría lineal y, además, han puesto de manifiesto una serie de efectos no lineales, tales por ejemplo el «salto modal» y el «cierre modal». Estos fenómenos no lineales se analizaron extendiendo los métodos normales de la mecánica no lineal a los sistemas discontinuos, hallándose que están relacionados con fenómenos similares observados en masers ópticos y en sistemas de tubo de vacío con parámetros globales.

The fully ionized column in a thermal plasma device (Q-machine) provides a convenient medium for studying the universal (drift-wave) instability due to the joint effect of the finite ion Larmor radius and the density gradient perpendicular to the magnetic confining field. The pertinent dimensionless parameters can be varied over a range such that the results can be scaled to make comparisons with plasmas of thermonuclear interest and the instability can be excited in controlled fashion by appropriate adjustment of the sheath conditions at the metal end plates, using sheath-control techniques that are discussed together with the underlying theory. By exploiting these techniques the oscillation amplitude can be held at arbitrarily low levels and the behavior of the instability can be traced from the low-amplitude ($\epsilon\phi/kT \sim 10^{-3}$) "quasilinear" regime, characterized by a monochromatic "locked-mode" spectrum, into a nonlinear regime, and then into a weakly turbulent state ($\epsilon\phi/kT \gtrsim 1$) characterized by a noisy "hash" spectrum. A novel raster-display method provides a complete picture of the development of the instability and the transition to turbulence.

The experimentally determined basic characteristics of the instability such as the mode frequencies, direction of azimuthal propagation, coherence properties, density independence, magnetic field dependence, and spatial dependence of mode amplitude, are found to be in good qualitative agreement with the linear theory of the universal instability. Experiments have also been carried out to examine the effect of column length on the real part of the frequency (approximately a 10% correction) and on the imaginary part. The latter effect is due to ion Landau damping and the method provides an excellent means of studying the Landau damping mechanism itself. The results of these experiments are also in good agreement with the linear theory and have, in addition, revealed a number of nonlinear effects such as "mode jumping" and mode locking. These nonlinear phenomena have been analyzed by generalizing standard methods of nonlinear mechanics to distributed systems and are found to be related to similar phenomena observed in optical masers and lumped-parameter vacuum-tube systems.

1. Introduction

In this work we describe some results that have been obtained in experimental investigations of the so-called universal (drift-wave) instability in a weakly inhomogeneous fully ionized plasma column confined by a strong magnetic field. The designation "universal instability" has been applied to a variety of instabilities in the literature, and is sometimes taken to mean instabilities that require spatial gradients of density and temperature or magnetic field, while allowing $k_{\perp}r_L \neq 0$ (see Table I for meaning of symbols). By universal instability here, however, we shall mean specifically the longitudinal oscillations ($\nabla \times E = 0$) associated with the "microinstability" of a collisionless low- β plasma in a uniform magnetic field in which the electron and ion temperatures are equal and uniform. Under these conditions the only factors available for the excitation of this microinstability are the finite ion Larmor radius and the density gradient perpendicular to the magnetic field. Other relevant assumptions are listed in Table I. The dispersion relation for the real part of the oscillation frequency can be obtained from expressions given in the literature: [1,2,3]

$$\omega = \frac{\omega_*}{2[1+(k_{\perp}r_L)^2]} \left\{ 1 + \left[1 + \left(\frac{2k_z c_s}{\omega_*} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (1)$$

TABLE I. Dimensionless parameters pertinent to the universal instability.

$$v_T^{(i)} < v_\phi < v_T^{(e)} \quad \lambda_D/r_L < 1 \quad \beta \ll 1$$

$$k_{\perp} r_L \approx 1 \quad L/R \gg 10$$

$$k_z \lambda_{MFP} \approx 1 \quad \omega_* / \Omega_i \ll 1$$

where the symbols have the following meaning: v_ϕ - phase velocity $\sim \omega_* / k_z \sim \omega_* L$; k_{\perp} - transverse wave number $\sim \ell(1/R)$ where $\ell = 1, 2, \dots$ is the azimuthal mode number; k_z - longitudinal wave number $\sim \pi/L$; L - length of plasma column; R - radius of plasma column; r_L - ion Larmor radius; Ω_i - ion cyclotron frequency; λ_D - Debye length; λ_{MFP} - collision length; β - ratio of plasma pressure to magnetic pressure; c_s - the sound speed; ω_* the so-called drift frequency is given by

$$\omega_* \equiv k_{\perp} \frac{ckT}{Be} \frac{d}{dr} \ln N \sim \frac{1}{R} v_T^{(i)} \left(\frac{r_L}{a} \right)$$

where $N(r)$ is the density and a is the radial density decay length (of order R).

It is also assumed that $\nabla \times E = 0$, $T_e/T_i = 1$, $B = \text{const.}$

Two features of this dispersion relation are of interest: 1) the $(k_{\perp} r_L)$ term (finite ion Larmor radius) implies slight deviations from integer ratios between the frequencies of various azimuthal modes in the linear theory; and 2) a finite value of k_z implies a small correction to the mode frequency, reflecting the effect of the finite length of the plasma column.

Since the instability in which we are interested is due solely to the joint effect of the finite ion Larmor radius and the density gradient it will be evident that any meaningful experimental investigation of this instability must be undertaken under conditions such that other destabilizing agencies e.g., current flow along the magnetic field, are known to be absent. A thermal plasma device, the so-called Q-machine [4], is suited for such an investigation since it produces a plasma that is essentially quiescent. It has been found that certain steps must be taken to ensure that the plasma is, in fact, quiescent and the appropriate procedures and general experimental methods for using a Q-machine to investigate the universal instability are described in some detail in Sec. 2 of this work while experimental results pertaining to the linear theory of the universal instability are reviewed in Sec. 3. Main emphasis, however, is given to certain experimental results having to do with the nonlinear aspects of the universal instability which may be relevant to the problem of plasma turbulence; these are discussed in Sec. 4.

2. Experimental methods

2.1. Sheath adjustment

In a Q-machine a quiescent plasma column about 100 cm long and 3 cm in diameter is produced by thermal ionization of alkali atoms (cesium) on hot tungsten plates as shown in Fig. 1a. The cesium beam is produced by standard atomic-beam ovens and the hot tungsten plates serve simultaneously as sources of the thermionic electrons needed to form the plasma. The plasma is essentially isothermal, with typical temperatures (kT) being of the order of 0.25 eV. The experiments reported here are carried out at densities ranging from 10^{10} to 10^{11} with magnetic fields from 1500 to 5000 G and the plasma is essentially completely ionized; it is assumed that collisional effects can be neglected.

Although the metal end plates and the plasma sheaths in a Q-machine do not enter directly into considerations of the universal instability, it is clear that their effect must be understood in order to get useful information and in order to evaluate the experimental results that are obtained with these devices. It is found, in fact, that the metal end plates in conjunction with the plasma sheaths provide a mechanism for controlled damping of the instability, even though they do not enter into the excitation of the instability itself. To understand this mechanism let us consider Fig. 1a. On the left we show schematically the actual physical configuration consisting of the tungsten end plate, the sheath, and the plasma column. The electron-ion density ratio in the sheath region can be controlled by two methods: 1) variation of the plate temperature in order to control the current density of emitted electrons, and 2) variation of the oven temperature in order to control the flux of neutral atoms and, thus, the ion density.

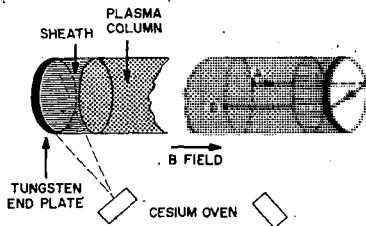


FIG. 1a (Upper) Diagram showing damping of the universal instability by the Simon short-circuit effect in a Q-machine. The points A and B are connected electrically via the path shown by the heavy line.

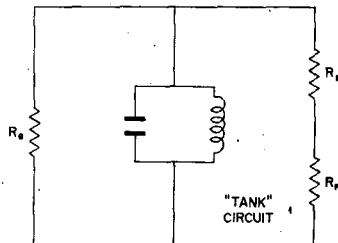


FIG. 1b (Lower) Equivalent circuit for the configuration shown in Fig. 1a. R_G is a linear negative resistance which represents the instability itself acting as a generator. R_S is the nonlinear positive resistance of the sheath and R_p is the linear positive (low) resistance of the end plate. The tank circuit represents the equivalent inductance and capacity of the oscillation mode.

Now consider the right side of Fig. 1a, recalling that the theory of the universal instability predicts azimuthal variations in density and potential which rotate in the same sense as the electron drift. If the effective sheath resistance is

low then two azimuthal points, say A and B, are in electrical contact via a path along the lines of force and across the metal end plate as shown on the right side of Fig. 1a, thus tending to shunt out any transverse potential differences; this mechanism is, of course, the well-known Simon short-circuit effect [5]. However, if the sheath resistance is high the low resistance of the metal end plate is no longer shunted across A and B. Now the effective sheath resistance can, in fact, be controlled by adjusting the electron-ion density ratio in the sheath regions, in which case the sheaths function somewhat in the manner of a space-charge neutralized diode, as in a cesium thermionic converter. When the electron-ion density ratio is high the conditions approach those of a vacuum diode, since there is little space-charge neutralization; the effective diode then operates in a space-charge limited regime, and its effective resistance is low, allowing transverse points such as A and B to be connected through a low-resistance shunt. However, when the effective diode is more or less space-charge neutralized it operates in a region approaching a temperature-limited regime, in which case the effective resistance between A and B becomes high; under these conditions dc or ac potential differences can exist between A and B. To summarize, when the electron-ion ratio is high any incipient instability characterized by azimuthal potential differences will tend to be damped. Conversely, when the electron-ion ratio is low the damping is reduced and it is possible for such an instability to exist.

An equivalent circuit for the physical configuration shown in Fig. 1a is given in Fig. 1b. This configuration is reminiscent of what is known as an amplitude-stabilized oscillator in electronic engineering. Such an oscillator is characterized by high stability and spectral purity.

2.2 Amplitude control

The steady-state amplitude of the oscillation associated with the universal instability in a Q-machine can be controlled by varying the effective parameters shown in the equivalent circuit Fig. 1b. To examine this feature in greater detail we consider Fig. 2, which shows an operating diagram for a generalized oscillator with nonlinear damping. We first consider the curves $y = a_0 E$ and $y = a_1 E^2$. The linear term denotes the linear growth rate, while the quadratic term denotes any nonlinear damping mechanism that may be present (the sheath damping in the present case); in order for a steady-state oscillation to exist the quadratic term must intersect the linear term at a point away from the origin. Now consider the effect of changing the linear growth rate. This can be done in the present experiments by introducing ion Landau damping (by

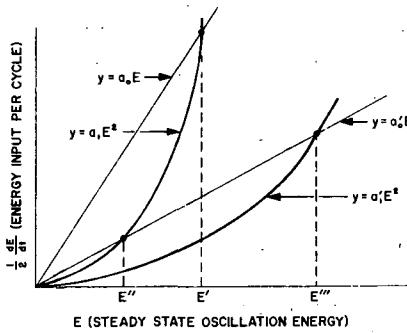


FIG. 2. Generalized oscillator diagram showing three points of stable operation.

reducing the length of the plasma column) [6]. The line $y = a_0 E$ then rotates about the origin in the clockwise direction, becoming $y = a'_0 E$ and the level of oscillation moves from E' to E'' . Next we consider the effect of varying the sheath conditions, keeping the column fixed. Assume that the sheath resistance

is increased by decreasing the electron-ion density ratio as described in Sec. 2.1. In this case the quadratic term $y = a_1 E^2$ becomes $y = a'_1 E^2$ and the oscillation level moves to E'' . Thus, the oscillation amplitude in a Q-machine can be varied over a reasonably wide range by changing the linear term in Fig. 2 (Landau damping) or by changing the quadratic term in Fig. 2 (sheath damping).

2.3 Thermoelectric phenomena

Operational experience with the Q-machine has shown that the thermoelectric effect [7] can be of great importance. If the thermoelectric potential is not balanced out the sheath conditions become quite erratic and unreproducible. This effect can be seen from the "inversion" curves in Fig. 3, which were obtained by keeping the plate temperatures fixed and varying the flux of neutral atoms to vary the electron-ion density ratio in the sheath region [8]. In the lower curve the thermoelectric effect has been balanced out by connecting the plates through a

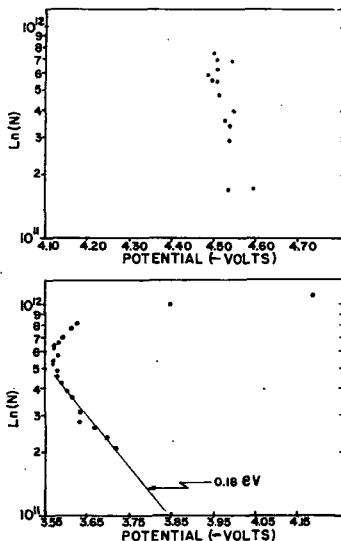


FIG. 3. "Inversion" curves showing the effect of the thermoelectric potential on the operation of a Q-machine. In the lower curve $V_{TE} = 0$. In the upper curve $V_{TE} = 0.6$ V, where V_{TE} is the thermoelectric potential produced by the unbalance in plate temperatures. N is the plasma density and the potential is measured at the axis of the plasma column.

microammeter and balancing the plate temperatures to obtain zero thermoelectric current. The nature of this curve can be understood as follows. When the electron-ion density ratio in the sheath region is high the electrons emitted from the plates see a potential barrier due to the negative space charge; as more and more of the space charge is neutralized by increasing the injected neutral flux the height of the effective potential barrier is reduced. In all cases the governing relation is

$$j_{Rich.} \exp(\frac{e\phi_B}{kT}) = (1/4) NeV$$

where ϕ_B is the barrier potential and $j_{Rich.}$ is the Richardson current density. This relation describes the equilibrium between the electrons flowing out of the plasma and the electrons emitted from the plate, the situation being very similar to that in a cesium thermionic converter [9]. The linear part of the curve then essentially describes a retarding-potential experiment in which

the velocity distribution of electrons coming from the plate is sampled, the slope of the linear portion denoting the plate temperature. As shown in Fig. 3, this slope yields a temperature $kT = 0.18$ eV, which is in reasonable agreement with that measured with a pyrometer. When the neutral flux is increased to the point at which the space charge is almost completely neutralized the plasma becomes electrically isolated from the metal end plate, as we have indicated in Sec. 2.1. Under these conditions a dc potential can exist between transverse points. In particular, it has been observed experimentally that the potential at the center of the plasma is depressed by approximately kT under these conditions and this is believed to be responsible for the rapid shift to more negative potentials in the upper part of the curve. A possible mechanism for this effect is that described by Kaufman, in which the potential arises from charge separations between the electrons and ions as a result of ion-ion collisions [10]. We shall not discuss the actual mechanism responsible for the potential depression here, being more interested in the effect of the thermoelectric potential. Let us now consider the curve in the upper part of Fig. 3, which has been obtained by producing a deliberate unbalance in the plate temperatures, so that the thermoelectric potential is not balanced out. It is evident that the situation is changed markedly; under these conditions it is found experimentally that smoothly varying curves of $\ln N$ vs ϕ can no longer be obtained and that all oscillations become quite "hashy". It is presumed that these spurious effects are due to the flow of thermoelectric current through the plasma, with the consequent disturbance of the sheath conditions and/or excitation of oscillations. These results indicate the need for taking account of thermoelectric effects in Q-machine experiments.

2.4 Relevance to thermonuclear plasmas

In concluding this section we consider the relevance of Q-machine experiments to plasmas of thermonuclear interest. The situation is similar to that in hydraulic model studies, where small-scale experiments are carried out to ascertain the probable behavior of large structures. The justification for model studies derives from the principle of similitude which, in turn, is based on the notion of parameter scaling. In both the hydraulic and plasma cases the parameters can generally be classified in three groups: 1) geometric parameters, which determine boundary conditions, 2) flow parameters (pressure, velocity etc.) and 3) fluid properties (viscosity, density etc.). These parameters are then used to construct dimensionless numbers and it is assumed that the model results apply to the large system if the values of the appropriate dimensionless numbers are the same in the two cases. Note that one must know which dimensionless numbers are important in describing a given phenomenon.

These considerations can be applied to the universal plasma instability; the assumptions used in deriving the theory specify which dimensionless parameters are important and what values they assume for the unstable case; these have been listed in Table I. Representative values of pertinent experimental parameters in a Q-machine and a typical "long" stellarator-like device are given in Table II. (By long we mean a device in which the length exceeds the radius by much more than an order of magnitude, a criterion for instability given in the literature by a number of authors [1,14].) Examination of Table II shows that for the values listed here the pertinent criteria stipulated in Table I are satisfied for both cases, the quantity ω_* being a factor of 10 smaller in the Q-machine and the quantity $k_B T_L$ a factor of 30 larger. These results would seem to indicate that potentially useful information concerning large-scale devices of this kind can be obtained from Q-machine experiments.

3. Experimental results

The techniques described in Sec. 2.2 can be used to maintain the oscillation energy at levels far below the thermal energy of the plasma [$e\phi/kT \sim 10^{-3}$] so that the plasma oscillates in a quasilinear regime yielding a stable narrow-line mode spectrum as shown in Fig. 4. The high spectral purity evidently

TABLE II. Comparison of parameters for Q-machine and large machine.

T	0.2 eV	100 eV
B	2.5 kG	25 kG
R	1.5 cm	7.5 cm
L	75 cm	1200 cm
Mass	132 (Cs)	1 (H)
N	10^{10}	10^{12}

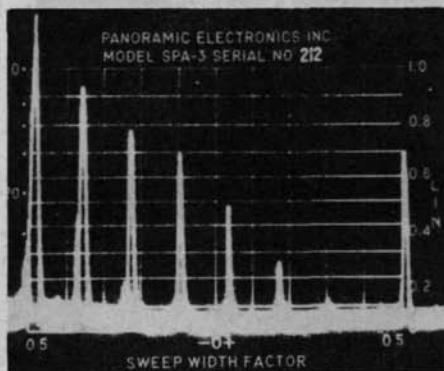


FIG. 4. Spectrum-analyser presentation of the mode spectrum of the universal instability (density waves) obtained by adjusting the sheath conditions for quasilinear operation as explained in the text. Full-scale marker is 30 kc/s, $B = 3000$ G, logarithmic amplitude scale, peak amplitude is approximately 50 μ V. The zero-frequency peak should be disregarded.

derives from the amplitude stabilization feature noted above in Sec. 2.1. The fundamental frequency is approximately 6 kc/sec, a value which is in reasonable agreement with theory when the uncertainty in the density distribution is taken into account. As a further indication of the damping effect of the end plate described in Sec. 2.1, in Fig. 5 we show the results of an experiment in which the metal end plate has been replaced by a ceramic disc with all other conditions remaining unchanged. It will be evident that the removal of the damping associated with the metal end plate allows the instability to grow to the extent that the plasma becomes quite turbulent.

The ability to control the oscillation amplitude has also made it possible to investigate a number of other features of the universal instability such as the direction of azimuthal propagation, coherence over the length of the column, insensitivity of oscillation frequency to density etc. and all of these are found to be in accord with the theoretical predictions [11]. It has also been found possible to make fairly accurate measurements of the radial dependence of mode amplitude, a typical pattern being shown in Fig. 6. There is evidently a value of the radius at which a "turning point" is reached; at smaller values of the radius the wave is an evanescent wave, falling off exponentially toward the

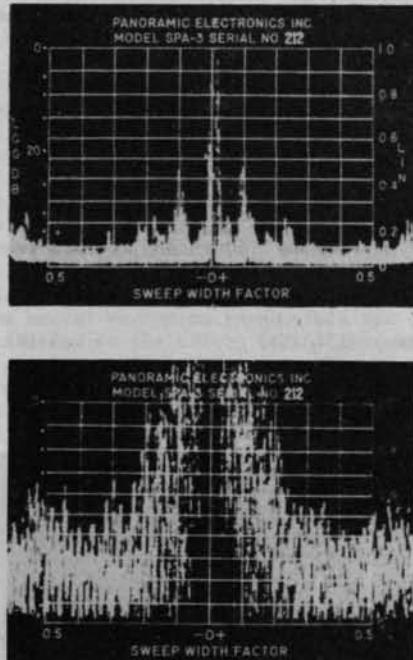


FIG. 5. Effect of replacing one metal end plate with a ceramic plate with all other experimental conditions fixed. Upper picture: metal end plate; lower picture: ceramic end plate.

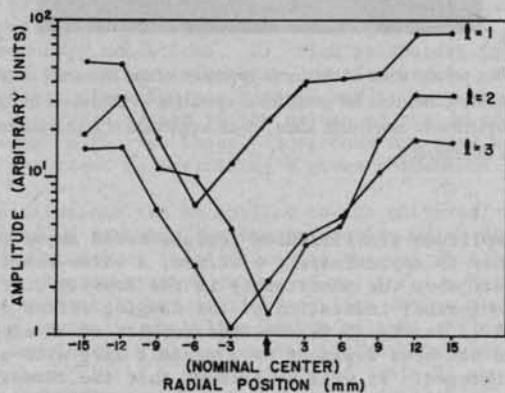


FIG. 6. Mode amplitude as a function of radial position under quasilinear conditions.

center. Thus, in configurations of this kind, where the radial density distribution is convex upwards, the oscillations are confined to an annular region toward the outer edge of the column.

It has also been established, in a series of important experiments [12,13], that the oscillations are characterized by standing waves in the axial direction and that the oscillation frequency varies as $1/B$, as predicted by the theory

[Eq. (1)]. These measurements were performed at densities as low as 10^8 , in which case the mean free path is many times greater than the machine dimensions. The fact that there are no apparent experimental changes in the behavior of the instability over density changes of three orders of magnitude (10^8 - 10^{11}) evidently indicates that collisions do not play an important role.

Measurements in which the length of the plasma column is varied [6] provide confirmation of other points in the theory. For example, the finite-length correction to the real part of the frequency implied by Eq. (1) has been observed, a typical result being shown in Fig. 7 (upper). The effect of finite column length on the imaginary part of the frequency (ion Landau damping) [14] has also been reported and a typical result is shown in Fig. 7 (lower). As noted in Sec. 2.2, the ion Landau damping mechanism can also be used to control the amplitude of the oscillation and this feature has been found extremely useful in experiments on nonlinear phenomena described in Sec. 4.1.

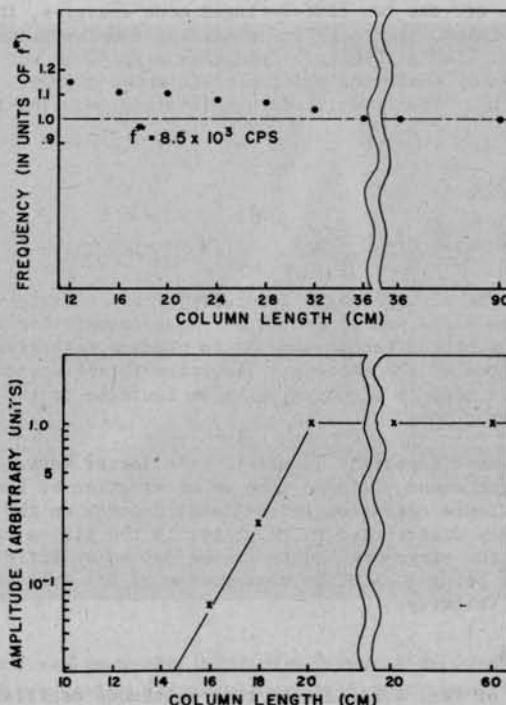


FIG. 7. Effect of column length on the real (upper) and imaginary (lower) parts of the oscillation frequency. These curves are to be taken as representative only and were obtained with different values of the experimental parameters.

4. Nonlinear phenomena

4.1 Mode competition

The capability of controlling the oscillation amplitude in a Q-machine suggests a number of interesting possibilities regarding the investigation of nonlinear phenomena. The experimental results described in Sec. 3 indicate that the plasma column is essentially a bounded spatially distributed oscillator whose constituent elements (plasma particles) are also distributed in velocity. The nonlinear behavior of this oscillator is then conveniently analyzed by extending

standard methods of nonlinear mechanics [15] to distributed systems of this kind. In particular, we are interested in two recently reported experimental effects, which may be called mode competition, or mode "jumping", and mode locking [6].

Mode competition in universal plasma instabilities has been investigated recently [16] and is found to be related to phenomena described in optical masers by Lamb [17] and in vacuum-tube circuits by Van der Pol [18]. The analysis proceeds by generalizing to a two-mode system an expression given by Landau in connection with the analysis of turbulence [19]:

$$\frac{dE_1}{dt} = a_{10}E_1 - a_{11}E_1^2 - a_{12}E_1E_2$$

$$\frac{dE_2}{dt} = a_{20}E_2 - a_{21}E_1E_2 - a_{22}E_2^2$$

where E_1 and E_2 are the two time-averaged mode energies, the a_{10} are the linear mode growth rates, the a_{ij} are nonlinear damping terms, and the a_{ij} are mode-coupling terms. The stability of singular points, at which $dE_1/dt=dE_2/dt=0$, is then investigated by employing a phase plane whose coordinates are the mode energies E_1 and E_2 . Stable multimode oscillation requires that

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22} &> a_{12}a_{21} \\ -(a_{11} + a_{22}) &> 0 \end{aligned} \quad (2)$$

conditions that can be achieved experimentally by appropriate adjustment of the sheath conditions as explained in Sec. 2.1. Mode competition is demonstrated experimentally by using ion Landau damping to produce selective mode quenching [16] and, as predicted by the theory, a reduction in the steady-state amplitude of the Landau-damped mode is accompanied by an increase in the steady-state amplitude of the other mode.

Perhaps the most important result of this latter work, as far as plasma instabilities are concerned, follows from an observation by Lamb [17] that the possibility of multimode operation in the laser depends on the fact that the constituent elements are distributed in velocity; in the plasma case this means that different modes of the microinstability can be driven by different velocity classes, the effect being a specific consequence of the fact that the electrons are distributed in velocity.

4.2 Mode locking

The results of Sec. 4.1 indicate that multimode oscillation is very probable, and for this reason it is of interest to determine the effect of nonlinear mode interactions on the frequencies of individual modes. In the present case, in the linear theory the mode frequencies are related approximately as integers corresponding to ascending values of the azimuthal mode number. A situation in which a number of oscillators with nearly identical frequencies (or harmonically related frequencies) are coupled is a familiar one in other branches of physics and engineering [15] and it is well-known that such oscillators tend to become entrained or locked in frequency. The effect arises because the situation in which the frequencies are entrained represents a point of stable equilibrium of the system. Two classic examples of mode locking are the synchronization of two pendulum-clocks mounted on a common wall, first noted by Huygens, and the fact that two slightly detuned organ pipes sound in unison, a result first reported by Lord Rayleigh [20]. The possibility that this effect could also occur for modes of the universal instability was evidently first pointed out by Kadomtsev [21].

The techniques described in Sec. 2.2 can be used to demonstrate mode locking in the quasilinear regime of the universal instability. In Fig. 8 we show the time representation of a wave whose frequency spectrum corresponds to that shown in Fig. 4. The various frequency components appear to maintain fixed phase relations, a result which is also verified by filtering the components in pairs and observing the Lissajous patterns thus produced. The steep slope of the leading edge evidently arises because the various components "lock in" at zero, or small, relative phases, so that all components add constructively in forming the leading edge. It should be noted that this locking is a nonlinear effect which forces the mode frequencies to maintain integer ratios in spite of the deviations predicted by the $k_{\perp} r_L$ term in the linear theory [Eq. (1)]. One important consequence of this phenomenon, as far as plasma turbulence is concerned, is the fact that the peak amplitude of the wave can be much greater than that of a typical individual mode, because of the cooperative effects associated with nonlinear mode coupling.

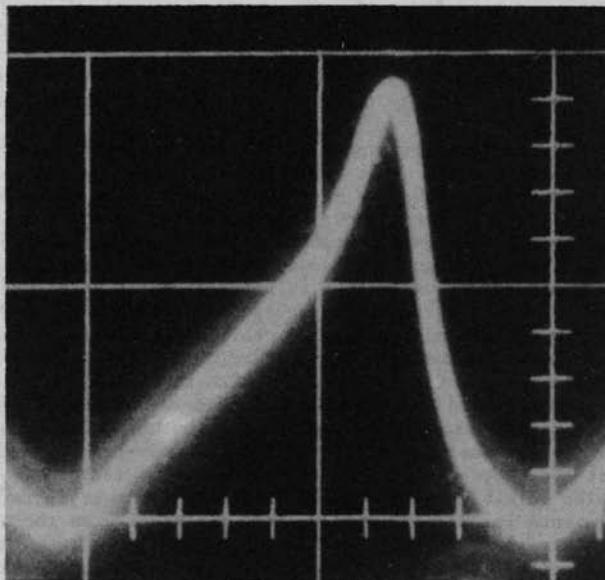


FIG. 8. Triangular "shock" wave produced by locking of many modes of the universal instability. The time scale increases from right to left and the fundamental frequency is approximately 8 kc/s.

Finally, in Fig. 9, we show the results of an experiment in which the modes have become "unlocked", signifying the transition to a turbulent state. This figure has been obtained by the "raster-display" technique [6], in which the output of a spectrum analyzer intensity-modulates an auxiliary oscilloscope whose horizontal sweep is synchronized with the spectrum-analyzer sweep. A slow vertical sweep is applied simultaneously, and is adjusted so that the beam moves upward by one beam width after each horizontal sweep. With no signal from the spectrum analyzer a rectangular raster of uniform intensity is formed on the face of the oscilloscope tube. The signal from the spectrum analyzer then produces bright spots at points corresponding to mode frequencies, as shown in the sketch below the photograph in Fig. 9. The photograph itself was obtained by gradually decreasing the electron-ion ratio in the sheath region, thus allowing the instability to grow, as explained in Sec. 2.2. Moving upward in the photograph corresponds to smaller damping and, thus, growing instability.

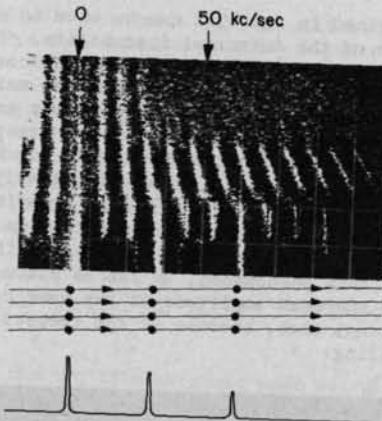


FIG. 9. Raster display (explained in the text) showing the transition to turbulence in the universal instability.

Although the mechanisms responsible for the behavior shown in Fig. 9 are not completely understood, it might be worth while pointing out several features of interest in this photograph. We note first that at low instability levels the mode spectrum consists of narrow lines, corresponding to the quasilinear situation shown in Fig. 4. At higher instability levels new modes appear, and then these exhibit splitting, which is followed by a regime in which the mode frequencies shift toward lower values; it is interesting to note that the mode frequencies remain locked during this process. The frequency shift is attributed to a change in the density and/or density profile, since all of the other parameters that appear in the frequency-determining relation [Eq. (1)] remain unchanged. Finally, a point is reached at which the interlocking mode-structure can no longer be maintained and the transition to turbulence occurs. It is possible that this breakdown occurs as higher azimuthal modes become unstable because it becomes increasingly difficult for the mode-locking mechanism to operate against the increasing effect of the deviation factor $(k_{\perp} r_L)^2$ in Eq. (1). It is also possible that the conditions that must be satisfied by the various coefficients in Eq. (2) become more restrictive as the number of unstable modes increases, thereby making it more difficult to maintain stable multimode oscillation. It is hoped to resolve this question in experiments to be carried out with a new Q-machine presently under construction.

Conclusion

Experimental results obtained to date in investigations of the universal instability in thermal plasma devices appear to be in good qualitative agreement with the predictions of the linear theory. In addition, the experiments have brought to light certain nonlinear phenomena which may be relevant to the problem of plasma turbulence.

Acknowledgements

The author would like to acknowledge useful discussions with E. A. Frieman, T. E. Stringer, N. Rynn and C. Kennel.

This work was performed under the auspices of the U. S. Atomic Energy Commission and has been supported in part by the U. S. Air Force Office of Scientific Research under Grant AF-AFOSR-141-65.

R E F E R E N C E S

- [1] KADOMTSEV, B. B. and TIMOFEEV, A. V., Dokl. Akad. Nauk 146, (1962) 581.
- [2] SILIN, V. P., Zhurn. Eksptl. Teoret. Fiz. 44, (1963) 1271.
- [3] MIKHAILOVSKII, A. B., Nuclear Fusion 2, (1962) 162.
- [4] RYNN, N. and D'ANGELO, N., Rev. Sci. Instr. 31, (1960) 1326.
- [5] SIMON, A., Phys. Rev. 98, (1955) 317.
- [6] LASHINSKY, H., Phys. Rev. Letters 13, (1964) 47.
- [7] RYNN, N., Phys. Rev. Letters 10, (1963) 465.
- [8] LASHINSKY, H., Bull. Am. Phys. Soc. 9, (1963) 343.
- [9] LEWIS, H. W. and REITZ, J. R., J. Appl. Phys. 30, (1959) 1838.
- [10] KAUFMAN, A. N., Phys. Fluids 1, (1958) 252.
- [11] LASHINSKY, H., Phys. Rev. Letters 12, (1964) 121.
- [12] BUCHEL'NIKOVA, N. S., Zhurn. Eksptl. Teoret. Fiz. 46, (1964) 1147.
- [13] BUCHEL'NIKOVA, N. S., Nuclear Fusion 4 (1964) 165.
- [14] ROSENBLUTH, M. N. and SAGDEEV, R. Z., Harwell Conference on Plasma Instabilities, September 1962, Culham Laboratory Report CLM-21 (unpublished).
- [15] MINORSKY, N., Nonlinear Oscillations (Van Nostrand, New York, 1962).
- [16] LASHINSKY, H., Phys. Rev. Letters 14 (1965) 1064; Proc. 7th Intern. Conf. Phenomena in Ionized Gases, Belgrade, 1965, to be published.
- [17] LAMB, W. E., Jr., Phys. Rev. A134, (1964) 1429.
- [18] VAN DER POL, B., Phil. Mag. 43, (1922) 700.
- [19] LANDAU, L. D., Dokl. Akad. Nauk 44, (1944) 311.
- [20] RAYLEIGH, LORD, Theory of Sound (Dover, New York, 1945) Vol. 2, p. 221.
- [21] KADOMTSEV, B. B., Zhurn. Eksptl. Teoret. Fiz. 43, (1962) 1688.

DISCUSSION

N.A. KRALL: The finite-length stabilization effect depends on the ratio of ion temperature to electron temperature. Also, the effect of finite β is enhanced by a large factor. Have you an estimate of these parameters?

H. LASHINSKY: In Q-devices the value of β is typically of the order of 10^{-6} , while the ion and electron temperatures are reasonably assumed to be equal to each other, being approximately 0.2 eV.

H. P. FURTH: One of the ways of studying universal instabilities in an experiment of the type carried out by Dr. Lashinsky is to make them disappear by introducing shear. This was done recently by Dr. Hartman

of our laboratory who found that the universal instabilities are in fact suppressed, though with some peculiarities. These results were reported at the 7th International Conference on Phenomena in Ionized Gases, held during August in Belgrade.

S. J. BUCKSBAUM: I notice from Fig. 9 that new modes appear spaced by $\omega/3$ as the loss increases. What are they due to?

H. LASHINSKY: This phenomenon remains unexplained at present, but it is believed to be due to geometric asymmetries, such as the tilted hot plates, which favour particular modes. We propose to investigate this feature in the new machine, which is under construction, by removing all possible asymmetries in the experimental geometry.

J. H. MALMBERG: How can the effect of a pure rotation of the plasma about an offset axis, which will be reflected in a very complicated coupling to the probe and the generation of many harmonics, be distinguished from the excitation of many locked modes?

H. LASHINSKY: Both the numerical values of the frequency and the fact that the mode frequency varies inversely with magnetic field rule out the possibility that this effect is a plasma rotation.

КОЛЛЕКТИВНОЕ ВЗАЙМОДЕЙСТВИЕ МОДУЛИРОВАННЫХ И НЕМОДУЛИРОВАННЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ С ПЛАЗМОЙ

А. К. БЕРЕЗИН, Я. Б. ФАЙНБЕРГ, Л. И. БОЛОТИН,
Г. П. БЕРЕЗИНА, И. А. БЕЗЪЯЗЫЧНЫЙ, Ю. М. ЛЯПКАЛО
и В. В. ЛИВШИЦ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ АН УССР, ХАРЬКОВ
УССР

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

COLLECTIVE INTERACTION OF MODULATED AND UNMODULATED ELECTRON BEAMS WITH PLASMA.
Results are presented of experimental investigations of collective interactions of charged particle beams with a plasma. (Beam current 5 to 35 A, energy of beam electrons 8 to 20 keV, pulse length 3.6 to 100 μ s, longitudinal magnetic field 600 to 1300 Oe). The plasma was produced by the electron beam. By experiments with initially unmodulated beams we determined the elementary mechanisms responsible for exciting the instability, the conditions of excitation, the frequency spectra and phase velocities of the excited waves, the oscillation growth rates, the electric field strengths, the absolute values and spectral distribution of the power of the excited oscillations, and the electron temperatures. The power lost by the electron beam as a result of collective interaction with the plasma was determined by a calorimetric method, and it is shown that it coincides with the power of the high-frequency oscillations set up by the interaction of the beam with the plasma. The experimental measurements of the frequencies, oscillation growth rates and phase velocities of the oscillations excited in the plasma show good agreement with the calculated values.

Modulation of the beam increases the efficiency of its interaction with the plasma. The power of the oscillations excited at the modulation frequency increases by the factor 50; that of the oscillations at other frequencies decreases considerably over a wide range of frequencies. A possibility is therefore presented of eliminating instabilities over a wide range of frequencies. Experiments were carried out to study the transition of the plasma to a turbulent state as a result of the development of beam instabilities. The variations with time of the frequency spectra during the development of instabilities were investigated (from 100 kc/s to 10 000 Mc/s), the correlation functions were determined and the discontinuities in the phase of the excited oscillations were investigated. These measurements, as well as investigations of particles with higher energies appearing during the development of the instabilities, are necessary to determine the main processes and parameters characterizing a turbulent plasma.

INTERACTION COLLECTIVE DE FAISCEAUX D'ELECTRONS MODULES ET NON MODULES ET D'UN PLASMA. Dans le présent mémoire sont exposés les résultats de recherches expérimentales sur les interactions collectives de faisceaux de particules chargées et d'un plasma (le courant du faisceau est de 5 à 35 A, l'énergie des électrons du faisceau est de 8 à 20 keV, la durée de l'impulsion de 3,6 à 100 μ s, le champ magnétique longitudinal de 600 à 1300 Oe). Le plasma a été formé par le faisceau d'électrons lui-même. Au cours des expériences avec des faisceaux initialement non modulés, les auteurs ont déterminé les mécanismes élémentaires de l'excitation d'instabilités, les conditions de l'excitation, les spectres de fréquence et les vitesses de phase des ondes excitées, les incréments d'oscillations, les grandeurs des champs électriques, les valeurs absolues des puissances des oscillations excitées, ainsi que leur distribution spectrale, et les températures des électrons. Ils ont déterminé par la méthode calorimétrique la puissance dissipée par les faisceaux d'électrons par suite de l'interaction collective avec le plasma et ils ont montré que cette puissance est égale à celle des oscillations H.F. qui se produisent lors de l'interaction du faisceau avec le plasma. Les mesures des fréquences, des incréments d'oscillation et des vitesses de phase des oscillations excitées dans le plasma sont en bon accord avec les résultats des calculs.

Les auteurs ont montré que la modulation améliore l'interaction du faisceau et du plasma. En pareil cas, la puissance des oscillations produites à la fréquence de la modulation est multipliée par 50, alors que la puissance des oscillations dont les fréquences diffèrent de celle de la modulation diminue sensiblement pour un grand intervalle de fréquence. Il devient donc possible de neutraliser l'instabilité dans un grand intervalle

de fréquence. Les auteurs ont étudié expérimentalement le passage du plasma à l'état turbulent à la suite du développement d'instabilités de faisceau. Ils ont examiné l'évolution dans le temps des spectres de fréquences dans le processus de développement des instabilités (dans l'intervalle de fréquence compris entre 100 kHz et 10 000 MHz), déterminé les fonctions de corrélation et étudié la question des discontinuités de phase des oscillations excitées. Toutes ces mesures, de même que l'étude des particules de grande énergie qui apparaissent lors du développement des instabilités, sont indispensables pour mieux comprendre les processus fondamentaux et déterminer les paramètres qui caractérisent le plasma turbulent.

КОЛЛЕКТИВНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МОДУЛИРОВАННЫХ И НЕМОДУЛИРОВАННЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ С ПЛАЗМОЙ. В работе изложены результаты экспериментальных исследований коллективных взаимодействий пучков заряженных частиц с плазмой. (Ток пучка 5—35 а, энергия электронов пучка 8—20 кэв, длительность импульса 3,6—100 мксек, напряженность продольного магнитного поля 600—1300 э). Плазма создавалась самим электронным пучком. В экспериментах с первоначально немодулированными пучками определены элементарные механизмы возбуждения неустойчивостей, условия возбуждения, частотные спектры и фазовые скорости возбуждаемых волн, инкременты нарастания колебаний, напряженности электрических полей, абсолютные значения и спектральное распределение мощности возбуждаемых колебаний, температуры электронов. Определена калориметрическим методом мощность, теряемая электронным пучком в результате коллективного взаимодействия с плазмой, и показано, что она совпадает с мощностью высокочастотных колебаний, возникающих при взаимодействии пучка с плазмой. Экспериментальные результаты по измерению частот, инкрементов нарастания колебаний, фазовых скоростей возбуждаемых колебаний в плазме находятся в хорошем согласии с расчетными данными.

Показано, что модуляция пучка приводит к возрастанию эффективности его взаимодействия с плазмой. При этом мощность возбуждаемых колебаний на частоте модуляции возрастает в 50 раз и значительно понижается мощность колебаний на частотах, отличных от модуляционной в широком интервале частот. Таким образом, создается возможность срыва неустойчивостей в широком интервале частот. Проведены экспериментальные исследования, целью которых является изучение перехода плазмы в турбулентное состояние в результате развития пучковых неустойчивостей. Исследовано изменение со временем частотных спектров в процессе развития неустойчивостей (в интервале частот 100 кгц—10 000 Мгц), определены корреляционные функции, исследован вопрос о скачках фазы возбуждаемых колебаний. Все эти измерения так же как и исследования частиц с большой энергией, появляющихся при развитии неустойчивостей, необходимы для определения основных процессов и параметров, характеризующих турбулентную плазму.

INTERACCION COLECTIVA DE LOS HACES ELECTRONICOS MODULADOS Y NO MODULADOS, CON EL PLASMA. En la memoria se exponen los resultados de las investigaciones experimentales de las interacciones colectivas de los haces de partículas cargadas, con el plasma. (Corriente de haz, 5 a 35 A; energía de los electrones del haz, 8 a 20 keV; duración del impulso, 3,6 a 100 μ s; intensidad del campo magnético longitudinal, 600 a 1300 Oe). El plasma era producido por el mismo haz electrónico. En los experimentos con haces inicialmente no modulados, se han determinado los mecanismos elementales de la excitación de inestabilidades, las condiciones de excitación, los espectros de frecuencias y las velocidades de fase de las ondas excitadas, las velocidades de crecimiento de las oscilaciones, las intensidades de los campos eléctricos, los valores absolutos y la distribución espectral de la potencia de las oscilaciones excitadas, y las temperaturas de los electrones. Por un método calorimétrico se ha determinado la potencia perdida por el haz electrónico como resultado de la interacción colectiva con el plasma, y se muestra que coincide con la potencia de las oscilaciones de alta frecuencia que se originan por las interacciones del haz con el plasma. Los resultados experimentales de la medición de frecuencia, velocidades de crecimiento de las oscilaciones y velocidades de fase de las oscilaciones excitadas en el plasma concuerdan satisfactoriamente con los resultados del cálculo.

Se muestra que la modulación del haz produce un aumento de la eficacia de su interacción con el plasma. En este caso, la potencia de las oscilaciones excitadas a la frecuencia de modulación se hace 50 veces y disminuye considerablemente la potencia de las oscilaciones de frecuencias distintas de la de modulación, en un amplio intervalo de frecuencias. De esta forma, se tiene la posibilidad de eliminar las inestabilidades en un amplio intervalo de frecuencias. Se han realizado investigaciones experimentales cuyo objeto era el estudio del paso del plasma al estado turbulento como resultado del desarrollo de inestabilidades del haz. Se ha investigado la variación, en función de tiempo, de los espectros de frecuencias en el proceso de desarrollo de las inestabilidades (en el intervalo de frecuencias 100 kHz a 10 000 MHz), se han determinado funciones de corre-

lación y se ha investigado la cuestión de las discontinuidades de fase de las oscilaciones excitadas. Todas estas mediciones, así como las investigaciones de las partículas de gran energía que aparecen en el desarrollo de las inestabilidades, son imprescindibles para la determinación de los procesos fundamentales y de los parámetros que caracterizan el plasma turbulento.

Экспериментальному исследованию пучковых неустойчивостей посвящено большое число работ [1-10, 13]. Основными результатами, полученными в этих исследованиях, являются обнаружение неустойчивостей, определение условий их возникновения, а также предварительные исследования частотных спектров. При исследовании нелинейной стадии развития неустойчивостей было обнаружено, указанное теоретически, образование "плато" [1, 4].

Очень важным явилось обнаружение эффекта появления быстрых частиц, ускоренных при развитии пучковых неустойчивостей до энергий, значительно превосходящих энергию пучка электронов, возбуждающих неустойчивость.

Высокая эффективность взаимодействия пучков заряженных частиц с плазмой, показанная во всех перечисленных выше экспериментах, привела к разработке новых методов нагрева электронов и ионов плазмы и инжекции частиц в ловушки, основанных на использовании пучковых неустойчивостей.

Целью излагаемых ниже наших экспериментальных исследований являлось дальнейшее исследование физических процессов, имеющих место при развитии пучковых неустойчивостей, а также определение основных количественных характеристик (инкрементов нарастания, энергии, передаваемой от пучка к плазме и др.) важных для приложений.

Задача создания установки с высокими значениями температур ионов и электронов, плотности плазмы и времени удержания в этих экспериментах не ставилась.

В первой части работы излагаются результаты по определению пространственных инкрементов нарастания неустойчивостей, частотных спектров и измерению фазовых скоростей возбуждаемых волн.

Экспериментально полученные результаты находятся в хорошем согласии с теорией.

Для того, чтобы показать, что пучковые неустойчивости играют существенную роль в процессах переноса и энергетическом балансе при взаимодействии пучка с плазмой, необходимо было убедиться в том, что амплитуды полей, возникающих при развитии неустойчивостей, достаточно велики, а мощность возбуждаемых колебаний сравнима с мощностью, теряемой электронным пучком при возбуждении неустойчивостей.

С этой целью в работе измерены напряжённости электрических полей, определены мощности возбуждаемых колебаний и при помощи ка-

лориметра определены потери энергии пучком при его прохождении через плазму.

Во второй части работы приводятся результаты экспериментальных исследований взаимодействия модулированного электронного пучка с плазмой.

Как известно^[4], эффективность взаимодействия пучков заряженных частиц с плазмой сильно возрастает с увеличением глубины модуляции пучка. Однако в случае первоначально немодулированных пучков глубина модуляции (автомодуляции) определяется напряжённостью поля возбуждаемых колебаний, которая существенно зависит от начальной амплитуды возмущения, то есть небольшими флуктуационными полями в пучке и плазме. Флуктуационный характер начального возмущения приводит к возбуждению колебаний в широком интервале частот.

Для увеличения степени модуляции и возбуждения достаточно узкого по частоте спектра волн необходимо задание начального возмущения ~~и~~ флуктуационного характера, а с помощью внешних высокочастотных полей с фиксированной частотой, амплитудой и фазой.

Предварительная модуляция с помощью этих полей нарушает группировку для волн и частот отличных от модуляционных, и поэтому приводит к срыву целого ряда неустойчивостей. Задание упорядоченного сигнала достаточно большой интенсивности от внешнего высокочастотного сигнала, вместо случайных флуктуационных сигналов, приводит к преимущественному возбуждению определённых частот и длин волн и сужает спектр возбуждаемых частот.

Таким образом из этих соображений можно было ожидать, что предварительная модуляция с помощью внешних полей может быть использована с одной стороны, как способ срыва широкого спектра неустойчивостей, а с другой стороны, как средство для увеличения обмена энергией между пучком и плазмой.

Результаты экспериментальных исследований подтверждают приведенные выше соображения.

Кроме существенного прикладного значения исследования пучковых неустойчивостей представляют интерес ещё потому, что плазма, образованная при развитии пучковых неустойчивостей, является одним из наиболее простых примеров турбулентной плазмы. Поэтому нам представлялось желательным произвести экспериментальные исследования процессов перехода от ламинарной к турбулентной плазме. При этом естественно возможны ряд способов исследований. Мы остановились на спектрально-корреляционном методе исследований. Целью этих исследований является определение изменения со временем частотного спектра колебаний в процессе взаимодействия пучка с плазмой и измерения автокорреляционных функций.

Экспериментальные определения автокорреляционных функций, а также напряжённостей полей колебаний, возбуждаемых при развитии неустойчивостей, являющиеся наиболее важными характеристиками колебаний, по-видимому, могут оказаться существенными при разработке теории турбулентной плазмы и выборе той или иной модели турбулентности. К этим экспериментальным исследованиям примыкает также непосредственное наблюдение формы возбуждаемых колебаний, позволяющих обнаружить и исследовать скачки фазы этих колебаний.

Как известно, до последнего времени приближение хаотических фаз считалось чуть-ли не само собой разумеющимся и только сейчас начали появляться работы, в которых сделаны попытки отказа от этих предположений. Мы надеемся, что начатые нами исследования помогут определить закон изменения фазы (стохастические или регулярные фазы) в каждом отдельном конкретном случае.

В четвертой части работы приведены результаты исследования взаимодействия электронных импульсных пучков с сильно ионизованной плазмой.

Перейдем теперь к изложению основных результатов исследований.

I. В этой части приведены результаты исследования взаимодействия с плазмой первоначально немодулированных электронных пучков.

Подробно блок-схема установки была описана ранее^[3]. Здесь будет приведено краткое описание установки. Пучок электронов с энергией 15 кэв и током 5-8,5 а инжектировался из пушки, катод которой находился в однородном магнитном поле с напряжённостью 700-1300 э (диаметр пучка 1,2 см, длительность импульса 3,6 мксек, частота посылок 50 гц). Пучок проходил через медную трубку и поступал в плазменную камеру (стеклянная труба диаметром 5-6 см и длиной 32 см). Медная трубка служила для создания перепада давлений между объёмом, занятым электронной пушкой, и плазменной камерой. Давление рабочего газа (аргон, азот, водород, гелий, воздух) в плазменной камере изменялось механическим насосом в пределах $2 \cdot 10^{-5}$ - $2 \cdot 10^{-3}$ мм рт.ст.

Проходя через эту камеру, электронный пучок ионизировал находящийся в ней рабочий газ и создавал плазму, в результате взаимодействия с которой в пучке и плазме возбуждались колебания, а пучок терял часть своей начальной энергии.

Потери энергии электронным пучком определялись двумя методами: при помощи электростатического анализатора типа "тормозящее поле" и калориметра.

Первым методом проведены измерения энергетических спектров для части пучка ($\sim 1-3\%$ от общего тока) в начале и конце области взаимодействия для токов 5 и 8,5 а^[3]. Из этих спектров были опре-

Таблица потерь

Потери, определенные электростатическим анализатором.			Потери, определенные калориметром.	
Давление в мм рт.ст.	1320 э	720 э	Давление в мм рт.ст.	720-1320 э
$2 \cdot 10^{-5}$	16%	15%	$2 \cdot 10^{-5}$	9%
$9 \cdot 10^{-5}$	17%	16%	$2 \cdot 10^{-4}$	12%
$4-6 \cdot 10^{-4}$	22%	22%	$4-6 \cdot 10^{-4}$	18%
$2 \cdot 10^{-3}$	25%		$2 \cdot 10^{-3}$	17%

Потери выражены в процентах от начальной энергии пучка электронов (*Ток 5 а*).

Лены средние потери энергии электронного пучка в зависимости от тока пучка, давления газа в плазменной камере, напряженности магнитного поля (ошибка измерений ~ 6%).

Вторым методом (с точностью ~ 3%) определены потери энергии всего электронного пучка после его прохождения через плазму. Результаты измерений, полученных этими двумя независимыми способами, приведены в таблице I и в пределах ошибок измерений согласуются друг с другом. Из этой таблицы следует, что электронный пучок в результате взаимодействия с плазмой теряет значительную часть своей начальной энергии. Например, в области давлений ~ $4-6 \cdot 10^{-4}$ мм рт.ст. при токе 5 а потери энергии достигают 18% от начальной энергии пучка.

Такие большие потери энергии электронным пучком могут быть обусловлены только коллективным взаимодействием пучка и плазмы.

Нами было измерено распределение компонент $H_z(z)$; $H_\varphi(z)$; $H_\rho(z)$ и $E_r(z)$ высокочастотных полей, возбуждаемых в плазме вдоль плазменной камеры (на расстоянии 10 мм от границы пучка). Это распределение определялось петлей или диполем, расположенным в плазме и через подвижный коаксиальный кабель связанным с калиброванным по мощности резонансным волномером. Выход волномера через усилитель с интегрирующей ячейкой присоединялся к автоматическому электронному потенциометру.

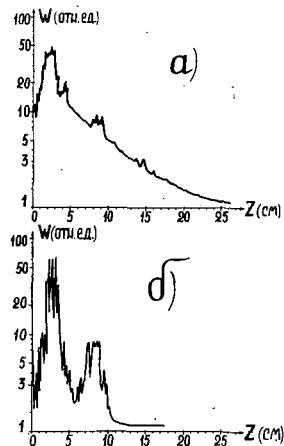


Рис.1. Графики, показывающие пространственное распределение E_z -компоненты высокочастотного поля на частоте 835 МГц для тока 5 а и давления рабочего газа $6 \cdot 10^{-4}$ мм рт.ст. Напряженность магнитного поля 1320 э: а) в режиме бегущих волн, б) в режиме стоячих волн. Пучок распространялся справа налево.

Измерения производились в режиме стоячих и бегущих волн для токов 5 и 8,5 а. В первом случае в конце плазменной камеры располагалась металлическая отражающая пластина (коллектор тока); во втором случае -адиабатическая поглощающая нагрузка из графита. Измерения частотных спектров (зависимости интенсивности возбуждаемых колебаний от их частоты) производились в конце области взаимодействия, так как в нашем случае возбуждались прямые волны, интенсивность которых максимальна в конце области взаимодействия.

Из этих измерений в режиме стоячих волн определялись фазовые скорости возбуждаемых колебаний, а в режиме бегущих волн -пространственные инкременты нарастания (рис. I).

Для определения возможного спектра возбуждаемых частот и пространственных инкрементов нарастания мы воспользовались дисперсионным уравнением, описывающим взаимодействие ограниченного электронного пучка с ограниченной плазмой, находящихся в продольном магнитном поле, полученным М.Ф. Горбатенко. В случае, когда радиус столба плазмы b равен радиусу пучка a , дисперсионное уравнение имеет вид:

$$1 + \frac{1}{u^2 - x^2} + \frac{\epsilon}{u^2 - (y-x)^2} + N y^2 \left[1 - \frac{1}{x^2} - \frac{\epsilon}{(y-x)^2} \right] = 0;$$

$$N = \frac{b^2 \omega_0^2}{\lambda_p^2 v_0^2}, \quad \epsilon = \frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2}, \quad u^2 = \left(\frac{\omega_h}{\omega_n} \right)^2, \quad y = \frac{k_3 v_0}{\omega_0}, \quad x = \frac{\omega}{\omega_0};$$

$$k_3 = \frac{\omega}{v_\phi};$$

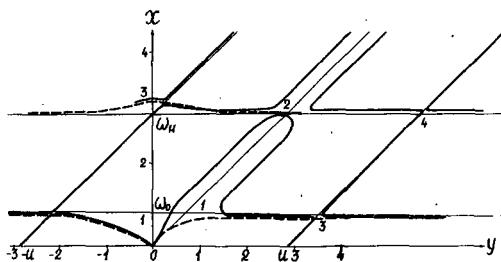


Рис.2. Решение дисперсионных уравнений ($\omega_0 < \omega_H$): 1 - для плаэмы; 2 - для пучка с плаэмой.

где v_p - скорость пучка, ω_H - электронная ларморова частота, ω_0 и Ω_0 - электронные ленгмюровские частоты плаэмы и пучка, ω - частота колебаний, v_p - фазовая скорость волны, λ_p - корень функции Бесселя. Для нашего случая $\epsilon = 1/8$; $N = 2$; $U^2 = 8$. Графически это уравнение изображено на рис.2.

Из анализа дисперсионного уравнения следует, что в нашем случае области возбуждения колебаний расположены вблизи частот ω_0 и ω_H . При этом в области ω_0 возбуждение может быть обусловлено эффектом Вавилова-Черенкова на прямой волне (нормальная дисперсия; область I) и аномальным эффектом Допплера на прямой волне (область 3). В области ω_H возбуждение может быть обусловлено эффектом Вавилова-Черенкова на обратной волне (область 2) и аномальным эффектом Допплера на обратной волне (область 4).

Как показывают расчёты (см.рис.2 и таблицу II), при наших параметрах пучка и плаэмы максимальный пространственный инкремент нарастания ($\sim 0,32 \text{ см}^{-1}$) имеет место для колебаний, возбужденных которых обусловлено эффектом Вавилова-Черенкова на прямой волне. Частота этих колебаний близка к электронной ленгмюровской частоте плаэмы (f_0), но не совпадает с ней ($f \sim 0,6 f_0$) из-за ограниченности пучка и плаэмы и влияния конечного магнитного поля.

Измеренные значения коэффициентов усиления лежат в пределах $0,21$ - $0,26 \text{ см}^{-1}$, частота максимально усиливаемых колебаний составляет $0,53 f_0$ (для тока 5 а) (рис.3). Это вполне удовлетворительно совпадает с расчётными данными (таблица II).

Укажем частоты возбуждаемых колебаний. При давлении $6 \cdot 10^{-4} \text{ мм рт.ст.}$ они составляют 825-835 МГц (с полушириной 50-70 МГц) для тока 5 а и 950-1000 МГц для тока 8,5 а.

Измерены также абсолютные значения и спектральное распределение мощности возбуждаемых колебаний в пучке после его прохождения через плаэму.

Высокочастотная мощность у пучка на выходе из области взаимодействия отбиралась при помощи спирального перехода (длина 15 см)

ТАБЛИЦА П

Таблица сравнения экспериментальных и теоретических результатов.

	f'	λ_0 (см)	I_{mk} (см $^{-1}$)
Теория	0,6 f_0	7,2	0,32
Эксперимент	0,53 f_0	~10	0,21-0,26

где f' и λ_0 - частота и длина волны колебаний, возбуждаемых в системе пучок-плазма, I_{mk} - пространственный инкремент нарастания.

по конструкции аналогичного тем, которые применяются в лампах с бегущей волной. Суммарная мощность колебаний 3-4 квт в диапазоне частот 825-835 Мгц (полуширина спектра 50-70 Мгц). Спектральное значение мощности колебаний на частоте 825 Мгц (в полосе частот 1,5 Мгц) составляет 150-200 вт. Кроме того, в области частот 2400 Мгц излучалось 2-4 квт в импульсе (две линии по 1-2 квт с полушириной 3-5 Мгц).

Таким образом, суммарная мощность излучения составляла 6-8 квт в импульсе, что составляло около 60% от всей мощности, теряемой электронным пучком в результате взаимодействия с плазмой.

Из измерений мощности колебаний можно определить напряжённость электрического поля в плазме. В нашем случае она равна 0,5-0,6 кв/см в конце области взаимодействия.

Следовательно, в данных экспериментах показано, что при взаимодействии первоначально немодулированного электронного пучка с плазмой имеется вполне удовлетворительное согласие между экспериментально определёнными и теоретически вычисленными основными параметрами, характеризующими это взаимодействие (пространственные инкременты нарастания, фазовые скорости, частоты возбуждаемых колебаний).

П. Перейдём теперь к изложению основных результатов по взаимодействию модулированных пучков с плазмой.

Пучок электронов с током 5-2,3 а и энергией 21 кэв (длительность импульса напряжения ~ 4,5 мксек, частота посылок 50 гц, диаметр пучка ~ 1,2 см) инжектировался из пушки, проходил через модулирующий спиральный переход, плазменную камеру, демодулирующий пере-

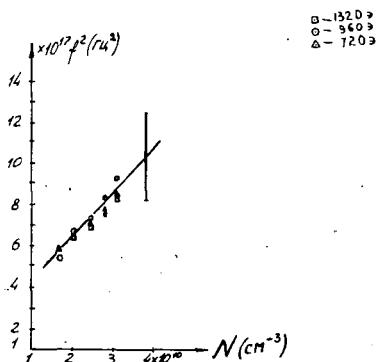


Рис.3. Зависимость квадрата возбуждаемых частот в плазме от плотности плазмы для электронного пучка с током 5 а и энергией 15 кэв.

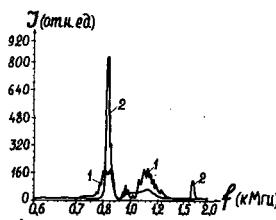


Рис.4. Спектры колебаний, возбуждаемых в первоначально немодулированном (кривая 1) и модулированном (кривая 2) электронных пучках. Частота модуляции 835 Мгц. Ток пучка 5 а.

ход и попадал на коллектор. Напряжённость продольного магнитного поля 1300 э, длина области взаимодействия ~ 40 см. Конструкция электронной пушки и спиральных переходов аналогичны использованным в предыдущих экспериментах по взаимодействию первоначально немодулированных пучков с плазмой. Измерения проводились при токах 5; 4 и 2,5 а. Модуляция пучка осуществлялась на частоте 835 Мгц. Задающий генератор работал в непрерывном и импульсном режимах (длительность импульса 10 мксек) с выходной мощностью 1-600 вт.

Частотный спектр возбуждаемых колебаний в случае начальной модуляции приведен на рис.4 (мощность начальной модуляции 600 вт, давление рабочего газа $4 \cdot 10^{-4}$ мм рт.ст.). Из графика следует, что спектр возбуждаемых колебаний почти монохроматический (в отличие от случая первоначально немодулированных пучков). В нем представлены: сигнал с частотой 835 Мгц с полушириной 8-10 Мгц и сигнал с частотой 1670 Мгц с полушириной 8-10 Мгц. Кроме того, имеется полоса частот в области 1000-1200 Мгц. Укажем для сравнения, что при отсутствии начальной модуляции наиболее интенсивные колебания возбуждались на частоте 835 Мгц (с полушириной 50-70 Мгц) и в области 1000-1200 Мгц.

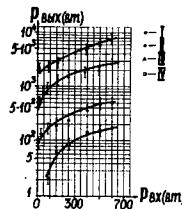


Рис.5. Мощность высокочастотных колебаний на выходе системы пучок-плазма в зависимости от мощности модуляции для различных токов (I-5 а; II-3,8 а; III-2,3 а). Частота модуляции 835 Мгц. IV-вторая гармоника (1670 Мгц) для тока 5 а.

Благодаря начальной модуляции мощность колебаний в области 1000-1200 Мгц уменьшилась в 16 раз по сравнению со случаем немодулированных пучков. Таким образом, начальная модуляция приведет к значительному ослаблению целой полосы спектра частот (1000-1200 Мгц). Мощность колебаний на частоте модуляции 835 Мгц увеличилась в 50 раз и достигла 8 квт в импульсе при мощности начальной модуляции 600 вт. Несмотря на резкое сужение спектра возбуждаемых частот суммарная мощность колебаний не уменьшилась. Напряженность электрического поля возбуждаемой продольной волны на частоте модуляции достигла значения 3,2 кв/см в конце области взаимодействия, то есть возросла в 7 раз по сравнению со случаем первоначально немодулированного пучка. Зависимости мощности высокочастотных колебаний на выходе системы пучок-плазма от мощности начальной модуляции приведены на рис.5. Из рисунка следует, что мощность на выходе системы возрастает с увеличением тока пучка и мощности модулирующего сигнала. Так при увеличении тока от 2,5 а до 5 а мощность усиливаемых колебаний увеличилась в 16 раз (мощность начальной модуляции 600 вт, частота 835 Мгц). При этом еще не наблюдалось явление насыщения.

Специальные калориметрические измерения показали, что в случае начальной модуляции электронный пучок теряет больше энергии при взаимодействии с плазмой, чем первоначально немодулированный. Эти потери увеличиваются с ростом мощности начальной модуляции. При мощности 600 вт потери начальной энергии электронного пучка увеличиваются на 7±3% по сравнению со случаем первоначально немодулированного пучка.

Таким образом, в проведенных экспериментах осуществлено возбуждение волн с относительно узким частотным спектром и значительной (для тока 5 а) мощностью высокочастотных колебаний (примерно 8 квт) и напряженностью электрического поля ~3,2 кв/см. При этом еще не наблюдалось явления насыщения.

III. Перейдем к исследованию процессов перехода от ламинарной к турбулентной плазме. Целью этих исследований является определение изме-

нения со временем частотного спектра колебаний в процессе взаимодействия пучка с плазмой и измерение автокорреляционных функций.

Так как для более отчётливого наблюдения этих эффектов необходимо было увеличить интенсивность колебаний, обусловленных развитием неустойчивостей, то мы увеличили ток электронного пучка до 35 а при энергии 20 кэв. (Длительность импульса 4,5 мксек, диаметр пучка 2,2 см, частота посыпок 50 гц, напряжённость продольного магнитного поля 1300 э, длина плазменной камеры 40 см).

Блок-схема установки аналогична ранее приведенной. Высокочастотные колебания, возбуждаемые в системе пучок-плазма, отбирались при помощи петель или зондов, которые располагались в конце области взаимодействия как внутри, так и вне объёма, занятого плазмой.

Частотные спектры, снятые при помощи петель или зондов, расположенных внутри и вне объёма, занятого плазмой, были полностью идентичны, поэтому в дальнейшем спектры снимались при помощи петли, расположенной извне области, занятой плазмой.

Измерения частотных спектров производились способом, описанным в первой части настоящего сообщения в диапазоне 570-10000 МГц. Давление рабочего газа (азот, воздух, гелий, водород, аргон) в плазменной камере поддерживалось в пределах $8 \cdot 10^{-4}$ - $2 \cdot 10^{-3}$ мм рт.ст. Электронная плотность плазмы при токе пучка 32 а (энергия 20 кэв) составляла $6 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$ (давление 10^{-3} мм рт.ст.). Частотный спектр для тока 32 а (диаметр пучка 2,2 см) изображен на рис.6.

Процесс развития неустойчивости во времени может быть прослежен по изменению частотного спектра возбуждаемых колебаний во времени. На этом же рисунке приведены интенсивности возбуждаемых колебаний в зависимости от частоты для фиксированных значений времени (1,5-4,4 мксек), отсчитываемого от начала токового импульса. Эти зависимости позволяют определить изменение со временем частотного спектра колебаний в процессе взаимодействия пучка с плазмой.

Частотный спектр возбуждаемых колебаний должен зависеть от радиуса электронного пучка. Для определения этой зависимости также были сняты частотные спектры колебаний (рис.7а и б), возбуждаемых в системе пучок-плазма при постоянном токе (8 а), но различных диаметрах электронного пучка (2,2 и 1,1 см, соответственно).

Спектры, приведенные на графиках (рис.6 и 7б) сняты для одной и той же плотности электронов в пучке (8 а/см^2), но для различных диаметров пучка (2,2 и 1,1 см).

Графики, изображенные на рис.6 и 7а, относятся к случаю различных значений тока пучка (32 и 8 а) при постоянном диаметре пучка (2,2 см).

Из анализа приведенных графиков следует, что интенсивность и ширина частотного спектра возбуждаемых колебаний зависит не только

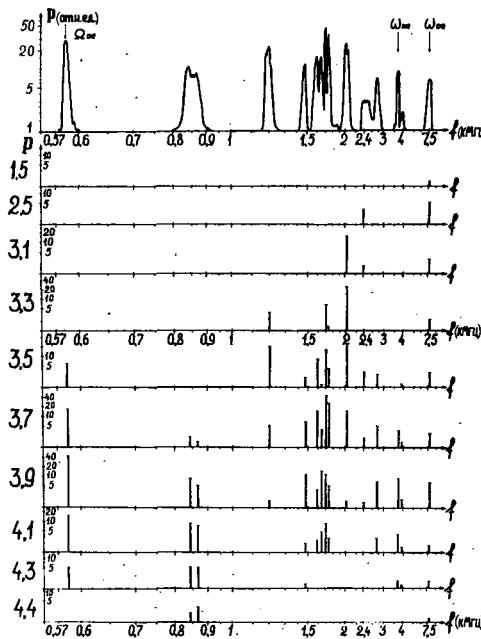


Рис. 6. Частотный спектр колебаний, возбуждаемых электронным пучком с током 32 а (диаметр пучка 2,2 см). Ниже приведено изменение частотного спектра со временем для различных моментов времени (в мксек), отсчитываемого от начала токового импульса.

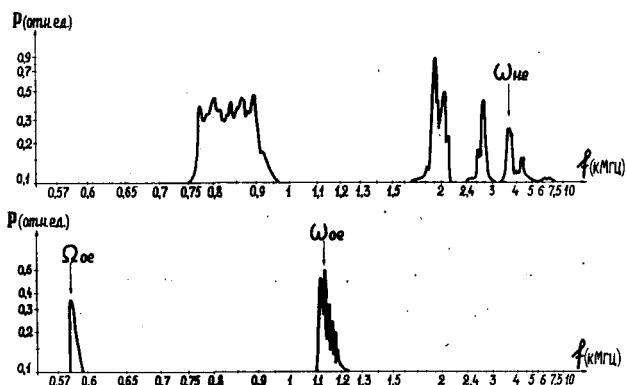


Рис. 7. Частотные спектры колебаний, возбуждаемых электронными пучками с током 8 а и диаметрами: а) 2,2 см; б) 1,1 см.

от тока, но и от диаметра электронного пучка. За счёт изменения поперечных размеров и тока пучка можно регулировать степень взаимодействия электронного пучка с плазмой.

При увеличении поперечных размеров электронный пучок более интенсивно взаимодействует с плазмой, в результате чего в системе пу-

чок-плазма возбуждаются колебания в широком спектре частот (рис.6 и 7а). Это объясняется двумя причинами: увеличением инкрементов с ростом поперечных размеров пучка и расширением спектра возбуждаемых частот, соответствующих различным K_1 , где K_1 — проекция волнового вектора на направление движения пучка.

Наоборот, уменьшая диаметр пучка, можно значительно ослабить, а в некоторых областях частот и сорвать развитие неустойчивостей, обусловленных взаимодействием пучка с плазмой. Этот вывод находится в соответствии с положениями, высказанными в работе^[4].

В процессе развития неустойчивостей происходит нагрев и ускорение электронов плазмы. При этом энергия ускоренных электронов значительно превосходит энергию электронов пучка^[1] и составляет 60–100 кэв. Следует однако отметить, что такой энергией обладает только небольшая часть электронов плазмы. Спектральные же измерения, определяющие температуру всех электронов плазмы, дают значения $T_e \sim 50-90$ эв (ток пучка I2 а).

Эти данные находятся в удовлетворительном согласии с оценками нагрева электронов плазмы в предположении, что изменение тепловой энергии электронов плазмы составляет $\sim 30\%$ от энергии пучка^[5], и что потери энергии электронным пучком распределяются поровну между энергией колебаний плазмы и энергией, идущей на нагрев. Для тока I2 а при длительности 4 мксек максимальна возможная электронная температура плазмы составляет 200 эв *.

В этих измерениях показано, что существует корреляция между возбуждением высокочастотных колебаний и ростом температуры электронов плазмы.

Измерение напряжённости электрического поля по эффекту Штарка по линии H_α дают значения напряжённости высокочастотного поля $\sim 1-2$ кв/см.

Для теории нелинейного взаимодействия волн в плазме и турбулентности, а также и для целого ряда приложений очень существенно ответить на вопрос: являются ли фазы колебаний, возбуждаемых при развитии неустойчивостей, случайными, регулярными или представляют собой смесь этих состояний.

В последнее время появился ряд теоретических работ, посвящённых этим вопросам^[6-10]. Насколько нам известно, экспериментальные исследования в этом направлении не проводились. Предварительные результаты проведенных нами измерений фаз приведены на рис.8а, б. Блок-схема установки представлена на рис.9.

* При этих значениях поля $\frac{E^2}{8\pi} \sim n k T_e$, где E — напряжённость высокочастотного электрического поля.

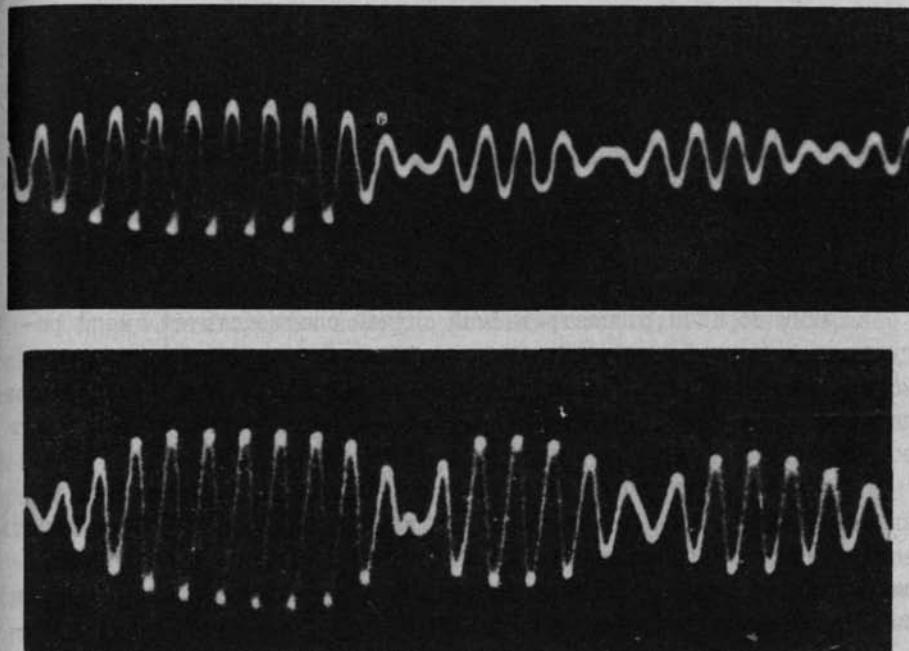


Рис.8. Осциллограммы (а, б), показывающие изменение фазы колебаний со временем.
Период колебаний 25 нсек.

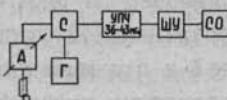


Рис.9. Блок-схема: А – переменный аттенюатор; С – смеситель; Г – гетеродин (частота 805 Мгц); УПЧ – усилитель промежуточной частоты; ШУ – широкополосный усилитель; СО – скоростной осциллограф.

Колебания, принимаемые петлёй, проходили через аттенюатор с ослаблением 40–50 дБ и поступали на ламповый смеситель супергетеродинного приёмника. Частота гетеродина равнялась 805 Мгц. Колебания промежуточной частоты через усилитель промежуточной частоты с полосой пропускания 36–43 Мгц, широкополосный усилитель (с полосой пропускания до 150 Мгц и коэффициентом усиления ~50 дБ) поступали на скоростной электронный осциллограф.

Из рис.8а,б следует, что несмотря на развитие интенсивных колебаний фазы их не являются полностью случайными, а остаются неизменными в течение времени от 0,1 до 0,3 мксек. Причём более короткое время получается при работе с более интенсивными пучками и более плотной плазмой.

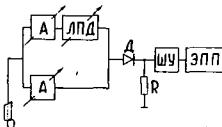


Рис.10. Блок-схема: А – переменные аттенюаторы; ЛПД – линия переменной длины; Д-3Б – широкополосный детектор; ШУ – широкополосный усилитель; ЭПП – автоматический электронный потенциометр.

Вместе с тем определено наблюдаются также и скачки фаз.

Таким образом, рассматриваемый случай соответствует смеси регулярных и случайных фаз. Заметим, что в исследуемых случаях параметр, характеризующий нелинейность колебаний, еще не велик. Можно ожидать, что с ростом этого параметра степень стохастичности фаз будет возрастать.

Важной характеристикой случайных процессов, происходящих в плазме, являются, как известно, корреляционные функции $\Psi(\tau)$. Возможность экспериментального исследования случайных процессов в нелинейных системах для очень медленных процессов (биотоки мозга; $\tau \sim 0,1$ –1 сек) была особенно отчетливо указана Н. Винером [II].

В нашем случае можно ожидать, что время корреляции очень мало ($\tau < 0,1$ мксек). Поэтому непосредственное использование методов измерения корреляционных функций, указанное выше, невозможно. Вместе с тем, основная идея измерения, указанная Н. Винером, может быть использована. Блок-схема установки приведена на рис. 10.

Для измерения автокорреляционной функции колебания, возникающие при развитии неустойчивостей и принимаемые петлей через переменные аттенюаторы поступали по различным путям (I и 2) на квадратичный детектор. Следовательно, на детектор поступала сумма двух сигналов

$$f(t) + f(t + \tau)$$

где τ – время запаздывания второго сигнала $f(t + \tau)$ по отношению к первому $f(t)$, вызываемое различными длинами путей I и 2.

После прохождения через квадратичный детектор и усредняющую по времени интегрирующую ячейку величина сигнала была

$$\tilde{V}(\tau) \sim \overline{f(t) \cdot f(t + \tau)}$$

где черта обозначает усреднение по времени.

Затем сигнал через широкополосный усилитель поступал на автоматический электронный потенциометр. Изменяя время задержки τ в плече 2 при помощи линии переменной длины, можно получить автокорреляционную функцию. В нашем случае плавное изменение τ достигалось в пределах 0–1,1 мсек. Затем в плечо 2 добавлялся отрезок кабеля (со временем задержки t мсек) и снова при помощи линии переменной длины изменялось в пределах $t + 1,1$ мсек и т. д.

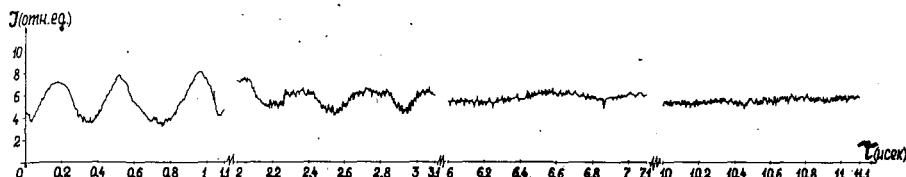


Рис.11. Корреляционная кривая. Ток пучка 32 а.

Таким образом, время корреляции изменялось до 300 нсек. Образец такой кривой приведен на рис. II. (ток 32 а). Из этой кривой видно, что спустя 8 нсек осцилляции пропадают.

С уменьшением тока электронного пучка и, следовательно, плотности плазмы это время возрастает. (Так, например, при токе 13 а это время ≥ 11 нсек).

Следует отметить, что так как мы снимаем автокорреляционную функцию от начала развития неустойчивости, когда исследуемый процесс является нестационарным, то для обработки результатов измерений, необходимо воспользоваться обобщением теоремы Винера-Хинчина на случай нестационарных процессов [12]. Для этого необходимо произвести дополнительные измерения $\Psi(t, \tau)$ в зависимости от времени t .

IV. Изложены экспериментальные результаты исследования взаимодействия электронных импульсных пучков (ток пучка 5-8 а, энергия 8-10 кэв, длительность импульса 110 мксек, диаметр пучка 1,2 см) с сильно-ионизованной плазмой ($\geq 70\%$) с плотностью 10^{12} - 10^{13} см $^{-3}$ (так называемый интенсивный плазменно-пучковый разряд).

Как известно [4], интенсивность взаимодействия возрастает с увеличением плотности плазмы и, кроме того, переход к высокоионизованной плазме позволяет исследовать процесс развития пучковых неустойчивостей и переход к турбулентной плазме в условиях, когда парные соударения не играют существенной роли.

Блок-схема установки приведена на рис. I2. Вакуумная часть установки до некоторой степени аналогична установке, описанной в работе [13]. Перепад давлений от 10^{-6} мм рт.ст. в области электронной пушки до 10^{-3} мм рт.ст. в плазменной камере осуществлялся при помощи двух пар диафрагм с отверстиями 12 мм. В области между диафрагмами отдельным диффузионным насосом (М-1000) поддерживался вакуум в пределах $1-4 \cdot 10^{-5}$ мм рт.ст. Напуск и регулирование давления рабочего газа (аргон, гелий, водород, воздух, азот) в плазменной камере (стеклянная труба диаметром 5 см и длиной 32 см) производился механическим напекатслем. В конце области взаимодействия находился коллек-

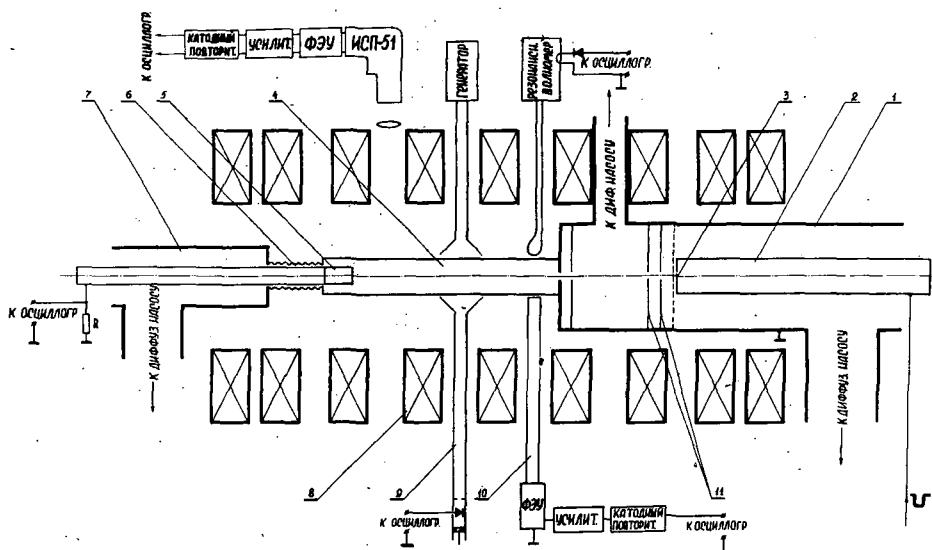


Рис.12. Блок-схема установки: 1 - камера электронной пушки; 2 - катодная ножка; 3 - катод; 4 - плазменная камера; 5 - цилиндр Фарадея; 6 - сильфон; 7 - вакуумная камера; 8 - соленоид для создания магнитного поля; 9 - волновод; 10 - ФЭУ со световодом; 11 - диафрагма для создания перепада давлений.

тор (цилиндр Фарадея), охлаждаемый водой. Вся система (от катода до коллектора) помещалась в продольное однородное магнитное поле, напряженность которого изменялась в пределах 600-1000 э.

В работе измерялись напряжения, ток пучка, электронная плотность плазмы, суммарный световой поток из плазмы, частотный спектр колебаний, возбуждаемых в таком разряде. Определение плотности плазмы осуществлялось методом отсечки СВЧ сигналов с длиной волны 3 и 0,8 см при его прохождении через плазму ($n \geq 10^{12}$ и $1,7 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$). Полный световой поток измерялся ФЭУ со световодом.

Колебания, возбуждаемые в плазме, принимались петлей или зондом и поступали на резонансный волномер, связанный с электронным осциллографом. Петли и зонды размещались как внутри, так и вне объема, занятого плазмой.

Как показали опыты, при давлениях рабочего газа в области взаимодействия выше $1 \cdot 10^{-4}$ мм рт.ст. для тока 5 а начинается развитие неустойчивостей, приводящее к образованию плотной плазмы с большим коэффициентом ионизации (70-100%) (рис.13). Момент образования плотной плазмы характеризуется одновременным уменьшением тока (до нуля), запиранием СВЧ сигнала, резкой вспышкой света из плазмы. Время от начала токового импульса до момента образования плотной плазмы зависит от давления газа, напряженности магнитного поля, тока пучка. Зависимости этого времени от давления (азот, аргон, воздух) при раз-

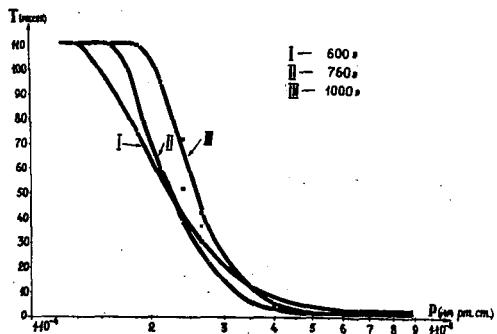


Рис.13. Время образования плотной плазмы в зависимости от давления рабочего газа.
Ток пучка 5 а.

личных магнитных полях (600, 760 и 1000 э) приведены на рис.13 (ток пучка 5 а). Для водорода и гелия графики имеют аналогичный вид.

Как видно из графика, при давлениях $I,4-I,8 \cdot 10^{-4}$ мм рт.ст. начинается образование плотной плазмы. (Плотность $n \geq 10^{12} \text{ см}^{-3}$ определялась по отсечке СВЧ сигнала с длиной волны 3 см). При этих давлениях время развития нестабильности равно длительности импульса (110 мксек) и можно предположить, что для образования плотной плазмы при давлениях ниже $I,4 \cdot 10^{-4}$ мм рт.ст. нужен более длинный токовый импульс. При давлениях выше $I,4-I,8 \cdot 10^{-4}$ мм рт.ст. время развития нестабильности резко уменьшается до 7-5 мксек при давлениях $4-5 \cdot 10^{-4}$ мм рт.ст. и при дальнейшем уменьшении давления до 10^{-3} мм рт.ст. остается примерно постоянным. Как видно из графика рис.13, это время также зависит от напряжённости магнитного поля.

Были также сняты зависимости времени образования плотной плазмы от давления рабочего газа и тока пучка (энергия электронов пучка ~ 8 кэв).

Представляет интерес процесс образования плотной плазмы в зависимости от тока пучка в области давлений от 10^{-4} до $I,8 \cdot 10^{-4}$ мм рт.ст. Для фиксированного давления при возрастании тока выше предельного значения происходит образование плотной плазмы. Затем по мере увеличения тока время образования плотной плазмы уменьшается. Это происходит до значений токов 1,5 а. Дальнейшее увеличение тока приводит к тому, что время образования плазмы начинает возрастать и, наконец, при значениях 2-4 а плотная плазма не образуется (в области давлений $I-I,8 \cdot 10^{-4}$ мм рт.ст.). Увеличивая ток до значений 4,5-7,5 а, можно снова добиться образования плотной плазмы. Эта зависимость изображена на рис.14. В заштрихованной части значения тока пучка и давления газа такие, что плотная плазма не образуется. Эта кривая была снята для аргона, азота и воздуха. Для гелия и водорода она имеет аналогичный вид.

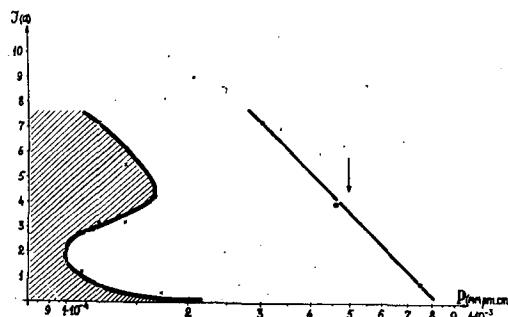


Рис. 14. Образование плотной плазмы (незаштрихованная область) в зависимости от тока пучка при различных давлениях рабочего газа в плазменной камере. Прямая указывает область значений тока и давления, выше которых происходит отсечение СВЧ сигнала с длиной волны 0,8 см.

На этом же графике приведена прямая, соответствующая значениям тока и давления газа, при которых происходит запирание СВЧ сигнала с длиной волны 0,8 см, что соответствует электронной плотности плазмы $n \geq 1,7 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Стрелкой указано давление, соответствующее 100% ионизованной плазме.

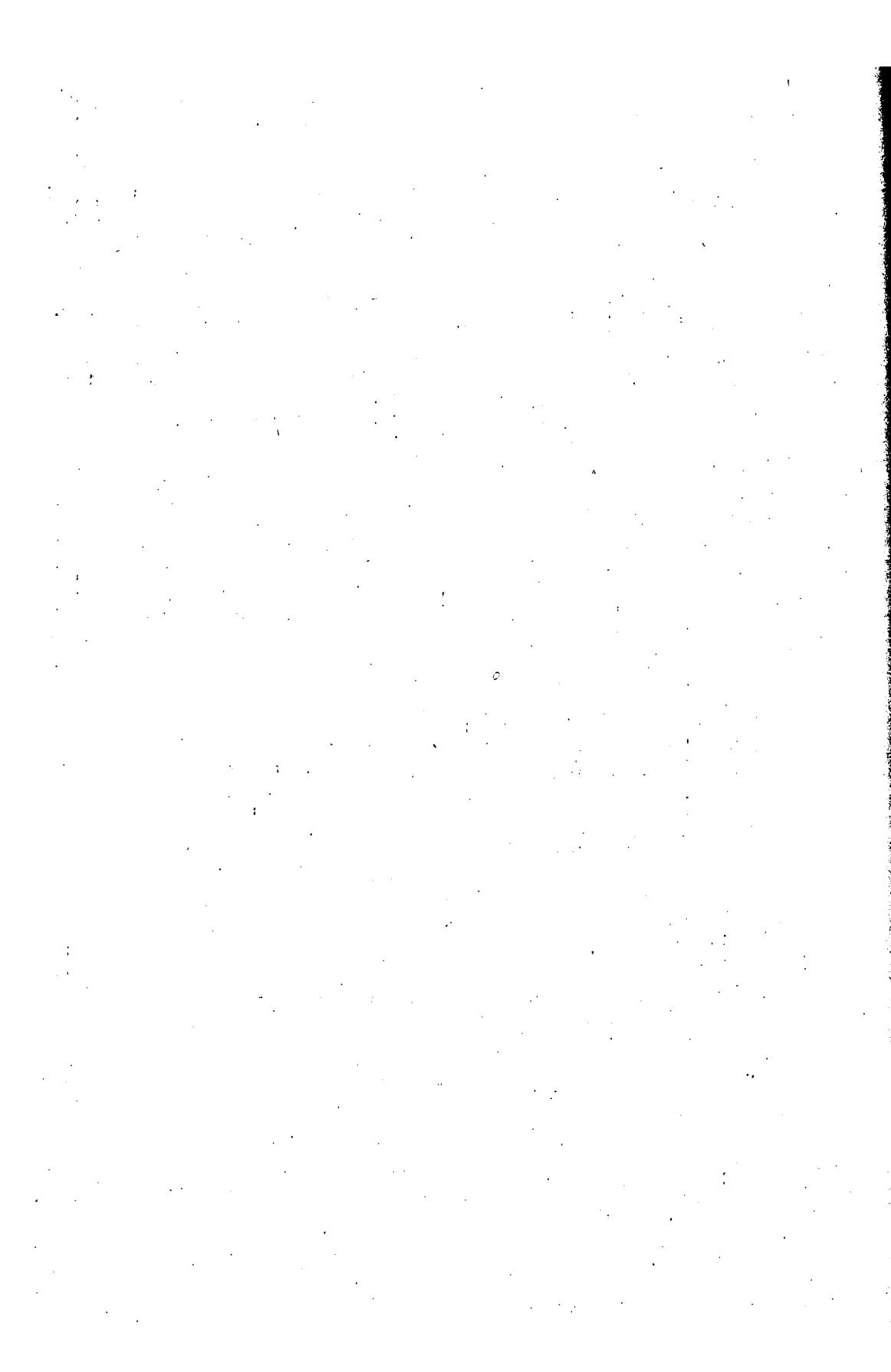
В области, расположенной слева от стрелки, плазменно-пучковый разряд должен был бы иметь степень ионизации превышающую 100%. На самом деле это вызвано ошибкой, возникающей при определении плотности нейтральных частиц. В нашем случае давление рабочего газа измерялось манометрической лампой ЛМ-2 с учётом поправки на сорт газа [14] в отсутствии электронного пучка и магнитного поля.

Как известно, при развитии нестабильностей возникает диффузия заряженных частиц поперек магнитного поля, которые, попадая на стенку плазменной камеры, вызывают дополнительное тажение, что приводит к увеличению числа нейтральных частиц в объёме, занятом плазмой. Этим объясняется ошибка, возникающая при определении степени ионизации плазмы. Тем не менее степень ионизации остаётся достаточно высокой.

Измерения частотных спектров показали, что переход в режим взаимодействия электронного пучка с плотной плазмой сопровождается излучением в широком спектре частот. Мы обнаружили это излучение в диапазоне 100 кГц-10000 МГц.

Л и т е р а т у р а

- I. И.Ф.Харченко, Я.Б.Файнберг, Е.А.Корнилов, Р.М.Николаев, Е.И.Луценко, Н.С.Педенко, ЖЭТФ, 38, 685, (1960); "Ядерный синтез", приложение, 3, IIIOI, (1962).
- E.B.Богданов, В.Я.Кислов, З.С.Чернов, Радиотехника и электроника, 5, 229, 1974, (1960).
- В.Д.Федорченко, В.И.Муратов, Б.Н.Руткевич, ЖТФ, 34, 463, (1964); "Ядерный синтез", 4, 300, (1964).
- Р.А.Демирханов, А.К.Геворков, А.Ф.Попов, Г.И.Зверев, ЖТФ, 30, 306, 315, (1960).
2. G.D. Boyd, L.M. Field, R.W. Gould, Phys. Rev., 109, 1393, (1958);
L.D. Smullin and W.D. Getty, Phys. Rev. Lett., 9, 1, (1962);
Journ. of Appl. Phys., 34, 3421, (1963);
J. Alexeff and R.V. Neidigh, Phys. Rev. Lett., 13, 179, (1964);
J. Alexeff, N.V. Neidigh and W.F. Peed, Phys. Rev., 136, N3A, 689, (1964)
3. А.К.Березин, Я.Б.Файнберг, Г.П.Березина, Л.И.Болотин, "Атомная энергия", 14, 249, (1963).
4. Я.Б.Файнберг, "Атомная энергия", II, 313, (1961).
5. В.Д.Шапиро, ЖЭТФ, 44, 613, (1963).
6. Я.Б.Файнберг, Ф.Г.Басс, В.Д.Шапиро, ЖЭТФ, 49, №7, (1965).
7. Е.А.Корнилов, Я.Б.Файнберг, О.Ф.Ковпик, И.Ф.Харченко, сб."Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза", издат. АН УССР, Киев, IV, 1965 г., стр.150.
8. В.Н.Цитович, ДАН СССР, 142, 319, (1962).
9. Б.В.Чириков, "Атомная энергия", 6, 630, (1959); Б.В.Чириков и Заславский, ЖЭТФ, (в печати).
10. T.H. Stix, *Phys. of Fluids*, 7, 1960, (1964)
- II. Н.Винер, "Нелинейные задачи в теории случайных процессов", ИЛ, Москва, 1961 г.
12. D.G. Lampard, *Journ. of Appl. Phys.*, 25, 802, (1954)
13. C.Etievant, "Ядерный синтез", приложение, 3, I025, (1962).
14. В.А.Ланис, Л.Е.Левин, "Техника вакуумных испытаний", Госэнергоиздат, М-Л, 1963 г., стр.37-38, 259.



ВЗАЙМОДЕЙСТВИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ С ПЛАЗМОЙ НА УСТАНОВКЕ "ДЕЛЬТА-2"

С.Н.БРЕУС, В.Н.КУРДЮМОВ, М.Л.ЛЕВИН, С.М.ОСОВЕЦ,
Н.Я.ПОПОВА, И.А.ПОПОВ, К.В.ХОДАТАЕВ и В.П.ШИМЧУК
РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ АН СССР, МОСКВА
СССР

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

INTERACTION BETWEEN HF WAVES AND PLASMA IN DELTA-2. The paper describes the results of research on the interaction of a dense plasma with the high-frequency field of a magnetic wave travelling along a toroidal discharge chamber (large diameter - 700 mm, small diameter - 85 mm). The travelling wave is excited at a frequency 2.4 Mc/s by a three-phase automatic generator with a power about 50 MW and a pulse length about 250 to 350 μ s. The range of initial pressures was 0.1 to 0.001 Torr and the amplitude of the hf magnetic field on the surface of the plasma attained 500 to 600 Oe. In these circumstances, the main factors determining the interaction are connected with the non-linear effects and, above all, with the appearance of a steady longitudinal component of current that reached values of a few thousand amperes. In the centre of the chamber, in the small-field region, the conductivity of the plasma was of the order of 3 to 4×10^{14} esu, which, for close to 100% ionization, corresponds to an electron temperature of 8 to 12 eV. In the strong-field (skin-layer) region, conductivity falls off by more than an order of magnitude, which leads to a sharp increase in the required HF power. In addition to a longitudinal current, the plasma was found to contain a longitudinal quasi-stationary field formed by transverse currents in the plasma. This field has a composite structure and, as shown by theoretical approximations, is possibly due to a toroidal effect.

The existence of quasi-stationary magnetic fields apparently has a connection with the plasma oscillations which have been observed at 200 to 500 kc/s, corresponding approximately to the natural Alfvén oscillations in such fields. The quasi-stationary currents and fields hamper the detachment of the plasma from the walls of the discharge chamber and subsequent compression. By themselves, however, the longitudinal steady waves cannot lead to the development of kinetic instabilities, since the electron velocities corresponding to such instabilities are smaller than the phase velocity of the travelling wave, about 5×10^7 cm/s, which is considerably smaller than the thermal velocity of the electrons.

INTERACTION DANS «DELTA-2» D'UNE ONDE PROGRESSIVE ELECTROMAGNETIQUE DE HAUTE FREQUENCE ET D'UN PLASMA. Le mémoire expose les résultats de l'étude de l'interaction d'un plasma dense et du champ de haute fréquence d'une onde magnétique progressant le long d'une chambre de décharge toroïdale (grand diamètre - 700 mm, petit diamètre - 85 mm). L'onde progressive est excitée à une fréquence 2,4 MHz par un autogénérateur triphasé d'une puissance d'environ 50 MW avec une durée d'impulsion comprise entre 250 et 350 μ s. Les pressions initiales étaient comprises entre 0,1 et 0,001 Torr, et le champ magnétique de haute fréquence à la surface du plasma atteignait de 500 à 600 Oe. Dans ces conditions, les phénomènes essentiels qui déterminent l'interaction sont liés aux effets non linéaires et avant tout à l'apparition d'une composante permanente du courant longitudinal qui a atteint des valeurs de plusieurs milliers d'ampères. Au centre de la chambre, dans la zone des champs faibles, la conductivité du plasma était de l'ordre de $3 \text{ à } 4 \cdot 10^{14}$ esu, ce qui pour un degré d'ionisation proche de 100% correspond à une température des électrons de 8 à 12 eV. Dans la zone des champs forts (zone de la couche où se produit l'effet pelliculaire), la conductivité diminue d'un ordre de grandeur, ce qui produit une augmentation brutale de la puissance de haute fréquence utilisable. Les auteurs ont découvert auprès du courant longitudinal dans le plasma un champ magnétique longitudinal quasi stationnaire, formé par des courants transversaux. Ce champ a une structure complexe et il est possible qu'il soit conditionné, comme le montre la théorie de l'approximation, par un effet toroïdal.

Il est probable que les oscillations de plasma observées, de 200 à 500 kHz, correspondant par exemple aux oscillations particulières d'Alfvén dans ces champs, soient en rapport avec l'existence des champs magnétiques quasi stationnaires. La présence de courants et de champs quasi stationnaires rend plus difficile l'isolement du plasma par rapport aux parois de la chambre de décharge ainsi que la compression ultérieure. Cependant,

les courants permanents longitudinaux ne peuvent d'eux-mêmes provoquer des instabilités de type cinétique, étant donné que les vitesses des électrons de ce courant sont moins élevées que la vitesse de phase de l'onde progressive qui est par exemple de $5 \cdot 10^7$ cm/s, c'est-à-dire inférieure à la vitesse thermique des électrons.

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ С ПЛАЗМОЙ НА УСТАНОВКЕ "ДЕЛЬТА-2". Излагаются результаты исследования взаимодействия плотной плазмы с высокочастотным полем магнитной волны, бегущей вдоль тороидальной разрядной камеры (большой диаметр – 700 мм, малый – 85 мм). Бегущая волна возбуждается на частоте $f = 2,4$ МГц трехфазным автогенератором мощностью около 50 Мвт с длительностью импульса около $250 \div 350$ мксек. При экспериментах диапазон начальных давлений составлял $0,1 \div 0,001$ тор, а амплитуда высокочастотного магнитного поля на поверхности плазмы достигала $500 \div 600$ э. В этих условиях основные явления, определяющие взаимодействие плазмы с полем бегущей волны, связаны с наличием нелинейных эффектов и, прежде всего, с появлением постоянной составляющей продольного тока, которая достигала значений нескольких тысяч ампер. В центре камеры в области малых полей проводимость плазмы была порядка $(3 \div 4) \cdot 10^{14}$ CGSE, что при степени ионизации, близкой к 100%, соответствует электронной температуре $8 \div 12$ эв. В области сильных полей (области скрин-слоя) проводимость снижается более чем на порядок, что приводит к резкому увеличению потребляемой высокочастотной мощности. Наряду с продольным током в плазме обнаружено продольное квазистационарное магнитное поле, создаваемое поперечными токами в плазме. Это поле имеет сложную структуру и, возможно, обусловлено, как показывает приближенная теория, тороидальным эффектом.

С существованием квазистационарных магнитных полей связаны, вероятно, наблюдаемые плазменные колебания, частота которых $200 \div 500$ кгц, примерно соответствуют собственным альфвеновским колебаниям в таких полях. Наличие квазистационарных токов и полей затрудняет отрыв плазмы от стенок разрядной камеры и последующее сжатие. Однако сами по себе продольные постоянные токи не могут привести к возникновению неустойчивостей кинетического типа, так как соответствующие им скорости электронов меньше фазовой скорости бегущей волны, которая примерно равна $5 \cdot 10^7$ см/сек, то есть значительно меньше тепловой скорости электронов.

INTERACCION DE UNA ONDA PROGRESIVA ELECTROMAGNETICA DE ALTA FRECUENCIA CON EL PLASMA EN LA INSTALACION «DELTA-2». En la memoria se exponen los resultados del estudio de la interacción de un plasma denso con el campo de alta frecuencia de una onda magnética que se propaga a lo largo de una cámara de descarga toroidal (diámetro mayor = 700 mm, diámetro menor = 85 mm). Se excita la onda progresiva, de frecuencia 2,4 MHz, mediante un autogenerador trifásico cuya potencia es, aproximadamente, 50 MW; la duración del impulso está comprendida entre 250 y 350 μ s. El intervalo de presiones iniciales está comprendido entre 0,1 y 0,001 Torr y la amplitud del campo magnético de alta frecuencia en la superficie del plasma alcanza 500 a 600 Oe. En estas condiciones, los fenómenos fundamentales que determinan la interacción están relacionados con la existencia de efectos no lineales y, ante todo, con la aparición de una componente constante de la corriente axial, la cual alcanzaba valores de varios millares de amperios. En el centro de la cámara, en la región de los campos débiles, la conductividad del plasma era del orden de $3 \div 4 \cdot 10^{14}$ esu, la cual, para un grado de ionización próximo al 100%, corresponde a una temperatura electrónica de 8 a 12 eV. En la región de los campos intensos (capa superficial), la conductividad disminuye en más de un orden de magnitud, lo que da lugar a un gran aumento del consumo de energía de alta frecuencia. Junto con la corriente axial se ha observado en el plasma un campo magnético axial quasi-estacionario, originado por las corrientes transversales en el plasma. Este campo tiene una estructura compleja y, posiblemente, está determinado, como indica una teoría aproximada, por el efecto toroidal.

La existencia de los campos magnéticos quasi-estacionarios guarda al parecer una relación con las oscilaciones del plasma que se han observado, de 200 a 500 kHz, correspondientes, aproximadamente, a las oscilaciones de Alfvén en dichos campos. La presencia de campos y de corrientes quasi-estacionarios hace que sea más difícil separar el plasma de las paredes de la cámara de descarga y lograr la restricción ulterior. Sin embargo, las corrientes constantes axiales, por sí mismas, no pueden dar lugar a la aparición de inestabilidades del tipo cinético, ya que las velocidades electrónicas que les corresponden son menores que la velocidad de fase de la onda progresiva, la cual es, aproximadamente, igual a $5 \cdot 10^7$ cm/s, es decir, apreciablemente menor que la velocidad térmica de los electrones.

Содержание доклада составили эксперименты, являющиеся продолжением исследования возможности удержания плазмы полем бегущей волны (1,2) на установке "Дельта-2". Эти эксперименты посвящены изучению квазистационарных магнитных полей, возникающих в разряде под воздействием высокочастотного бегущего поля.

Описание установки

В установке "Дельта-2" разрядная камера представляет собой кварцевый тор с большим диаметром 70 см и малым 9 см. Исследования проводились в рабочем диапазоне давлений 10^{-2} - 10^{-3} мм рт.ст. Поскольку изучаемое явление мало зависит от сорта газа, в качестве газа использовался, в основном, воздух. ВЧ поле бегущей волны создавалось в резонансной системе специальным автогенератором мощностью 40 Мвт на частоте 2,4 МГц. Фазовая скорость распространения волны $5 \cdot 10^7$ см/сек. При этом вдоль средней линии тора укладывалось 12 длин волн. Амплитудное значение напряженности высокочастотного магнитного поля на поверхности плазмы достигало 500 э. Длительность импульса генератора 300 мксек. Проведенные исследования указывают на то, что основная доля ВЧ мощности рассеивается в плазме. Подробное изучение пространственного распределения квазистационарных магнитных полей производилось с помощью магнитных зондов. Магнитные зонды размещались в кварцевых трубках с внешним диаметром 0,3 см, которые пронизывали разрядную камеру в двух направлениях - горизонтальном (в плоскости тора) и вертикальном. Размеры рамки зонда 0,3 x 0,1 см. Для измерений ВЧ составляющих магнитного поля использовались зонды еще меньших размеров. Протекающий вдоль тора квазистационарный ток измерялся поясом Роговского. Концентрация электронов в плазме оценивалась по прохождению 2-миллиметровых волн.

Для обозначения компонент магнитных полей и токов в дальнейшем будем пользоваться "цилиндрическими" координатами, считая, что ось Z касается средней линии тора. Высокочастотное магнитное поле будем обозначать буквой В, квазистационарное - буквой Н.

Результаты измерений

Высокочастотное магнитное поле в плазме затухает в раз на расстоянии 0,6 см. Такая величина скин-слоя хорошо согласуется с величиной мощности генератора, которая рассеивается плазмой. При начальном давлении газа меньшем $5 \cdot 10^{-3}$ мм рт.ст. и ампли-

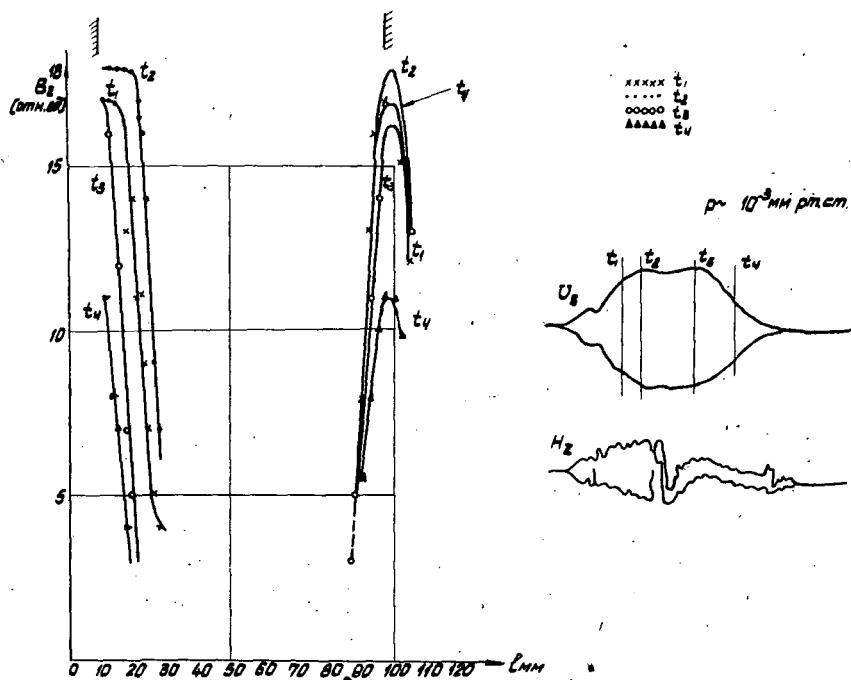


Рис. 1. Распределение высокочастотного поля B_z в горизонтальном сечении камеры в различные моменты времени.

туде ВЧ поля $B_z > 400$ э наблюдается отход скин-слоя от стенки разрядной камеры в том месте, где она ближе к центру тора и где ВЧ поле из-за тороидальности больше. Смещение скин-слоя наблюдается тем отчетливее, чем ниже начальное давление. Смещение сопровождается выравниванием максимального значения амплитуды поля B_z на внешней стороне камеры и стороне, обращенной к центру тора. Это хорошо видно на фиг. I, где показаны распределения B_z в горизонтальном сечении в различные моменты времени. Видно, что во время нарастания амплитуды ВЧ поля наступает момент, когда скин-слой отходит от стенки камеры. В середине импульса отход прекращается. Отсутствие ВЧ токов вблизи стенки, по-видимому, обусловлено снижением электронной концентрации в этой области и соответствующим уменьшением проводимости.

Таким образом, плазма, хотя и не оторвана полностью от стенок камеры, занимает положение, близкое к положению устойчивого равновесия, которое возможно в тороидальной системе с бегущей волной.

Известно, что в тороидальных системах с бегущей волной наблюдается квазистационарный ток I_z , обусловленный увлече-

нием электронов полем бегущей волны. На "Дельте-2" исследовалось пространственное распределение магнитного поля H_ϕ , создаваемого этим током, величина которого достигает 3000 а.

Измерения в горизонтальном и вертикальном сечении указывают на наличие существенной зависимости поля H_ϕ от угла ϕ . Если считать, что в первом приближении все квазистационарные величины от z не зависят, то из условия $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ следует, что имеется компонента H_ψ , причем и H_ϕ и H_ψ определяются только током $j_z(\psi, \phi)$.

Если разложить $j_z(z, \phi)$ в ряд Фурье по круговым гармоникам, то по результатам измерений можно определить нулевую и первые гармоники C_1 и D_1 . Остальными гармониками, по-видимому, можно пренебречь, поскольку $H_\psi < H_\phi$. Результаты измерений H_ϕ аппроксимируются полиномами, причем степень полинома выбирается минимальной, но такой, чтобы описываемая им функция отклонялась от большинства экспериментальных значений на величину, не превышающую точность измерений. Вычисление коэффициентов C_0 , C_1 и D_1 проводится с учетом торOIDальности системы, зависимости всех величин от угла ϕ . В силу того, что для каждого ψ имеется четыре измеренных значения H_ϕ , а это больше числа определяемых коэффициентов, для C_0 и C_1 получаются два решения, и соответственно два распределения тока j_z . Близость этих двух распределений является критерием справедливости отбрасывания высших гармоник в разложении тока в ряд Фурье.

Численные расчеты проводились на ЭМВ-20. На фиг.2 приведены наиболее характерные из полученных результатов для двух моментов времени.

Измерения на установке "Дельта-2" показали, что в условиях проводившихся экспериментов возникает квазистационарное продольное поле H_z . Подробное исследование пространственного распределения поля H_z указало на существование двух различных структур. На фиг.3, где показаны распределения H_z в горизонтальной и вертикальной плоскости в различные моменты времени для одного из опытов, можно видеть, что во время отхода ВЧ скин-слоя от стенки камеры наблюдается пространственное распределение квазистационарного поля H_z , соответствующее структуре токов, показанной на фиг.4 (назовем ее I-й структурой поля H_z).

Когда отход скин-слоя от стены камеры прекращается, I-я структура сменяется другой структурой, показанной на фиг.5 (2-я структура). Это видно на осциллограммах поля H_z (фиг.6), полученных при положениях магнитного зонда, обозначенных на фиг.4

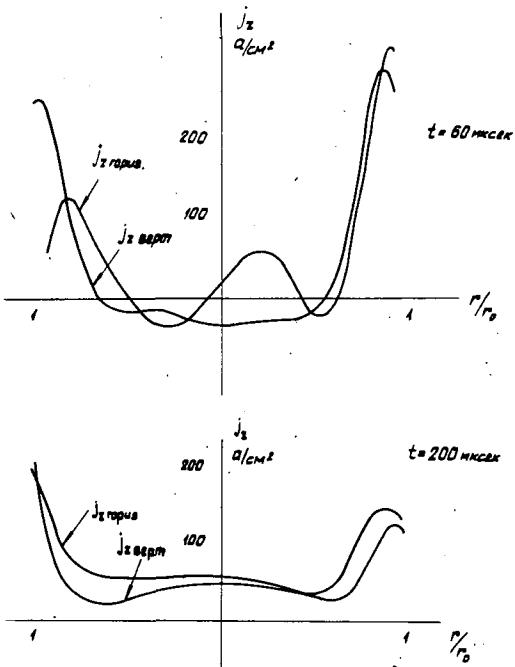


Рис.2. Распределение плотности квазистационарного тока j_z в горизонтальном и вертикальном сечениях камеры для двух моментов времени, вычисленные на ЦВМ по данным магнитных измерений.

и 5 цифрами 1 и 2. Максимальная величина магнитного поля 1-й структуры составляет 120 э, 2-й структуры - 170 э (при 500 э ВЧ поля).

Следует также отметить, что ни на 1-ю, ни на 2-ю структуру поля H_z направление распространения волны и производная по времени огибающей ВЧ поля не влияют.

На установке "Дельта-2" проведены также измерения квазистационарных полей, возникающих при воздействии на плазму ВЧ поля стоячей волны. Частота и амплитуда ВЧ поля, число волн вдоль тора те же, что и в опытах с бегущей волной.

При воздействии ВЧ поля стоячей волны возникает квазистационарное поле H_z . Его структура напоминает 1-ю структуру поля H_z при бегущей волне с той разницей, что максимумы поля H_z расположены не в вертикальном сечении, а в горизонтальном (см. фиг.7). Величина поля H_z имеет явно выраженный максимум по в максимумах ВЧ поля.

При стоячей волне наблюдается также квазистационарное поле H_φ с периодической структурой по z . Соответствующие линии тока, создающего это поле, изображены на фиг.8.

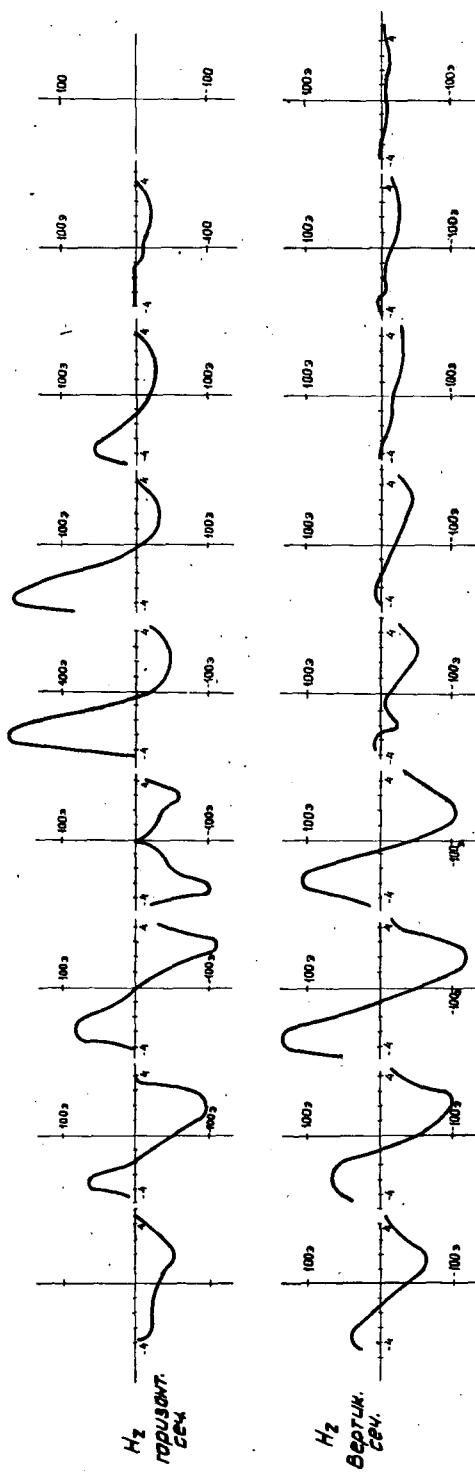


Рис.3. Распределение квазистационарного поля H_z в горизонтальном и вертикальном сечении камеры в различные моменты времени.

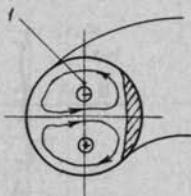


Рис.4. Структура квазистационарного тока, возникающая во время отхода в.ч. скин-слоя от стенки камеры в поперечном сечении камеры.

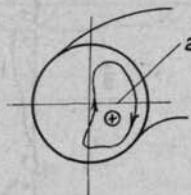


Рис.5. Структура квазистационарного тока, возникающая, когда отход в.ч. скин-слоя от стенки камеры прекращается.

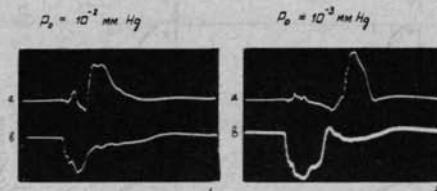


Рис.6. Типичные осциллограммы квазистационарного поля H_z , иллюстрирующие смену структур квазистационарных токов: а) поле H_z в точке 2 на фиг.5, $p_0 = 10^{-2}$ тор; в) – поле H_z в точке 1 на фиг.4, $p_0 = 10^{-3}$ тор.

На фиг.9 приведены осциллограммы полей H_φ и H_z . Видно, что эти поля существуют в течение всего ВЧ импульса. Наибольшая величина квазистационарных полей при стоячей волне $H_z = 140$ э, $H_\varphi = 150$ э.

Во всех экспериментах при $B_z > 300$ э измерения электронной концентрации разряда по прохождению электромагнитных колебаний с длиной волны 2 мм показывает, что $n_e > 2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$.

Обсуждение результатов

Анализ полученных распределений плотности тока j_z в вертикальном и горизонтальном сечениях камеры приводят к следующему представлению о характере процесса.

Как уже говорилось, причиной возникновения квазистационарных токов в плазме являются нелинейные эффекты взаимодействия

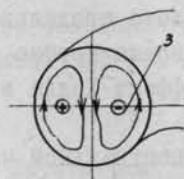


Рис. 7. Структура квазистационарного тока, протекающего в поперечном сечении камеры в режиме стоячей волны.

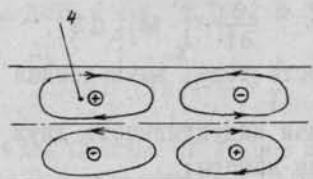


Рис. 8. Структура квазистационарного тока, протекающего в продольном сечении камеры в режиме стоячей волны.

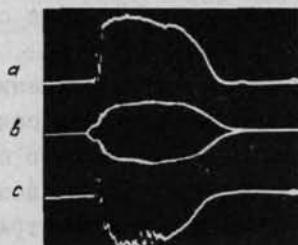


Рис. 9. Осциллограммы квазистационарных полей H_z и H_ψ в режиме стоячей волны в точках, отмеченных на фиг. 7, 8: а - поле H в точке 4 на фиг. 8; б - поле B_z в скин-слое; в - поле H_z в точке 3 фиг. 7.

вия мощного высокочастотного поля с электронами плазмы (эффект Холла). Усредненные силы, действующие на электроны, эквивалентны сторонним э.д.с., локализованным в области скин-слоя. На первый взгляд могло бы показаться, что квазистационарные токи также должны быть локализованы в скин-слое. Однако, это стороннее поле меняется во времени и вдоль поверхности плазменного шнура. Это приводит к возникновению квазистационарных токов во всей толще шнура.

Поскольку эксперимент проводился в импульсном режиме, то кроме дрейфового тока, протекающего в скин-слое ВЧ поля, в плазме возбуждается индукционный ток, который слабо сканируется и протекает по всему сечению камеры. В момент нарастания I_z этот ток направлен против основного тока, в момент спадания в ту же сторону. Величина индукционного тока не превышает значения 0,3

. Возникновение дрейфового продольного и индукционного токов качественно и количественно хорошо описывается обобщенным законом Ома, учитывающим эффект Холла в магнитогидродинамическом приближении.

Если принять, что в центральной части разряда протекает ток только индукционного происхождения, то возникает возможность оценить проводимость плазмы из соотношения:

$$G = \frac{j_z \text{инд} \cdot 2\pi (R + \chi \cos \Phi)}{\frac{\partial}{\partial t} \int_s M j_z dS}$$

j_z - плотность тока, вычисленная по распределению поля ;

M - взаимная индуктивность двух тонких колец;

S - сечение камеры;

$j_z \text{инд}$ - плотность токов в центральной части разряда.

Расчет по этой формуле на ЭВМ-20 дает значение проводимости 10^{14} ед CGSe. В скин-слое эффективная проводимость для токов высокой частоты, оцененная по толщине скин-слоя 0,6 см, составляет $3 \cdot 10^{13}$ ед CGSe.

Наблюдающаяся асимметрия в распределении квазистационарного тока I_z в вертикальном и горизонтальном сечениях хорошо объясняется наличием квазистационарного магнитного поля H_z . Поскольку $\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \neq 0$, то $j_\varphi \neq 0$ и, следовательно, возникает дрейфовый ток $\frac{\partial \varphi}{\partial t} [j_z H_\varphi]$, который приводит к асимметрии в распределении плотности тока j_z .

Из-за тороидальности системы с бегущей волной, эксцентрикитета шнура и отклонения формы его поперечного сечения от круговой, что отчетливо проявляется при отходе скин-слоя от стенки разрядной камеры, высокочастотное поле содержит компоненту B_φ , которая приводит к появлению стороннего поля $E_\varphi^{\text{ст}}$, зависящего от φ . Обусловленный ею поперечный ток течет и в скин-слое и в толще шнура и имеет распределение, показанное на фиг.4. Соответствующее ему квазистационарное магнитное поле должно менять знак внутри плазмы, что совпадает с наблюдаемыми кривыми поля I-й структуры. Этот эффект, естественно, (фиг.3) наиболее сильно проявляется в момент отхода скин-слоя от стенки камеры и не зависит от направления распространения волны.

Квазистационарное поле H_z в опытах со стоячей волной, по-видимому, также связано с возникновением B_φ , зависящим от φ .

Нам пока не удалось выявить причины возникновения поля H_z 2-й структуры в опытах с бегущей волной и поля H_φ в опытах

со стоячей волной, хотя есть основания предполагать, что их появление также вызвано влиянием эффекта Холла.

Литература

1. Андреев В.Г. и др. Доклад № 10/250 на Зальцбургской конференции, 1961.
2. Борзунов Н.А. и др. ДАН, 1963, т.152, № 3, стр. 581.

DISCUSSION

T. CONSOLI: What is the Q of the RF system and how does it change with time? Also, how does \tilde{B} change with time as the plasma becomes detached from the walls and is heated?

D. V. ORLINSKY: Q is between 4 and 5 as long as the plasma is not detached from the walls. As the plasma detaches itself from the inside wall Q increases slightly, and accordingly \tilde{B} also rises. However, the plasma temperature does not change, since the plasma continues to be in contact with the wall over a large part of its surface. As the plasma detaches itself from the inside and outside walls, the \tilde{B} field becomes the same at both walls (Fig. 1).



ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЧ-ИЗЛУЧЕНИЯ С ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМОЙ

А.И.КИСЛЯКОВ, М.М.ЛАРИОНОВ и В.В.РОЖДЕСТВЕНСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им.А.Ф.ИОФФЕ АН СССР
ЛЕНИНГРАД
СССР

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

INTERACTION BETWEEN UHF RADIATION AND A TURBULENT PLASMA. Previous work revealed an anomalously low low-frequency conductivity of plasma in the Alpha apparatus. Our purpose in this work was to determine the UHF conductivity. For the wavelengths 8 and 4 mm, we observed the passage of signals through the plasma, the thermal radiation of the plasma and, because of the plasma, the changed Q-factor of the discharge chamber which is regarded as a large volume resonator. Simultaneously the average plasma density was determined from the attenuation of the beam of hydrogen atoms passing through it. During the active discharge period, the plasma density was between 10^{13} and 10^{14} cm^{-3} , and the electron temperature 20 to 40 eV. A force-free configuration of fields and currents existed in the discharge, and the plasma filled comparatively evenly the discharge chamber of about 6 m^3 . In the decaying plasma, following the discharge current, interferometric measurements of the electron concentration agreed with density measurements that used the attenuation of an atomic beam. In the active period of the discharge, interferometric measurements were impossible because of the strong turbulence of the plasma, so the electron concentration was determined from the attenuation of the atomic beam.

From the Q-value of the discharge chamber during the discharge, one can determine the absorption coefficient of the UHF signal in the plasma. If the average density is known from the attenuation of the atomic beam, it is possible to find the effective frequency of electron collisions. This may also be found from the dc conductivity of the plasma, which is determined by electrical measurements. On the other hand, from the observed densities and electron temperatures one can calculate the frequency of electron collisions for a totally ionized hydrogen plasma. Both methods of determining experimentally the effective collision frequency gave much higher values than found by calculation. We may thus assert that there existed in our plasma an electron slowing-down mechanism which was more effective than Coulomb collisions with singly-charged ions. This caused the anomalously low conductivity and anomalously high absorption coefficient in the UHF range.

As well as measuring the Q-factor, we measured the attenuation of 8 and 4-mm signals passing through the plasma. The signal was strongly attenuated at plasma densities which were far from critical. For example, the power of a 4-mm signal was reduced by 10 decibels on passing through a layer of plasma 1 m thick, whose density was 1.5 to $2.0 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ whereas the critical density for this range is $7 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$. Thus, determination of the electron concentration by "cut-off" of the signal gives much higher results. Attenuation of the signal at concentrations far from critical may be caused both by absorption in the plasma and by scattering from non-homogeneous regions of the plasma. Calculation shows that the observed attenuation cannot be explained by absorption, even with the anomalously high measured absorption coefficient. Most likely, attenuation is a result of the scattering of UHF radiation from non-homogeneous regions in a turbulent discharge. A further, more careful study of this scattering may give a method for investigating the turbulent state of the plasma.

INTERACTION D'UN RAYONNEMENT DE FREQUENCE ULTRA-HAUTE ET D'UN PLASMA TURBULENT. Au cours de travaux antérieurs, on avait constaté que dans l'installation Alpha, le plasma avait une conductibilité de basse fréquence anormalement faible. La présente étude a pour objet de déterminer la conductibilité de fréquence ultra-haute dans les mêmes conditions. Pour des gammes d'ondes d'une longueur de l'ordre de 8 et 4 mm, les auteurs ont étudié le passage des signaux à travers le plasma, le rayonnement thermique de celui-ci et l'influence du plasma sur le facteur Q de la chambre à décharge considérée comme un résonateur volumique de grande dimension. En même temps, ils ont déterminé la densité moyenne du plasma en fonction de l'amortissement du faisceau d'hydrogène atomique qui le traverse. Au cours de la période active de la décharge, la densité du plasma varie de 10^{13} à 10^{14} cm^{-3} et la température des électrons de 20 à 40 eV. Dans la

décharge, les champs et les courants ont une configuration d'intensité zéro et le plasma remplit à peu près régulièrement la chambre à décharges, d'un volume de 6 m^3 environ. Des mesures interférométriques de la concentration des électrons, effectuées dans le plasma en voie de décroissance après l'arrêt du courant de décharge, ont donné des résultats qui concordent avec celles que les auteurs ont obtenues en mesurant le nombre volumique selon l'affaiblissement du faisceau atomique. Pendant la période active de la décharge, il est impossible de procéder à des mesures interférométriques en raison de la forte turbulence du plasma, et la concentration électronique a été déterminée sur la base de l'affaiblissement du faisceau atomique.

La détermination du facteur Q de la chambre au cours de la décharge permet d'établir le coefficient d'absorption du signal à fréquence ultra-haute dans le plasma. Si l'on connaît la densité moyenne, déterminée sur la base de l'affaiblissement du faisceau atomique, on peut alors évaluer la fréquence effective des collisions entre électrons. Cette grandeur peut être également évaluée d'après la conductibilité du plasma pour le courant continu, établie sur la base de mesures électrotechniques. En outre, il est possible de calculer la fréquence des collisions entre électrons dans un plasma d'hydrogène entièrement ionisé en se basant sur les valeurs observées de sa densité et de la température des électrons.

Les valeurs obtenues pour la fréquence effective des collisions à l'aide de ces deux procédés expérimentaux sont sensiblement plus élevées que les valeurs calculées. Ce fait permet d'affirmer qu'il existe dans le plasma étudié un mécanisme de freinage des électrons qui est plus efficace que les collisions coulombiennes avec des ions à charge unique. Il en résulte, dans la gamme des fréquences ultra-hautes, une conductibilité anormalement faible et un coefficient d'absorption anormalement élevé. Outre le coefficient Q, on a mesuré l'atténuation du signal passant à travers le plasma pour les gammes de 8 et 4 mm. Le signal s'atténueait fortement lorsque le plasma avait une densité très éloignée de la densité critique. Ainsi, dans la gamme des 4 mm, la puissance d'un signal ayant traversé une couche de plasma de 1 m d'épaisseur diminuait de 10 décibels pour une densité de $1,5 \pm 2,0 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, alors que la densité critique pour cette même gamme était de $7 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$. On peut en conclure que la détermination de la concentration électronique d'après la «coupure» du signal donne des valeurs beaucoup trop élevées. L'atténuation du signal passant par le plasma en présence de concentrations très différentes de la concentration critique pourrait être provoquée à la fois par une absorption dans le plasma et par une diffusion due au caractère non homogène de sa densité. Les calculs montrent qu'elle ne saurait être expliquée par une absorption dans le plasma, même si le coefficient d'absorption mesuré est anormalement élevé. Il est bien plus probable qu'elle soit liée à une diffusion du rayonnement de fréquence ultra-haute provoquée par une densité hétérogène dans les conditions d'une décharge turbulente. Il est possible qu'un examen plus approfondi de cette diffusion permette d'établir une méthode pour l'étude de la turbulence des plasmas.

ВЗАЙМОДЕЙСТВИЕ СВЧ-ИЗЛУЧЕНИЯ С ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМОЙ. В предыдущих работах обнаружен факт аномально-низкой низкочастотной проводимости плазмы на установке Альфа. Целью настоящей работы было определение СВЧ-проводимости в этих условиях. В диапазонах длин волн 8 и 4 мм наблюдалось прохождение сигналов сквозь плазму, тепловое излучение плазмы и влияние ее на добротность разрядной камеры, рассматриваемой как объемный резонатор больших размеров. Одновременно определялась средняя плотность плазмы по величине ослабления атомарного пучка водорода, проходящего сквозь нее. В активный период разряда плотность плазмы лежит в пределах $10^{13} - 10^{14} \text{ см}^{-3}$, электронная температура $- 20\text{--}40$ эв.

В разряде существует бессиловая конфигурация полей и токов и плазма сравнительно равномерно заполняет разрядную камеру объемом около 6 m^3 . В распадающейся плазме после окончания разрядного тока интерферометрические измерения электронной концентрации дают результаты, совпадающие с результатами измерений плотности по ослаблению атомарного пучка. В активный период разряда из-за сильной турбулентности плазмы интерферометрические измерения невозможны, и электронная концентрация определялась по ослаблению атомарного пучка.

Определение добротности разрядной камеры во время разряда позволяет определить коэффициент поглощения СВЧ-сигнала в плазме. Зная среднюю плотность по величине ослабления атомарного пучка, отсюда можно оценить эффективную частоту электронных столкновений. Эту же величину можно оценить по проводимости плазмы для постоянного тока, определяемой по данным электротехнических измерений. С другой стороны, можно вычислить частоту электронных столкновений в полностью ионизированной водородной плазме при наблюдаемых величинах плотности и электронной температуры. Оба способа экспериментального определения эффективной частоты столкновений дают гораздо более высокие значения ее, чем расчетная оценка. Таким образом, можно утверждать, что в исследуемой плазме существует механизм торможения электронов, более эффективный, чем кулоновские столкнове-

ния с однозарядными ионами. Следствием этого являются аномально-низкая проводимость и аномально-высокий коэффициент поглощения в диапазоне СВЧ.

Наряду с измерением добротности выполнялись также измерения ослабления проходящего через плазму сигнала в диапазонах 8 и 4 мм. Сильное ослабление проходящего сигнала наблюдалось при плотностях плазмы, далеких от критической. Так, мощность сигнала 4 мм, диапазона, прошедшего слой плазмы толщиной 1 м, уменьшается на 10 дБ. уже при плотности $1,5-2,0 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, тогда как критическая плотность для этого диапазона равна $7 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Таким образом, определение электронной концентрации по "отсечке" сигнала дает сильно завышенные результаты. Ослабление проходящего сигнала при концентрациях, далеких от критической, может быть вызвано как поглощением в плазме, так и рассеянием на неоднородностях плотности плазмы. Расчет показывает, что наблюдаемая величина ослабления не может быть объяснена поглощением в плазме, даже при измеренном аномально-высоком коэффициенте поглощения. Скорее всего, ослабление связано с рассеянием СВЧ-излучения на неоднородностях плотности в условиях турбулентного разряда. Дальнейшее более тщательное изучение такого рассеяния может дать метод для исследования турбулентного состояния плазмы.

INTERACCION DE LA RADIACION UHF CON UN PLASMA TURBULENTO. En trabajos anteriores se observó una conductividad de baja frecuencia anómala en el aparato Alfa. La finalidad de las presentes investigaciones era determinar la conductividad UHF en estas condiciones. Para longitudes de onda de 8 y 4 mm, los autores examinaron el paso de las señales a través del plasma, la radiación térmica del plasma y su influencia sobre el factor Q de la cámara de descarga, que es un resonador volumétrico de grandes dimensiones. Simultáneamente, los autores determinaron la densidad media del plasma a partir de la atenuación de los átomos de hidrógeno que lo atravesaban. Durante el período activo de descarga, la densidad del plasma se halla comprendida entre 10^{13} y 10^{14} cm^{-3} y la temperatura electrónica entre 20 y 40 eV. En la descarga los campos y las corrientes poseen una configuración de intensidad nula y el plasma llena de manera bastante uniforme la cámara de descarga, de 6 m^3 aproximadamente. En el plasma en desintegración, después de detener la corriente de descarga, los resultados de las mediciones interferométricas de la concentración electrónica concuerdan con los de las mediciones de la densidad según la atenuación del haz atómico. En el período activo de la descarga, las mediciones interferométricas son imposibles debido a la fuerte turbulencia del plasma; la concentración electrónica se determinó por atenuación del haz atómico.

La determinación del valor Q de la cámara durante la descarga permite calcular el coeficiente de absorción de la señal UHF en el plasma. Conociendo la densidad media, calculada según la atenuación del haz atómico, se puede evaluar la frecuencia efectiva de las colisiones electrónicas. Esta magnitud puede también calcularse basándose en la conductividad del plasma para una corriente continua, que se determinó por las mediciones eléctricas. Por otra parte, en un plasma de hidrógeno totalmente ionizado puede calcularse la frecuencia de las colisiones electrónicas a partir de la densidad y la temperatura electrónica observadas. Ambos métodos de determinación experimental de la frecuencia efectiva de las colisiones dan valores mucho más elevados que los teóricos. Ello permite afirmar que en el plasma investigado por los autores existe un mecanismo de moderación de los electrones más eficaz que las colisiones de Coulomb con iones de carga única. En consecuencia, se observa una conductividad anormalmente baja y un coeficiente de absorción anormalmente elevado en la región UHF.

Además del factor Q, los autores midieron también la atenuación de las señales, para las regiones de 8 y 4 mm, que atravesaban el plasma. Se observó una fuerte atenuación de la señal a densidades del plasma alejadas de la crítica. Así, la potencia de la señal en la región de los 4 mm se redujo en 10 decibeles al atravesar una capa de plasma de 1 m de espesor, de $1,5$ a $2,0 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, de densidad, mientras que la densidad crítica para esta región es de $7 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$. Así, la determinación de la concentración electrónica basándose en la señal de «corte» da resultados mucho más elevados. La atenuación de la señal en concentraciones alejadas de la crítica puede ser causada por la absorción en el plasma y por la dispersión debido al carácter no homogéneo del plasma. Los cálculos demuestran que la atenuación observada no puede explicarse por la absorción en el plasma, incluso cuando el coeficiente de absorción medido es anormalmente elevado. Lo más probable es que la atenuación esté relacionada con la dispersión de la radiación UHF en las regiones no homogéneas en condiciones de descarga turbulenta. Podría hallarse un método de investigación del estado turbulento del plasma estudiando más cuidadosamente esta dispersión.

Разряд, стабилизированный слабым продольным магнитным полем и проводящим кожухом, используется для нагрева плазмы в ряде установок [1, 2]. Такой разряд обычно обнаруживает признаки сильной неустойчивости. Наблюдаются интенсивные колебания ряда его характеристик: производной тока, напряженности электрических и магнитных полей в плазме, яркости свечения плазмы. [3, 4]. В работе Б.Б.Кадомцева [5] показано, что в разряде такого типа может возникать конвективная неустойчивость, которая приводит к возникновению бессиловой конфигурации магнитного поля, обычно наблюдаемой на опыте. Конвективная неустойчивость может приводить к тому, что в плазме возникают области с различной плотностью, находящиеся в хаотическом движении друг относительно друга. Такое состояние плазмы можно назвать турбулентным.

Настоящая работа выполнена на тороидальной установке "Альфа" [2]. Наличие турбулентного состояния плазмы в условиях опыта подтверждается рядом фактов. При измерениях с помощью электростатического анализатора заряженных частиц обнаружены колебания потока частиц в анализатор, которые могут отражать колебания плотности плазмы волизи анализатора [6]. Спектральные измерения показали наличие коллективных движений плазмы со скоростями порядка 10^5 см/сек. [7].

Турбулентное состояние плазмы представляет большой интерес как проявление конвективной неустойчивости. С ним могут быть связаны повышенная скорость диффузии частиц в магнитном поле и аномально-низкая проводимость плазмы - явления, часто наблюдаемые в экспериментах. В условиях опытов на установке "Альфа" оба эти явления зарегистрированы [8, 9]. Однако изучению турбулентного состояния плазмы до сих пор уделялось мало внимания. Не разработаны еще методы исследования, позволяющие определять параметры турбулентности (Характерные масштабы и скорости пульсаций, отклонения плотности плазмы от среднего значения), не внося при этом в плазму возмущений.

Можно предположить, что наличие турбулентности должно оказывать влияние на взаимодействие СВЧ - излучения с плазмой. На неоднородностях плотности может происходить рассеяние СВЧ - излучения, а движение этих неоднородностей должно вызвать флюктуации фазы и амплитуды проходящего через плазму и отраженного от ее границы СВЧ - сигнала.

Такие явления действительно наблюдаются. Зарегистрированы флюктуации фазы отраженного сигнала, которые свидетельствуют о хаотическом движении отражающей границы плазмы со скоростями порядка 10^5 см/сек [10]. Флюктуации фазы и амплитуды проходящего сигнала легко наблюдать при помощи интерферометра. В наших условиях наличие этих флюктуаций приводит к тому, что интерферометрические измерения плотности в активный период разряда становятся затруднительными, так как интерферограмма теряет регулярный характер. В то же время в период распада плазмы после окончания разрядного тока такие измерения легко выполняются. На рис. I приведены образцы интерферограмм на длине волны 4 мм, полученных с помощью интерферометра простейшей схемы в активный период разряда и в распадающейся плазме.

СВЧ - измерения плотности в активный период разряда возможны только путем регистрации "отсечки" проходящего сигнала, когда электронная концентрация становится выше критической для используемой длины волны. Однако наличие турбулентности в плазме может оказаться на результатах этих измерений. Могут возникнуть ошибки, связанные с тем, что сильное ослабление сигнала из-за рассеяния в плазме при концентрациях ниже критической может быть принято за "отсечку". Предварительные измерения показали, что определяемая методом "отсечки" плотность плазмы значительно выше, чем плотность, определяемая по виду спектра теплового излучения в СВЧ - диапазоне [8] и из измерений с электростатическим анализатором заряженных частиц [6].

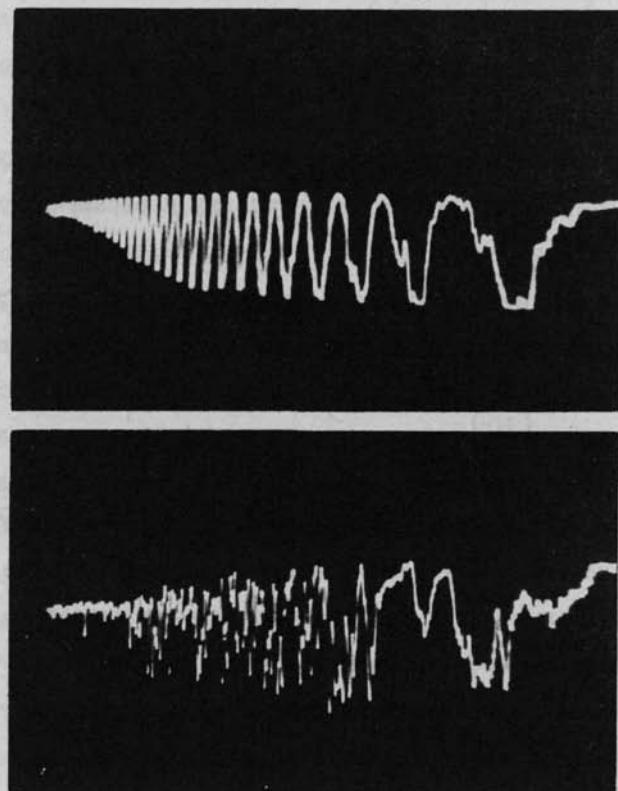


Рис.1. Интерферограммы сигнала, прошедшего через плазму, в диапазоне 4 мм. Вверху: развал плазмы после окончания разрядного тока; внизу: уменьшение концентрации плазмы в активный период разряда.

В связи с этим была предпринята работа по измерению плотности плазмы в моменты времени, соответствующие прекращению и возобновлению прохождения сигналов 4-мм и 8-мм диапазонов сквозь плазму.

Зондирование плазмы производилось сигналом от клистронного генератора, работавшего в режиме импульсной модуляции с частотой следования 50 кГц. Сигнал регистрировался чувствительным приемником прямого усиления.

Для излучения и приема сигнала использовались рупорные антенны, расстояние между которыми равнялось диаметру разрядной камеры установки - 90 см.

Одновременно определялась средняя плотность плазмы по ослаблению пучка атомов водорода, имеющих энергию порядка десяти Кэв. Проходящий через плазму пучок в условиях опыта ослаблялся в основном в результате резонансной перезарядки атомов на ионах водорода. Аппаратура для зондирования плазмы пучком атомов подробно описана в работе [II]. Последовательность импульсов СВЧ - сигнала, прошедшего сквозь плазму и сигнал, пропорциональный интенсивности атомарного пучка, регистрировались совместно двухлучевым осциллографом. Одновременно осциллографировался также ток разряда. Резкой "отсечки" СВЧ - сигнала в условиях опыта не наблюдалось, поэтому за прекращение прохождения сигнала мы принимали уменьшение его мощности на 10 дБ, когда уровень сигнала сравнивался с уровнем шумов приемника. Для этого момента по величине ослабления атомарного пучка определялась плотность плазмы.

В тех режимах работы установки "Альфа", когда наблюдается регулярный распад плазмы после окончания разрядного тока, мы произвели сравнение зависимостей плотности плазмы от времени, измеряемых по ослаблению атомарного пучка и при помощи СВЧ - интерферометра 4 - мм. диапазона. Оба метода дали весьма близкие результаты. На рис. 2 приведены графики распада плазмы, одновременно полученные обеими способами. Таким образом, в период распада плазмы величины электронной концентрации и концентрации ионов водорода близки. Мы предполагаем, что они близки также и в активный период разряда, когда плазма находится в турбулентном состоянии и интерферометрические измерения невозможны. Ранее было показано [8], что плотность плазмы возрастает в течение 300-500 мксек. с момента начала разрядного тока за счет ионизации водорода в камере. Затем, достигнув максимального значения, плотность плазмы начинает убывать из-за ухода заряженных частиц на стенки разрядной камеры. Поэтому обычно наблюдается прекращение прохождения СВЧ - сигнала спустя 150-300 мксек. с момента начала разряда и возобновление прохождения во второй четверти периода разрядного тока.

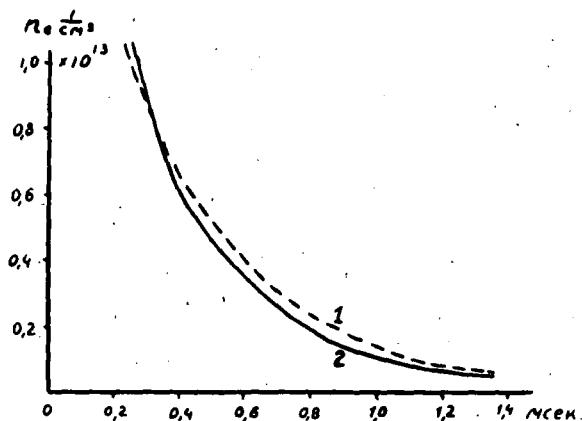


Рис.2. Временная зависимость средней плотности распадающейся плазмы: 1 – по измерениям ослабления пучка атомов водорода; 2 – по интерферометрическим измерениям в диапазоне 4 мм.

Прекращение прохождения в начале разряда происходит тогда, когда плазма имеет низкую электронную температуру. Ослабление сигнала здесь может быть следствием большой частоты электронных столкновений. Для нас представляет больший интерес момент возобновления прохождения. В это время электронная температура плазмы имеет величину 20–60 эв, а степень ионизации плазмы высока [8]. Следовательно, поглощение сигнала за счет обычного механизма электронных столкновений должно быть малым. В этих условиях прохождение сигнала должно возобновиться в момент, когда плотность плазмы станет равной критической для частоты сигнала. Однако было обнаружено, что сильное ослабление сигнала наблюдается при значительно меньших плотностях плазмы.

Для сигнала 8-мм диапазона критическая плотность равна $1,7 \cdot 10^{13} \text{ I/cm}^3$. Однако ослабление сигнала на 10 дБ наблюдается уже при средней плотности $0,8 \cdot 10^{13} \text{ I/cm}^3$.

Для сигнала 4-мм диапазона критическая плотность равна $7 \cdot 10^{13} \text{ I/cm}^3$. Ослабление сигнала на 10 дБ наблюдается при средней плотности $2,7 \cdot 10^{13} \text{ I/cm}^3$.

Не обнаружено существенной зависимости этих величин плотности от стабилизирующего магнитного поля и запаса энергии в конденсаторной батарее установки.

Нужно отметить, что ослабление атомарного пучка определяется средняя плотность плазмы на пути пучка, тогда как "отсечка" СВЧ - сигнала характеризует максимальную плотность. Однако в условиях разряда с десициловой конфигурацией поля не может быть больших градиентов плотности в разрядной камере [5]. Экспериментально этот вывод подтверждается данными измерений с электростатическим анализатором заряженных частиц. На основании этих данных можно считать, что максимальная плотность плазмы может превосходить среднюю не более чем в 1,5 раза.

Таким образом, обнаружено сильное ослабление СВЧ - сигнала при прохождении через сравнительно горячую турбулентную плазму. Это явление наблюдается при плотностях плазмы, значительно меньших чем критическая для используемой длины волны.

Ослабление проходящего сквозь плазму СВЧ - сигнала в условиях когда электронная концентрация ниже критической, может быть следствием или поглощения, или рассеяния в плазме.

Расчеты показывают, что поглощение из-за электрон-ионных и электрон-нейтральных столкновений не может объяснить наблюдаемого ослабления.

Представляет интерес установить, какова роль рассеяния в ослаблении сигнала, а также выяснить, не существует ли в условиях нашего эксперимента каких-либо дополнительных механизмов поглощения СВЧ - излучения в плазме. Для этого нужно измерить коэффициент поглощения излучения в плазме или, что тоже самое, определить эффективную частоту электронных столкновений. Для определения эффективной частоты столкновений мы воспользовались видоизменением метода объемного резонатора.

Разрядная камера установки, представляющая собой замкнутый объем с металлическими стенками, может рассматриваться как резо-

натор с размерами, большими по сравнению с длиной волны. При возбуждении такого резонатора в нем возникают колебания многих типов, при чем из-за связи между различными типами колебаний можно считать, что объем камеры равномерно заполняется излучением. Внутри камеры устанавливается плотность излучения, определяемая мощностью возбуждающего сигнала и добротностью камеры.

В наших опытах возбуждение камеры производилось иллюстронным генератором 4-мм диапазона через рупорную антенну, введенную внутрь камеры. Вне прямой видимости излучающей антенны находилась аналогичная приемная антenna, на которую попадало только рассеянное в результате многократных отражений излучение. Мощность принимаемого сигнала в этом случае пропорциональна плотности излучения в камере. По величине отношения мощностей излучаемого и принимаемого сигналов можно определить добротность камеры. Нетрудно показать, что она равна:

$$Q = 2 \frac{P'}{P} \cdot \frac{\omega^3 V}{\pi c^3}; \quad (I)$$

Здесь : P' и P - принимаемая и излучаемая мощности
 ω - частота сигнала
 V - объем камеры

Для регистрации рассеянного излучения применялся супергетеродинный приемник 4-мм, диапазона, имевший логарифмическую характеристику чувствительности и динамический диапазон более 30 дБ. Тот же приемник применялся и для регистрации непосредственно прошедшего через плазму сигнала. При этом использовался излучающий рупор, находящийся напротив приемной антенны. Хотя при этих изменениях рассеянное внутри камеры излучение также попадало в приемную антенну, уровень его был значительно ниже уровня сигнала, непосредственно прошедшего сквозь плазму, и его мощностью можно было пренебречь. Блок-схема аппаратуры, применявшейся для определения добротности камеры и ослабления сигнала в плазме, представлена на рис. 3.

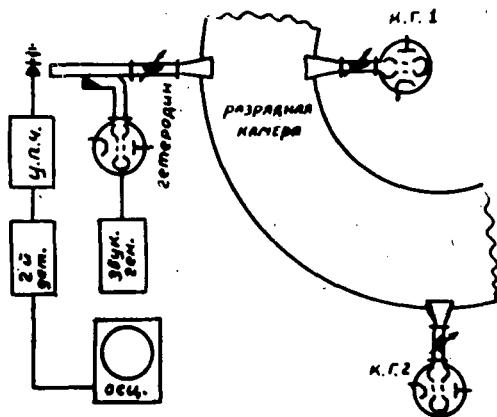


Рис.3. Блок-схема аппаратуры для измерений добротности разрядной камеры с плазмой и ослабления проходящего через плазму сигнала.

Добротность камеры зависит от потерь в ее стенках и от поглощения в плазме, находящейся внутри нее. Рассеяние в плазме не оказывает влияния на добротность, так как не приводит к поглощению энергии СВЧ - излучения. Определив изменение добротности при появлении плазмы внутри камеры, можно оценить СВЧ - проводимость плазмы и эффективную частоту электронных столкновений: [12]

$$\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q'} \cong \frac{4\pi}{\omega} \sigma = \frac{4\pi n_e e^2}{m \omega^3} \cdot v_{eff}; \quad (2)$$

Q - добротность камеры с плазмой

Q' - добротность пустой камеры

σ - проводимость плазмы (минимальная часть диэлектрической постоянной)

ω - частота сигнала

v_{eff} - эффективная частота столкновений.

Была измерена добротность пустой камеры, оказавшаяся равной $2 \cdot 10^5$. Затем осциллографировалось уменьшение мощности рассеянного и проходящего через плазму сигналов во время разряда. Одновременно определялась средняя плотность плазмы по ослаблению атомарного пучка. На рис. 4 представлены результаты измерения уменьшения

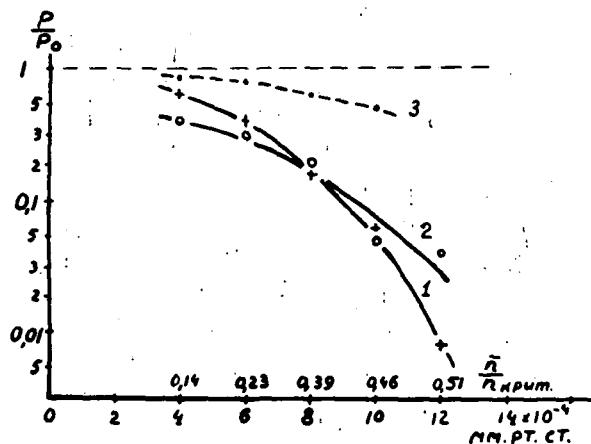


Рис. 4. Зависимость ослабления зондирующего сигнала от начального давления водорода:
1 – рассеянный сигнал; 2 – сигнал, непосредственно прошедший через плазму; 3 – ослабление сигнала, непосредственно прошедшего через плазму, рассчитанное по формуле (6).

мощности рассеянного и проходящего сигналов по сравнению с уровнем их в отсутствие плазмы в зависимости от исходного давления водорода в разрядной камере. Данные относятся к моменту максимума разрядного тока.

Отметим, что величины уменьшения мощности рассеянного и проходящего сигналов одинаки, хотя первый проходит в плазме путь в несколько десятков метров, а второй – только 90 см. Этот факт характеризует вклад рассеяния на неоднородностях плотности в ослабление проходящего сигнала.

Из результатов измерения были определены величины доорбитости камеры во время разряда и отсюда вычислены эффективные частоты столкновений в плазме.

Величины $V_{\text{эфф}}$, измеренные методом резонатора, представлены на рис. 5 зависимости от давления водорода в разрядной камере.

Частота столкновений в электронно-протонной плазме в предложении кулоновского механизма столкновений определяется выражением: [3].

$$V_{ei} = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{T_e^{3/2}} n_e \quad ; \quad (3)$$

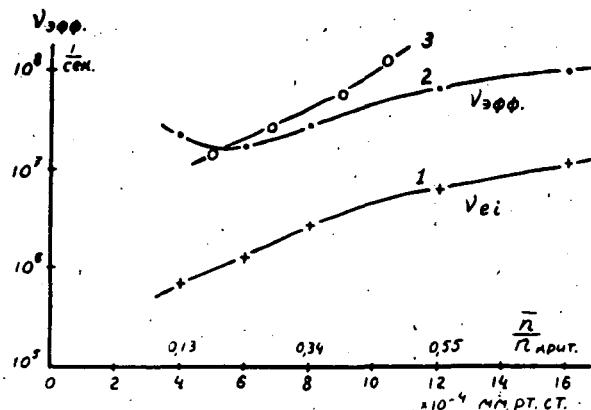


Рис. 5. Зависимость частоты столкновений электронов от начального давления водорода:
1 – частота столкновений, рассчитанная по формуле (3); 2 – частота столкновений, рассчитанная по данным измерений проводимости плазмы; 3 – частота столкновений, рассчитанная по данным измерений резонаторным методом.

где n_i – ионная концентрация ($\text{I}/\text{см}^3$)

T_e – электронная температура (эв.)

Значения ν_{ei} , вычисленные по формуле (3) исходя из измеренных по величине ослабления атомарного пучка величин n_i и определенных по мощности СВЧ – излучения плазмы величин T_e приведены также на рис. 5.

Ранее было установлено, что низкочастотная проводимость плазмы в установке "Альфа" мала по сравнению с теоретическим значением проводимости электронно-протонной плазмы при соответствующей температуре [2]. Проводимость плазмы связана с эффективной частотой столкновений соотношением: [3].

$$G = \frac{e^2}{m_e} \cdot \frac{n_e}{\nu_{эфф}} \quad (4)$$

где G – проводимость,

e, m_e – заряд и масса электрона,

n_e – электронная концентрация.

Проводимость можно определить по величине тока разряда и напряжения на обходе камеры в момент максимума тока. Полагая

$n_e = n_i$ из выражения (4) были вычислены значения ν эф., которые также приведены на рис. 5

Сравнение данных, приведенных на этом рисунке, показывает, что значения ν эф. в реальной плазме, определенные с помощью резонаторного метода и по проводимости, близки между собой и на порядок превышают теоретическую величину ν_{el} , вычисляемую по формуле (3) для электронно-протонной плазмы. Однако оценки показывают, что измеренные значения ν эф. не могут объяснить наблюдавшееся ослабление проходящего сигнала.

Ослабление сигнала в однородной плазме на пути между излучающей и приемной антеннами вызвано поглощением энергии СВЧ - колебаний при электронных столкновениях. Его можно вычислить по известной величине ν эф.

Следует также учитывать уменьшение мощности принимаемого сигнала из-за изменения коэффициента усиления антенн при работе в среде с $\epsilon \neq 1$. Эта поправка равна :

$$\frac{P}{P_0} \sim \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^2 = 1 - \frac{n}{n_{kp}} \quad ; \quad (5)$$

где P_0 - мощность сигнала в приемной антенне при работе в вакууме

P - мощность сигнала в приемной антенне при работе в среде с $\epsilon \neq 1$

λ_0 - длина волны в вакууме

λ - длина волны в среде с $\epsilon \neq 1$

n - плотность плазмы

n_{kp} - критическая плотность плазмы для используемой частоты.

Таким образом, уменьшение мощности проходящего сигнала по сравнению с его уровнем в отсутствие плазмы может быть выражено как :

$$\frac{P}{P_0} = \left(1 - \frac{n}{n_{np}}\right) e^{-\alpha \ell}; \quad (6)$$

где α - коэффициент поглощения,
 ℓ - расстояние между антеннами.

Рассчитанное по (6) ослабление проходящего сигнала в зависимости от давления водорода в камере нанесено пунктиром на графике рис. 4. Видно, что фактическая величина уменьшения мощности сигнала гораздо больше расчетной.

Если сигнал проходит через турбулентную плазму, в которой имеется рассеяние, то уменьшение мощности его можно приближенно описать выражением :

$$\frac{P}{P_0} = \left(1 - \frac{n}{n_{np}}\right) e^{-(\alpha + \gamma) \ell}; \quad (7)$$

где α - коэффициент поглощения,
 γ - коэффициент рассеяния

На рис. 6 приведены зависимости коэффициентов поглощения и рассеяния от средней концентрации плазмы. Коэффициент поглощения вычислен по измеренным резонаторным методом эффективным частотам столкновений, а коэффициент рассеяния определен из выражения (7) по измеренным значениям ослаблений проходящего сигнала.

Из рисунка видно, что в условиях опыта $\gamma >> \alpha$.

Можно надеяться, что по величине коэффициента рассеяния удастся определить некоторые параметры, характеризующие турбулентность плазмы.

При распространении СВЧ - излучения в турбулентной плазме приходящий в приемную антенну сигнал оказывается модулированным по фазе и амплитуде. Это равносильно расширению спектра регист-

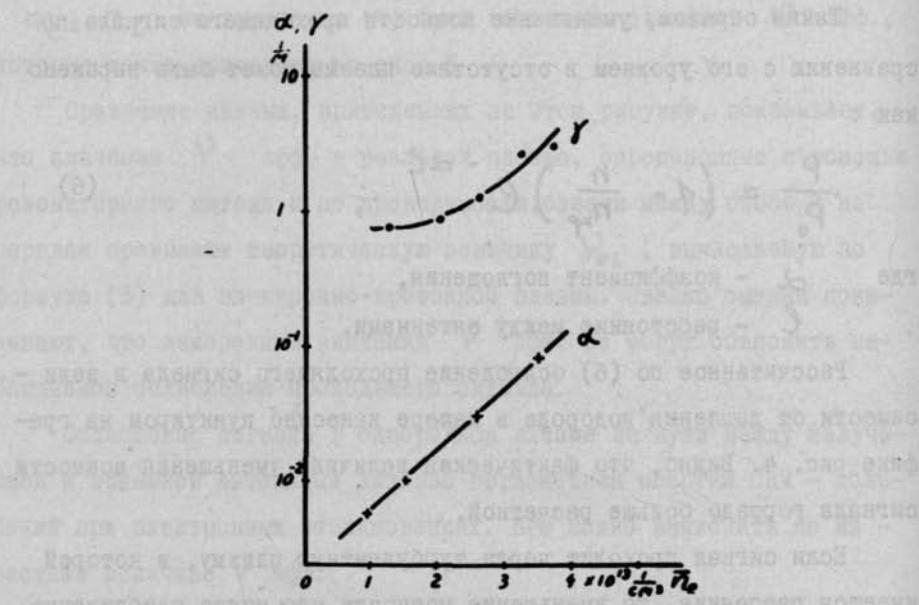


Рис. 6. Зависимость коэффициентов рассеяния и поглощения (γ, α) от концентрации электронов в плазме.

рируемого сигнала. Если плазма облучается монохроматическим сигналом, то рассеянное в ней излучение должно иметь спектр конечной ширины, причем ширина спектра, очевидно, связана с характеристическими скоростями движения неоднородностей в плазме.

Наша аппаратура позволила нам наблюдать это явление. Для этого гетеродин приемника был модулирован по частоте в небольших пределах так, чтобы рабочая частота приемника проходила некоторую область в окрестностях рабочей частоты сигнального кристалла. Таким образом, приемник работал в режиме анализатора спектра.

Принималось рассеянное в камере излучение. В отсутствие плазмы сигнал регистрировался в виде острого пика в момент совпадения рабочих частот приемника и источника сигнала. Ширина этого пика определялась шириной полосы пропускания УПЧ приемника.

Если анализ спектра производился в момент разряда, отмечалось значительное уширение спектра сигнала, связанное с рассеянием на движущихся неоднородностях в плазме.

На рис. 7 приведены осциллограммы спектра рассеянного в камере сигнала в отсутствие плазмы и во время разряда. Очевидно значительное уширение спектра во втором случае.

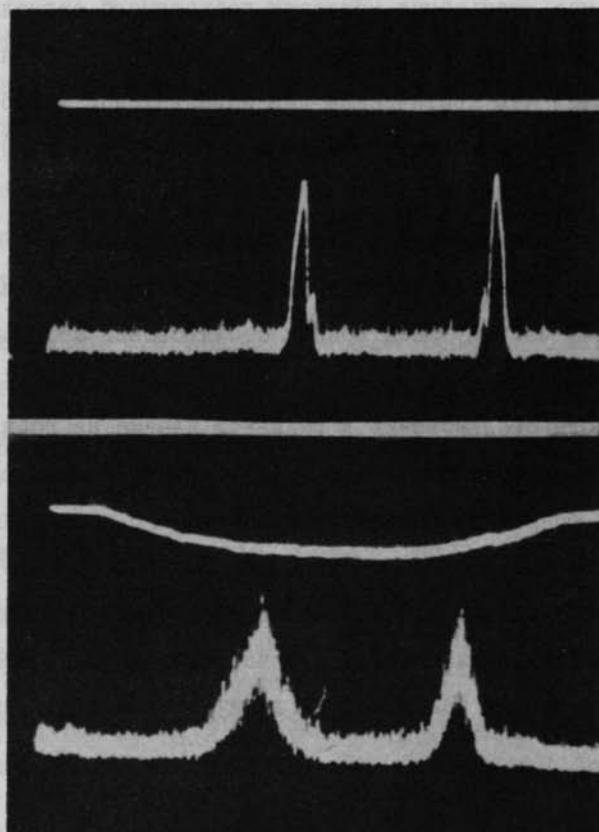


Рис.7. Осциллограммы спектра зондирующего сигнала. Вверху: спектр сигнала в случае отсутствия плазмы; внизу: спектр сигнала, рассеянного в плазме.

Так как приемник имеет логарифмическую характеристику чувствительности, то треугольная форма пика на осциллограмме свидетельствует об экспоненциальной зависимости мощности рассеянного сигнала от сдвига частоты. Ширина пика на уровне 10^{-2} от мощности в максимуме приблизительно равна 10 мГц.

Очевидно, явление уширения спектра СВЧ - сигнала в турбулентной плазме также несет информацию о параметрах турбулентности и может быть использовано при ее исследовании.

Таким образом, при исследовании взаимодействия СВЧ - излучения с турбулентной плазмой на установке "Альфа" получены следующие результаты :

1. Сильное уменьшение мощности проходящего сигнала, которое может быть принято за его "отсечку", наблюдается при плотностях плазмы, меньших чем критическая для используемой частоты.

Это явление обусловлено сильным рассеянием в турбулентной плазме.

2. Величины коэффициентов поглощения и рассеяния в плазме можно оценить, измерив ослабление проходящего сквозь плазму сигнала и определив частоту электронных столкновений методом объемного резонатора.

3. частота столкновений в реальной плазме на порядок выше, чем в электрон-протонной плазме соответствующей электронной температуры. Этот результат находится в согласии с наблюдаемым фактом аномально - низкой проводимости плазмы для постоянного тока.

4. В турбулентной плазме наблюдается рассеяние СВЧ - излучения, сопровождаемое изменением его частоты. Видимо, это явление вызвано рассеянием излучения на движущихся неоднородностях плотности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Butt, E.P., Parrythers, R., Mitchell, J.T.D., Pease, R.S., Thonemann, P.S., Bird, M.A., Bleas, J., Hartill, E.R.

2-я международная конференция по мирному использованию атомной энергии, Женева, 1958, Доклад Р/1519

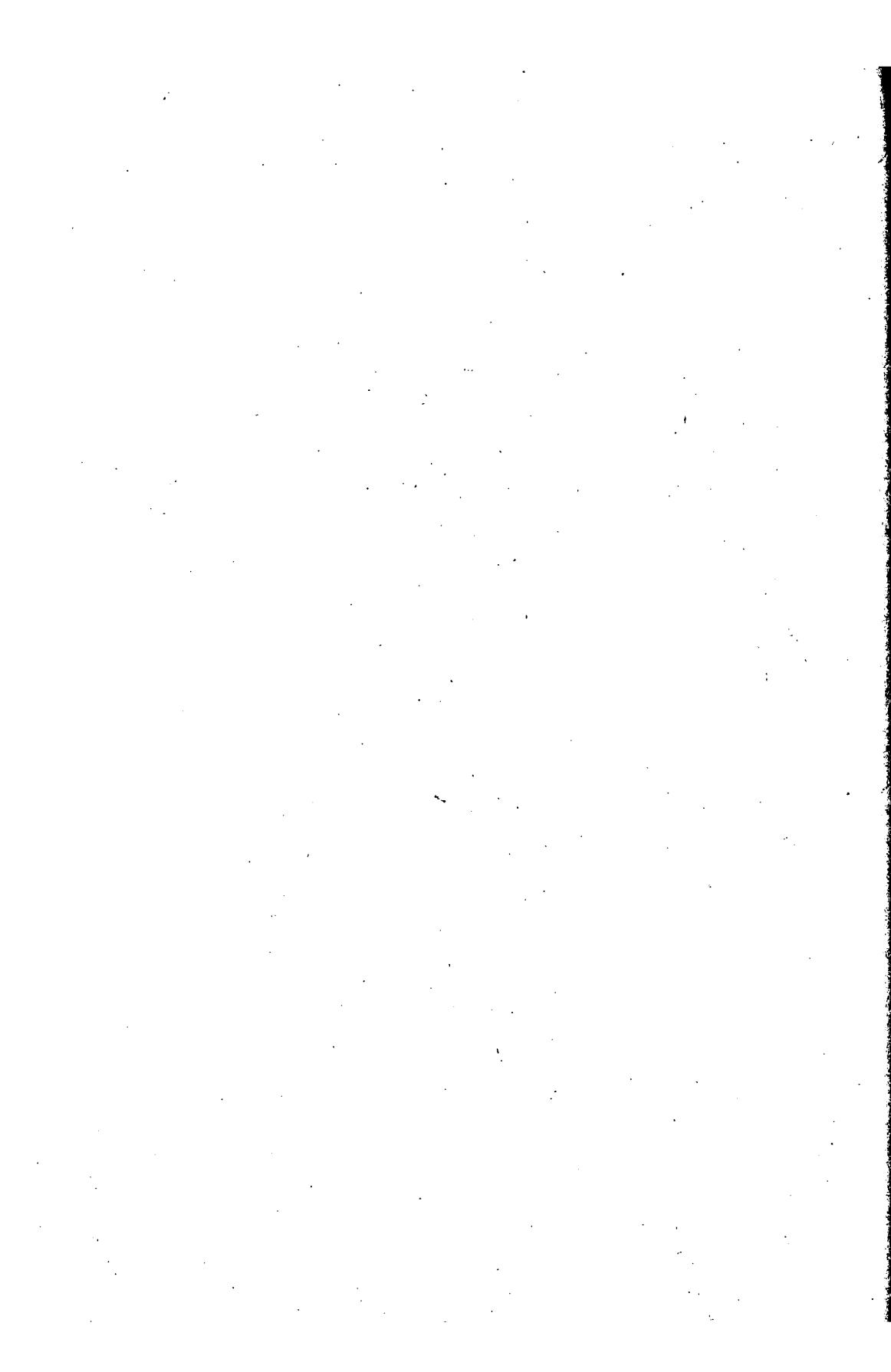
- [2] Афросимов В.В., Глухих В.А., Голант В.Е., Зайдель А.Н., Комар Е.Г., Константинов Б.П., Малышев Г.М., Малышев И.Ф., Моносзон М.А., ЖТФ, 30, (1960), 1381
- [3] Ардимович Л.А., Управляемые термоядерные реакции, Госатомиздат, М, 1961
- [4] *Rusbridge, M & Lees, P} Saunders RAH*
Конференция по исследованиям в области физики плазмы и управляемого ядерного синтеза, Зальцбург, 1961, Доклад № CN-10/57.
- [5] Кадомцев Б.Б., Конференция по исследованиям в области физики плазмы и управляемого ядерного синтеза, Зальцбург, 1961, Доклад № CN-10/227
- [6] Галактионов Б.В., Долматова К.А. Сборник "Диагностика плазмы" под ред. акад. В.П. Константина, М., 1963 г.
- [7] БЕРЕЗИН А.Б., Зайдель А.Н., Малышев Г.М., ЖТФ, 33, (1963), 291
- [8] Ларионов М.М., ЖТФ, 34, (1964), 1843
- [9] Галактионов Б.В., Долматова К.А., Ларионов М.М. ЖТФ, 34, (1964), 1533
- [10] Аношкин В.А., Голант В.Е., Константинов Б.П., Полоскин Б.П., Шероинин О.Н., ЖТФ, 30, (1960), 1447
- [11] Афросимов В.В., Иванов Б.А., Кисляков А.И. Петров М.П. ЖТФ, (в печати)
- [12] Голант В.Е., ЖТФ, 30, (1960), 1265

DISCUSSION

T. CONSOLI: How did you measure the density?

V. E. GOLANT: The mean plasma density was found from the attenuation of the fast neutron beam as it moved across the chamber. In addition, the radial density distribution was determined by the retarding potential method. The maximum value obtained was compared with the critical concentration corresponding to the microwave signal cut-off.

PLASMA INSTABILITIES AND INTERACTIONS
(Session VI)



UNIFIED APPROACH TO RESISTIVE AND MICRO-INSTABILITIES

T.E. STRINGER

UNITED KINGDOM ATOMIC ENERGY AUTHORITY.

THE CULHAM LABORATORY,

ABINGDON, BERKS., ENGLAND

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

UNIFIED APPROACH TO RESISTIVE AND MICRO-INSTABILITIES. The model used is a slab of plasma supported against a gravitational field by a sheared magnetic field. Fluid-type equations are used to describe the mean motion of ions and electrons perpendicular to the magnetic field lines. The motion along field lines is obtained by taking moments of the Vlasov equation, with a BGK collision term. This gives a generalized Ohms Law in which collisions and resonant particle effects are included. In the collisional limit the equations give the resistive-g mode and the pressure-driven drift mode, and in the collision-free limit the drift micro-instability and electron inertial instabilities. The quasi-mode forms of some of these instabilities are considered, and the effect of finite Larmor radius corrections on the resistive-g quasi-mode is discussed. Some criteria are given for estimating the relative importance of the different instability mechanisms.

APPLICATION D'UNE METHODE UNIFIEE A L'ETUDE DES INSTABILITES RESISTIVES ET DES MICRO-INSTABILITES. Dans ce mémoire, l'auteur emploie comme modèle celui d'une plaque de plasma dans lequel le champ de gravitation est neutralisé par un champ magnétique à des lignes de champ croisées. Il utilise les équations de la mécanique des fluides pour décrire le mouvement moyen des ions et des électrons perpendiculairement aux lignes de champ magnétique. Il détermine le mouvement le long des lignes de champ en prenant les moments de l'équation de Vlasov ayant un terme de collision qui est une modification de celui de Bhatnagar, Gross et Krook. Cette méthode fournit une loi d'Ohm généralisée qui inclut les effets dus aux collisions et aux particules résonnantes. Lorsqu'on tient compte des collisions, les équations donnent le mode résistif du type g et le mode de dérive dû à la pression et, lorsqu'on n'en tient pas compte, la microinstabilité de dérive et les instabilités d'inertie des électrons. Les auteurs examinent les formes quasi modales de certaines de ces instabilités et ils décrivent l'effet de correction du rayon de Larmor fini sur le quasi-mode résistif du type g. Il en déduit des critères permettant d'évaluer l'importance relative des différents mécanismes d'instabilité.

УНИФИЦИРОВАННЫЙ ПОДХОД К РЕЗИСТИВНЫМ НЕУСТОЙЧИВОСТЯМ И МИКРО-НЕУСТОЙЧИВОСТЯМ. Используемая модель представляет собой слой плазмы, удерживающейся в гравитационном поле магнитным полем с широм. Уравнения гидродинамического типа применяются для описания среднего движения ионов и электронов перпендикулярно линиям магнитного поля. Движение вдоль линий поля описывается путем взятия нескольких моментов от уравнения Власова с модельным интегралом столкновений, являющимся модификацией интеграла столкновений Батагара, Гросса и Крука. Это приводит к обобщенному закону Ома, в который включены столкновения и эффекты резонансных частиц. В коллизионном пределе уравнения дают резистивную моду g и моду дрейфа от давления, а в свободном от коллизий пределе — микронеустойчивость дрейфа и электронные инертные неустойчивости. Рассматриваются квази-модовые формы некоторых из этих неустойчивостей и влияние коррекций окончательного радиуса Лармора на резистивную квази-моду g. Выводятся критерии для оценки относительной важности различных механизмов.

CRITERIO UNIFICADO PARA EL ESTUDIO DE LAS INESTABILIDADES RESISTIVAS Y DE LAS MICRO-INESTABILIDADES. El autor emplea como modelo una placa de plasma en la cual el campo gravitatorio queda compensado por un campo magnético de líneas cruzadas. Para describir el movimiento medio de los iones y electrones perpendicularmente a las líneas de fuerza del campo magnético emplea las ecuaciones de

la mecánica de fluidos. El movimiento a lo largo de las líneas de fuerza se determina tomando momentos en la ecuación de Vlasov, con un término de choque que constituye una modificación del de Bhatnagar, Gross y Krook. Así se obtiene una ley de Ohm generalizada en la que se incluyen los efectos debidos a los choques y a las partículas resonantes.

En el caso límite en el que sólo se consideran los choques, las ecuaciones expresan el modo resistivo g y el modo de deriva determinado por la presión, y en el caso límite en que se prescinde de los choques, la microinestabilidad de deriva y las inestabilidades debidas a la inercia electrónica. Se examinan las formas cuasimodales de algunas de estas inestabilidades, así como el efecto de las correcciones del radio finito de Larmor en el cuasimodo resistivo g . Se deducen criterios para evaluar la importancia relativa de los diferentes mecanismos de inestabilidad.

1. Introduction

Micro-instabilities in a collision-free inhomogeneous plasma, and resistive instabilities in a collisional plasma, have each been the subject of numerous recent papers. In many respects the model used in these two problems is similar. An inhomogeneous plasma is confined in one direction by a magnetic field which may or may not possess shear. The important difference between the two approaches is that in the first case the collision free kinetic equation is used, and the instability is due to resonant particles or electron inertia, whereas resistive fluid equations are used in the second type of problem and the instability depends on collisional effects. In the following sections a more general treatment is described in which v/ω , the ratio of the electron-ion collision frequency to the mode frequency, is arbitrary.

For simplicity the plasma slab model with gravitational field is used, but the behaviour of the corresponding modes in a cylindrical low- β plasma can be estimated using the equivalence quoted in Section 8. Under the restrictions discussed in Section 2 ($\omega \ll \Omega_i$, $k_{\perp}^2 a_i^2 \ll 1$) the motion of both ions and electrons perpendicular to the magnetic field can be described by fluid type equations, which are not significantly affected by collisions provided these are not too frequent ($v_{ii} k_{\perp}^2 a_i^2 \ll \omega$)^[14]. The solution of these equations is outlined in Section 3. The current flow along field lines, which is predominantly due to the electrons, is derived in Section 4 using the drift approximation to the Vlasov equation, including a modified form of the Bhatnagar, Gross and Krook (BGK) collision term^{[1], [15]}. The relationship between current flow and electric field along the field lines defines a general admittance, Y , which in the appropriate limits contains resonant particle contributions, collisional resistance or inertial inductance. Thus the problem is reduced to the solution of two coupled second order differential equations, given in Section 5, each containing the general admittance.

Solution of these coupled equations is eased by the assumption of weak gravity, so that the shear is well above the critical value to provide stability against the MHD interchange mode, i.e. $D = ag/c_A^2 s^2 \ll 1$. In this case the coupling between the two equations is sufficiently weak that one set of modes is electrostatic to lowest order in D , and is described to this order by a second order differential equation [4], [5]. Only the electrostatic type solutions will be considered here.

The problem which has previously received most attention is that of normal modes in a sheared magnetic field. Here the disturbance is of the form $\Psi(x) \exp[i(k_Y Y + k_Z Z - \omega t)]$, where x is the direction of the inhomogeneity, and k_Y and k_Z are constant. If the field is sheared, then $k_{\parallel} = (k_B B)/B$ varies with x . As a result the instability may depend on the existence of solutions which are localised in x . The localisation requirements are different for the different modes.

In the collision-free micro-instability, the instability mechanism operates only where $c_e > \omega/k_{\parallel} > c_i$ (where $c_e = \sqrt{\kappa} T_e/m$, $c_i = \sqrt{\kappa} T_i/M$ are the electron and ion sound speeds), elsewhere there is ion or electron Landau damping. The dispersive properties of the medium must therefore be such that the mode can localise itself within a region where this inequality is satisfied. This imposes certain limits on the plasma parameters and shear [9], [13], discussed in Section 7.4.

The resistive-g normal mode can always choose an eigenfrequency [4], [5], [12] so that it becomes evanescent beyond a certain value of k_{\parallel} . Shear does not by itself lead to localisation of the pressure-driven resistive drift mode, though if the shear is weak it can localise itself near a point of inflection in the density profile [10]. The instability mechanism is strongest for a small but finite value of k_{\parallel} . If the mode is not localised, the growth rate may be expected to be reduced to some average value over the range of k_{\parallel} , or the mode may spread into regions where the equations used are no longer valid ($c_e^2 k_{\parallel}^2 > \omega v$ in equation (16)).

Mikhailovskii and Pogutse [14], [15] have recently demonstrated the transition of the collision-free drift instability into the resistive drift mode as the collision frequency increases in a shear free plasma without gravity, using the BGK collision model. Because the normal modes in a sheared field with gravity are influenced by the different localisation requirements, it is more difficult to see their relationship. The relationship may be seen more readily between the corresponding quasi-modes in a plasma bounded by conducting end plates perpendicular to B , discussed in

Section 6.1. The influence of finite Larmor radius (FLR) effects on the localised resistive-g quasi-mode, first introduced by Roberts and Taylor [16] is discussed in 6.2.

2. The Model

The stability of a plasma slab confined in the X direction by a sheared magnetic field will be considered. Relative to fixed cartesian coordinates (X,Y,Z), the density and temperature vary in the X direction only, the confining magnetic field $\underline{B} = (0, sXB_0, B_0)$ is everywhere perpendicular to X, and the shear parameter, s , will be assumed constant. A gravitational force, ρg , acting in the X direction simulates the effect of field line curvature in a confined cylindrical plasma. (x, y, z) are orthogonal curvilinear coordinates. The x axis coincides with the X axis, while the z axis rotates with x so that it is parallel to the local magnetic field.

It will be assumed that the gravitational force is weak, $\rho g \ll \nabla p$, (analogous to a cylindrical plasma in which the radius of curvature, R_c , is much larger than the plasma radius, r_0), the shear is weak ($s X \ll 1$ over the region of interest), and $\beta = 8\pi\rho/B_0^2 \ll 1$. This permits the variation of B_0 with X to be neglected. The effect of an equilibrium current along field lines, and variation of resistivity with X [8],[18], will not be included in the analysis. The treatment is restricted to frequencies much less than the ion cyclotron frequency (Ω_i), and wavelengths larger than the ion gyration radius (a_i). Thus only terms of first order in ω/Ω_i and $k_\perp^2 a_i^2$ are retained.

In a low- β plasma perturbations which do not compress the magnetic field lines ($B_{\parallel}, B \approx 0$) are the most dangerous, since these increase the magnetic energy least. It can be shown that $B_{1\parallel} = 0$ [$\omega^2/c_A^2 k^2$] $B_{1\perp} + O(\beta) B_{1\perp}$, where subscripts \parallel and \perp denote the components parallel and perpendicular to the local magnetic field, and c_A is the Alfvén velocity. Where necessary, subscripts 0 and 1 distinguish the equilibrium value and the perturbation. The assumption $(B_{\parallel}, B) = 0$ eliminates the compressional (fast) Alfvén wave, for which $\omega \approx c_A k \gg c_A k_\parallel$, and thus reduces the order of the equations. It follows that $(\text{curl } E_1)_\parallel = 0$, which means that E_\perp can be expressed as the gradient of a scalar potential ($E_\perp = -\nabla \Phi$). The comparison with resistive fluid theory is facilitated if the electric field is expressed in terms of the scalar potentials Φ and A defined by

$$\underline{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right) \underline{i}_z \quad (1)$$

A is not the usual vector potential, since it has a component along

the magnetic field only. The ion motion along field lines will be neglected. As may be verified from equation (14), this motion contributes terms of order $c_s^2 k_{\parallel}^2/\omega^2$ to the ion continuity equation, where c_s = sound speed = $[\kappa(T_{io} + T_{eo})/M]^{1/2}$. This is small for all the modes of interest.

In Sections 3-5 the disturbance will be assumed to have the normal mode form i.e. relative to the fixed axes its equation is $\Phi = \Phi(x) \exp[i(k_y Y + k_z Z - \omega t)]$ where k_y and k_z are constant. When transformed to the rotating coordinates, the equation is

$$\Phi = \Phi(x) e^{i[k_y y + k_{\parallel} z - \omega t]} \quad (2)$$

where $k_{\parallel} = [\underline{k} \cdot \underline{B}(x)]/B$ is now a function of x . Strictly speaking, k_y is also a function of x , but since the unstable modes propagate almost perpendicular to \underline{B} , and the shear is assumed weak, the variation of k_y is small.

3. Motion Perpendicular to \underline{B}

The mean motion of the ions perpendicular to the magnetic field may be described by fluid type equations

$$nM \frac{dV_i}{dt} = ne [E + V_i \times \underline{B}] + n_e Mg \underline{i}_x - \nabla p_i \\ + n_e M \sigma \left[(\nabla_{\perp}^2 - \tau \frac{\partial}{\partial x}) (V_i \times \underline{i}_z) - \tau \frac{\partial V_i}{\partial y} \right] \quad (3)$$

where $\sigma = \frac{\kappa T_{io}}{2M \Omega_i}$ = coefficient of magnetic viscosity [16], $\tau = -\frac{1}{p_{io}}$ $\frac{dp_{io}}{dx}$. The ion collision frequency is assumed sufficiently small that collisional ion viscosity can be neglected. In the continuity equation the flow is separated into the part perpendicular to field lines and the part along field lines

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \left(\frac{dn_o}{dx} V_{ix} + n_o \nabla_{\perp} \cdot \underline{v}_{i\perp} \right) + i n_o k_{\parallel} V_{i\parallel} = 0 \quad (4)$$

The parallel ion flow has been assumed negligible. The parallel component of the curl of equation (3) gives an expression for $n'_o V_{ix} + n'_o \nabla_{\perp} \cdot \underline{v}_{i\parallel}$, where a dash denotes differentiation with respect to x . This expression contains a term proportional to $(\omega/\Omega_i) [n_o (\nabla \times \underline{v}_i)_{\parallel} + n'_o V_{iy}]$ which can be eliminated to first order in ω/Ω_i by using the divergence of equation (3). Further details of this analysis is given in reference [18]. The perturbed ion density is thus found to be

$$i(\omega + \frac{k_y g}{\Omega_i}) (\frac{n_{i1}}{n_o}) = \left[1 + \frac{\sigma}{\Omega_i} \frac{\tau}{a} (\nabla_{\perp}^2 - \tau \frac{\partial}{\partial x}) \right] (\frac{E_y}{B_o} \frac{n'_o}{n_o})$$

$$\frac{-i}{\Omega_i B_o} (\omega - k_y v_{io} - \sigma \tau k_y) \left[\nabla_{\perp} E + \frac{n'_o}{n_o} E_x \right] \quad (5)$$

$$+ 0 (\omega/\Omega_i)^2 + 0 (k_{\perp}^2 a_i^2)^2$$

where $v_{io} = \frac{kT_{io}}{eB_o} \left(\frac{n'_o}{n_o} + \frac{T_{eo}}{T_{io}} \right) - \frac{g}{\Omega_i}$ = Equilibrium ion flow velocity.

It has been assumed in deriving equation (5) that the wavelength is much less than the plasma dimensions, $(\partial E/\partial x) \gg (n'_o/n_o) E$.

The perturbed electron density can be derived similarly $n'_o V_{ex} + \nabla_{\perp} V_{el}$, which occurs in the electron continuity equation, analogous to equation (4), can readily be obtained from the z component of the curl of the fluid equation describing the mean electron motion perpendicular to field lines, analogous to equation (3). Finite electron Larmor radius effects and terms of order ω/Ω_e (Ω_e = electron cyclotron frequency) can be neglected. The electron equation corresponding to equation (5) is

$$i \omega n_{el} = n'_o \left(\frac{E_y}{B_o} \right) + i k_{\parallel} n_o V_{e\parallel}. \quad (6)$$

The electron flow along the field lines can be eliminated using the following equation

$$n_o V_{e\parallel} = - \frac{j_{\parallel}}{e} = - \frac{1}{4\pi i \omega e} i_z \cdot [\text{curl} (\text{curl } E)]$$

$$= - \frac{1}{4\pi e c} i_z \cdot [\text{curl} (\text{curl } A)] = \frac{1}{4\pi e c} [\nabla_{\perp}^2 A - s^2 A]$$
(7)

Equating the perturbed ion and electron densities gives

$$i(\omega - k_y v_{io}) \nabla_{\perp}^2 \Phi - \alpha g k_y^2 \Phi = c_A^2 (\omega k_{\parallel}/c) \nabla_{\perp}^2 A \quad (8)$$

4. Kinetic Equation for Current along Field Lines.

To obtain results which are valid in both limits, the kinetic equation with a collision term must be used. The drift approximation to the Vlasov equation, valid when $k_{\perp}^2 a_i^2 \ll 1$ and $\omega \ll \Omega_i$, will be used [19]. Thus the velocity distribution function is expressed in terms of the guiding centre position, x_G , and magnetic moment, $\mu = mu_{\perp}^2/2B$, of the particle i.e. $f = f(u_{\parallel}, \mu, x_G)$ where u_{\parallel} is the

component of particle velocity along the field lines. The Vlasov equation is then replaced by the conservation equation in drift space

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{G}} \cdot (f \frac{dx_G}{dt}) + \frac{\partial}{\partial u_{||}} (f \frac{du_{||}}{dt}) = - \frac{\partial f}{\partial t}_{\text{collisions}}. \quad (9)$$

A slightly modified form of the Bhatnagar, Gross, and Krook [1], collision term is used to describe the effect of electron-ion collisions.

$$\frac{\partial f}{\partial t}_{\text{collisions}} = v \left[f - (n_o + n_1) F_M (u_{||}, \mu, T_o + T_1) \right] \quad (10)$$

where

$$F_M (u_{||}, \mu, T) = \frac{B}{kT} \left[\frac{m}{2\pi kT} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[- \frac{mu^2}{2kT} + \frac{B}{kT} \mu \right]$$

This describes a relaxation process in which particles are absorbed at a rate $v.f$ per unit volume of phase space and re-emitted with a Maxwellian velocity distribution. The appropriate definition of v , the electron-ion collision frequency, will become clear later. Due to the large mass ratio, the electrons are re-emitted with mean parallel velocity equal to the mean ion parallel velocity, which has already been assumed negligibly small. Since the electrons exchange little energy in their collisions with ions, they are re-emitted as a Maxwellian distribution with temperature $T = T_o(x) + T_1(x, t)$. Thus the above collision term conserves number density, momentum, and energy.

Linearising equation (9) and (10), and substituting the usual expressions for the guiding centre velocity [19], gives

$$i(\omega + iv - k_{||} u_{||}) f_1 = - \frac{eE_{||}}{m} \frac{\partial f_o}{\partial u_{||}} + \frac{1}{B_o} (E_y + u_{||} B_{1x}) \frac{\partial f_o}{\partial x} \\ - v \left[\frac{1}{n_o} - \frac{T_1}{T_o} \left(\frac{3}{2} - \frac{mu^2}{2kT} - \frac{\mu B_o}{kT} \right) \right] f_o \quad (11)$$

where $f_o = n_o(x) F_M [u_{||}, \mu, T_o(x)]$. Hence the electron flux along field lines is obtained

$$\begin{aligned}
 n_0 V_{e\parallel} &= \int \int u_{\parallel} f_1 d\mu d u_{\parallel} \\
 &= - \frac{i n_0 e}{\kappa T_{eo} k_{\parallel}^2} (1 + \frac{i v}{\omega}) \left\{ [1 + i\sqrt{\pi}\zeta W(\zeta)] [\omega - k_y V_{en} + k_y V_{eT} (\frac{1}{2} - \zeta^2)] - \frac{k_y V_{eT}}{2} \right\} E_{\parallel} \\
 &= \frac{i v n_0}{k_{\parallel}} [1 + i\sqrt{\pi}\zeta W(\zeta)] \left[\frac{n_1}{n_0} - \frac{E_y}{i\omega B_0} \frac{n'_0}{n_0} \right] \\
 &= \frac{i v n_0}{2k_{\parallel}} \left\{ [1 + i\sqrt{\pi}\zeta W(\zeta)] (2\zeta^2 - 1) + 1 \right\} \left\{ \frac{T_1}{T_0} - \frac{E_y}{i\omega B_0} \frac{T'_0}{T_0} \right\}
 \end{aligned} \tag{12}$$

where

$$\begin{aligned}
 1 + i\sqrt{\pi}\zeta W(\zeta) &= \frac{i}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{\infty} \frac{te^{-t^2} dt}{t - \zeta} \\
 &= 1 + i\sqrt{\pi}\zeta + \dots \text{ when } \zeta < 1
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\sim - \frac{1}{2\zeta^2} - \frac{3}{4\zeta^4} - \dots \text{ when } \zeta \gg 1$$

$$V_{en} = - \frac{\kappa T_{eo}}{e B_0} \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx}, \quad V_{eT} = - \frac{\kappa}{e B} \frac{dT_{eo}}{dx}, \quad \zeta = \frac{(\omega + iv)}{\sqrt{2} c_e k_{\parallel}}$$

n_1 is easily eliminated using equation (6). The last line of equation (12) can be shown to be small for the following reasons. When $\zeta \gg 1$ the heat flow along field lines is small, and so the electrons are adiabatic. Since the motion is almost incompressible, the temperature perturbation results mainly from convection i.e. $T_1 \approx (E_y / i\omega B_0) T'_0$. Further

$$[1 + i\sqrt{\pi}\zeta W(\zeta)] [2\zeta^2 - 1] + 1 \approx - i\sqrt{\pi}\zeta \text{ if } \zeta \ll 1$$

$$\sim - 1/2\zeta^2 \text{ if } \zeta \gg 1.$$

Hence the last line of equation (12) is small for both $\zeta \ll 1$, and $\zeta \gg 1$, and will be neglected. Equation (12) can then be expressed in the form of an Ohms Law.

$$\left[1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{v}{c_e k_{\parallel}} W(\zeta) \right] j_{\parallel} = - \frac{i n_0 e^2}{\kappa T_{eo} k_{\parallel}^2} \left\{ [1 + i\sqrt{\pi}\zeta W(\zeta)] [\omega - k_y V_{en} + k_y V_{eT} (\frac{1}{2} - \zeta^2)] - \frac{1}{2} k_y V_{eT} \right\} E_{\parallel} \tag{14}$$

Defining the plasma admittance by the relation $j_{\parallel} = YE_{\parallel}$, it can readily be seen by using the expansions of equation (13) that

$$Y \approx - \frac{i}{4\pi c_A^2 k_{\parallel}^2 a_i^2} \frac{T_i}{T_e} \left\{ \omega - k_y V_{en} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\omega + iv}{c_e k_{\parallel}} \right) (\omega - k_y V_{en} + \frac{1}{2} k_y V_{eT}) \right\} \quad (15)$$

when $|\omega + iv| \ll c_e k_{\parallel}$

$$\sim \frac{ne^2}{m} \left(\frac{\omega - k_y V_{eo}}{\omega} \right) / \left[v - i\omega + \frac{ivc_e^2 k_{\parallel}^2}{\omega(v-i\omega)} \right] \quad (16)$$

when $|\omega + iv| \gg c_e k_{\parallel}$

where $V_{eo} = V_{en} + V_{eT}$. In the investigation of resistive instabilities, when $\zeta \gg 1$, it is more convenient to use a modified impedance, Z , defined by $Z = (\omega - k_y V_{eo})/\omega Y$. When written in this form it is obvious that the collision frequency for the BGK collision model is related to the resistivity by the simple expression $\eta = mv/ne^2$, so that

$$Z \approx \eta + i \frac{4\pi c^2}{\omega_{pe}^2} \left[-\omega + \frac{v c_e^2 k_{\parallel}^2}{\omega(\omega+iv)} \right] \text{ when } \zeta \gg 1. \quad (17)$$

where $\omega_{pe}^2 = 4\pi ne^2 c^2/m$. A similar result, given in equation (12) of reference [18], was derived from the fluid generalised Ohms Law. As pointed out there, the three components of the impedance correspond to the three forces which can balance the electric field along field lines i.e. collisional resistance, electron inertia, and the electron pressure gradient.

5. The Coupled Differential Equations

Substituting for j_{\parallel} in equation (7) gives the second equation relating A and Φ

$$\nabla_{\perp}^2 A = 4\pi i Y [c k_{\parallel} \Phi - \omega A] \quad (18)$$

where the general expression for Y is given by equation (14), and the limiting forms by equation (15) and (16). Equation (18) may be used to simplify equation (8) to

$$\omega(\omega - k_y V_{io}) \nabla_{\perp}^2 \Phi - [\alpha g k_y^2 + 4\pi i \omega Y c_A^2 k_{\parallel}^2] \Phi = - 4\pi i \omega^2 Y c_A^2 k_{\parallel} c^{-1} A. \quad (19)$$

The solution of two coupled second order differential equations is considerably eased if the general wave field can be split into two components which propagate almost independently, with only weak coupling between the two. An alternative choice of

potentials, which has some advantage in this respect, is defined by

$$\mathbf{E} = -\nabla\Psi - \nabla_{\perp}\chi \quad (20)$$

The relationship between these potentials and those used in equation (8) - (19) is $\Phi = \Psi + \chi$, $\mathbf{A} = (ck_{\parallel}/\omega)\chi$. Equation (18) and (19), when transformed into the new potentials, become

$$\begin{aligned} & \omega(\omega - k_y v_{io}) \nabla_{\perp}^2 \Psi - ag k_y^2 \Psi + 4\pi i \omega Y [\omega(\omega - k_y v_{io}) - c_A^2 k_{\parallel}^2] \Psi \\ &= ag k_y^2 \chi + \omega(\omega - k_y v_{io}) \left[2 \frac{k'_\parallel}{k_\parallel} \chi' + \frac{k''_\parallel}{k_\parallel} \chi \right] \quad (21) \end{aligned}$$

$$\nabla_{\perp}^2 (k_{\parallel} \chi) = -4\pi i \omega Y k_{\parallel} \Psi. \quad (22)$$

When g is small, and the shear is weak, the coupling between Ψ and χ is weak, so long as $k_{\parallel} \neq 0$. This is not surprising since the characteristics of the two low frequency waves in a homogeneous plasma are (a) for the acoustic wave, $\mathbf{E} = -\nabla\Psi$ i.e. $\chi = 0$ (b) for the shear Alfvén wave $\mathbf{E}_{\parallel} \approx 0$ i.e. $\Psi = 0$. When $k_{\parallel} \approx 0$, the waves in an inhomogeneous plasma loose this simple polarisation and it is then preferable to use equation (18) and (19). The problem is now reduced to finding solutions of equation (18) and (19) for \mathbf{A} and Φ , or (21) and (22) for Ψ and χ , satisfying appropriate boundary conditions, and the dependence of these solutions on v/ω .

6. Quasi-Modes

When $g = 0$ and the field is shear free, equation (21) is independent of χ and is similar to the equation used by Mikhailovskii and Pogutse^[15] to follow the transition between the collision free micro-instability ($c_e^2 k_{\parallel}^2 \gg v, \omega$) and the resistive drift mode ($c_e^2 k_{\parallel}^2 \ll v, \omega$). The simplest problem involving shear is that of quasi-modes in a plasma bounded in the Z direction.

The variation of a normal mode perpendicular to x is specified by the wavenumber components k_Y and k_Z . In particular ($B_z \nabla$) $\Phi = i [k_Y B_Y(x) + k_Z B_Z] \Phi = i B_0 \nabla_{\perp} \Phi$. For a quasi-mode the variation perpendicular to the field lines is specified while the variation along field lines must satisfy the differential equations. Thus the equations must be left in general form i.e. (B.7) $\Phi = B_0 \partial\Phi/\partial z$. Quasi-modes, and the equations which describe them, are fully discussed in^[16]. Their most important characteristic is that the surfaces of constant phase rotate with the sheared field lines so

that $(\underline{B} \cdot \nabla) \Phi$ is independent of x . The equations for such a mode may be obtained heuristically from the following arguments. Consider first the simple mode for which $(\underline{B} \cdot \nabla) \Phi = 0$, i.e. phase and amplitude are constant along each field line, and $k_x = 0$ at $Z = 0$. Referring to Figure 1, the dashed lines represent the intersection of the plane $Z = 0$ with two surfaces of constant phase, differing in phase by 2π . A field line which passes through (X, Y) on the plane $Z = 0$, passes through $(X, Y + sXZ_0)$ on $Z = Z_0$. Since the constant phase surface must follow the field lines, the intersection of these same surfaces with the plane $Z = Z_0$ is tilted through an angle $\tan^{-1}(sZ_0)$, as illustrated by the dotted line in Figure 1. If the wavenumber at $Z = 0$ is $\underline{k}_1 = (0, k_Y)$, then at Z_0 it is $\underline{k}_1 = (-sZ_0 k_Y, k_Y)$.

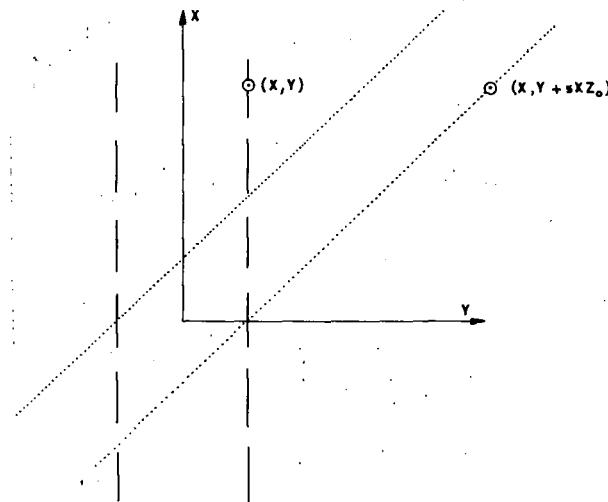


FIG. 1. Intersection of constant phase surfaces of a quasi-mode with the planes $Z=0$ (dashed lines) and $Z=Z_0$ (dotted lines)

The equation for a quasi-mode relative to the rotating coordinates can be written in the form $\Phi = \Phi(z) \exp[i(k_x z + k_y y - \omega t)]$ where k_x is now a function of z , determined by specifying its value at $z = 0$ and the requirement that $(\underline{B} \cdot \nabla) \Phi$ is independent of x . The differential equation describing the z variation in phase and amplitude of the mode may be obtained from the equations derived for the normal mode by the replacements

$$k_{||}^2 \Phi \equiv -\frac{1}{B_0^2} (\underline{B} \cdot \nabla)^2 \Phi = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad \nabla^2 \Phi = -[k_y^2 + (k_x(0) - sz k_y)^2] \Phi \quad (23)$$

In the collision dominated case, the admittance Y does not contain $k_{||}$. If the mode is assumed to be approximately electrostatic,

so that to first order $\chi = 0$, then equation (21) transforms into the quasi-mode form.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{i\eta k^2}{4\pi\omega_e c_A^2} \left\{ \omega \omega_i (1 + s^2 z^2) + ag \right\} \Psi + \frac{\omega \omega_i}{c_A^2} \Psi = 0 \quad (24)$$

where the abbreviations $\omega_i = \omega - k_y V_{io}$, $\omega_e = \omega - k_y V_{eo}$ will be used. Since it appears that the instability is never enhanced by a non-zero $k_x(0)$, $k_x(0) = 0$ is taken for convenience [16]. Apart from FLR effects, equation (24) is the same as that solved in [16].

6.1 Non Localised Quasi-Modes

Quasi-modes in a plasma which is bounded by conducting end-plates at $Z = \pm L/2$ will now be considered. Assuming that the coefficient of Ψ is nowhere small, a W.K.B. approximation can be applied to equation (24). Ignoring any sheath effects, the boundary condition that Ψ shall vanish at the plates provides the eigenvalue equation

$$\operatorname{Re} \left[\int_{-L/2}^{L/2} k_{\parallel}(z) dz \right] = n\pi \quad (25)$$

This integration can easily be performed, and gives the following results. When $sL < 1$, the quasi-mode is scarcely affected by the shear and equation (24) gives

$$i\eta [\omega \omega_i k_{\perp}^2 + ag k_y^2] = 4\pi [c_A^2 k_{\parallel}^2 - \omega \omega_i] \omega_e \quad (26)$$

with $k_{\parallel} = n\pi/L$, $k_{\perp}^2 = k_y^2$. A similar equation is derived for the shear free case in [12], and with $g = 0$ in [2], [3], [10], [14]. It is usually assumed that $c_A^2 k_{\parallel}^2 \gg \omega \omega_i$, in which case (26) is a quadratic for ω with roots

$$2\omega = k_y V_{io} - i\omega_s \pm \left[(i\omega_s - k_y V_{io})^2 + 4(i\omega_s k_y V_{eo} - ag k_y^2/k_{\perp}^2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (27)$$

where $\omega_s = 4\pi c_A^2 k_{\parallel}^2 / \eta k_{\perp}^2$. The pressure gradient is the dominant source of instability if $(k_y V_{io})^2 > ag k_y^2/k_{\perp}^2$, equivalent to $k_{\perp}^2 a_i^2 > (\rho g/\nabla p)$, the gravitational field is dominant if this inequality is reversed.

When $sL \gg 1$, the pressure gradient is dominant if $k_y^2 a_i^2 s^2 L^2 > 4(\rho g/\nabla p)$. The eigenvalues for this condition may again be obtained from equation (26) and (27) if the wavenumbers in these equations are redefined as $k_{\perp}^2 = k_y^2 (sL/2)^2$, $k_{\parallel} = 2n\pi/L$.

The fastest growing wavenumber has

$$\gamma \approx k_y V_{eo} \approx \omega_s = \frac{4\pi c^2 A}{\eta k_y (sL)^2} \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2$$

$$\text{giving } \gamma_{\max}^3 \approx \frac{4\pi c^2 s^2}{\eta} \frac{V_{eo}^2}{(sL)^4} (2n\pi)^2 \quad (28)$$

A gravity-driven quasi-mode satisfying equation (25) is also found in the $sL \gg 1$ case, when $k_y^2 a_i^2 s^2 L^2 < (\rho g / \nabla p)$. The maximum growth rate for this mode is reduced by shear to $2(\alpha g)^{1/2}/sL$. This mode will not be considered in detail as it will be shown later that it can never be the dominant instability.

6.2. Localised Quasi-Modes

It has been shown by Roberts and Taylor^[16] that the gravitational quasi-mode may reduce the stabilising effect of shear in a long system by localising itself within a fraction of the plasma length. Since for such a mode $k_{||}$ passes through zero, thus producing a singularity in the coupling term of equation (21), the alternative equation (18) and (19) are used. Making the substitutions set out in equation (23), changing the scale of the parallel coordinate,

$$\zeta = z/\Delta \text{ where } \Delta^4 = \frac{4\pi i \omega_e c^2 A}{\eta k_y^2 \omega_i s^2}, \text{ and defining } r^2 = -\frac{i \eta k^2 (\alpha g + \omega \omega_i)^2}{4\pi \omega \omega_i \omega_e c^2 s^2}.$$

equation (18) and (19) become

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} + (r - \zeta^2) \Phi = \frac{i \omega \Delta}{c} \frac{\partial A}{\partial \zeta} \quad (29)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} - \frac{i \omega \Delta}{c} \left(1 + \frac{i \eta k^2}{4\pi \omega_e} \right) A + \frac{i c^2 A}{c \omega_i \Delta} \zeta^2 A = 0 \quad (30)$$

The conditions under which these equations have electrostatic solutions, localised within a length short compared to L , can be determined as follows. Assume that solutions exist for which the right hand side of equation (29) is negligible. Equation (29) is then a Weber equation, and the condition that the solution shall fall off exponentially for both ζ large and positive, and large and negative, is $r = 2n + 1$. This gives an eigenvalue equation for ω

$$\omega(\omega - k_y V_{io}) (\omega - k_y V_{eo}) = -\frac{i \eta k^2}{4\pi} \frac{(\alpha g)^2}{c^2 s^2} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad (31)$$

which differs from that derived by Roberts and Taylor^[16] only in that F.L.R. effects are now included. The localised solutions

are $\Phi_n = h_n(\zeta)$, where h_n is the Hermite function. The magnetic field perturbation, A , may now be found for such a mode using equation (30). Hence the right hand side of equation (29) may now be compared with terms on the left, to verify that it is indeed negligible. It is found that when n is even the right hand side of equation (29) is of order unity when $|\zeta| \leq 0(D)^{\frac{1}{2}}$. Outside this range it is $O(D/\zeta^2)$. Since $D = ag/c_A^2 s^2$ is assumed small, this introduces only a small correction to Φ . However, when n is odd the R.H.S. of equation (29) is large, $O(1/D)$ within the narrow band $|\zeta| \leq 0(D)^{\frac{1}{2}}$. Hence the electrostatic assumption, and the eigenvalue equation (31), are valid for even n only.

The variation in the eigenfrequency, localisation length, and mode structure with k_y will now be discussed. Assuming for convenience that $\nabla p_{io} = \nabla p_{eo}$, then $V_{io} = -V_{eo}$ and the root of equation (31) for which $\text{Im } (\omega) > 0$ is a pure imaginary, $\omega = iy$. For sufficiently small k_y , such that $k_y a_i \ll (\nu/\Omega_e) \cdot (\rho g/\nabla p) D (a a_i \beta)^{-1} (4n+1)^{-2}$, then $k_y V_{eo} \ll \gamma$, the F.L.R. terms in equation (31) are negligible, and γ increases as k_y . At large k_y the above inequality is reversed, $\gamma < k_y V_{eo}$, and the unstable eigenvalue tends asymptotically to the upper limit

$$\gamma_M \sim \frac{n(ag)^2}{4\pi c_A^2 s^2 V_{eo}^2 (4n+1)^2} \sim \nu \frac{m}{M} \left(\frac{\rho g}{\nabla p} \right)^2 \left(\frac{a}{s} \right)^2 \frac{1}{(4n+1)^2} \quad (32)$$

The turning points, $\zeta = \pm (4n+1)^{\frac{1}{2}}$, at which the coefficient of Φ in equation (29) passes through zero, correspond to

$$z_1^2 = \frac{ag}{s^2 \gamma (\gamma + ik_y V_{io})} \quad (33)$$

For small k_y , such that $k_y V_{eo} < \gamma$, the points $\pm z_1$ lie close to the real axis. The Hermite function solution for real z is then oscillatory for $|z| < z_1$ and decays as $z^n \exp[-z^2/2z_1^2]$ when z moves outside this range. The localisation length, z_1 , decreases as $k_y^{-2/3}$. However, as k_y increases beyond the value where $\gamma \approx 0 (k_y V_{eo})$, the localisation length ceases to decrease, and tends asymptotically to the lower limit $(4n+1)^2 z_m$ where

$$z_m = \frac{1}{\sqrt{2}s} \frac{4\pi}{\eta} \frac{c_A^2 s^2}{(ag)^{3/2}} V_{eo}^2 = \frac{\Omega_e}{\nu} \left(\frac{\nabla p}{\rho g} \right)^{3/2} \frac{a_i s}{\sqrt{2}a} \quad (34)$$

This limiting process can be explained in terms of the Stokes diagram for the equation [9]. As k_y increases, the turning points

$\pm z_1$ approach the origin but when $k_y V_{eo} > \gamma$ this is compensated by the argument of z_1 approaching the critical value $\pi/4$ [18]. The intersection of the anti-Stokes lines with the real z axis, which determines the length of the localisation region, tends asymptotically to (34).

The W.K.B. approximation to the solution at large $|z|$ is

$$\Phi(z) \sim \exp \left[-\frac{\eta k^2}{4\pi} \frac{ag}{c_A^2 V_{eo}^2} \left(i - \frac{\gamma}{k_y V_{eo}} \right) \frac{z^2}{(4n+1)} \right] \quad (35)$$

When $k_y V_{eo} > \gamma$, the mode takes the form of a standing wave pattern in z whose amplitude at large z decays as $\exp[-z_m^2/4z_m^2(4n+1)^3]$, consistent with the preceding estimate of the localisation length, and whose wavelength decreases as k_y increases.

Although equation (24) still has the Weber equation form when $g = 0$, it is evident from the relative phases of the terms that there are no solutions with $\text{Im } (\omega) > 0$ which are localised along the real z axis i.e. there are no localised pressure-driven resistive quasi-modes.

It has so far been assumed that the localised quasi-mode is unaffected by the boundaries i.e. the mode amplitude is negligible at $z = \pm L/2$. This is possible only if $z_m \ll L$. In such a plasma non-localised pressure driven quasi-modes can also exist at wavenumbers $k_y^2 a_i^2 s^2 L^2 > 4 (\rho g / \nabla p)$, and non-localised resistive-g quasi-modes at smaller k_y . It is of interest to compare the growth rate of these modes. Denoting the fastest growth rate for the pressure-driven quasi-mode, equation (28), by $(\gamma_p)_M$, that for the localised resistive-g quasi-mode, equation (32), by $(\gamma_{gL})_M$, and that for the non-localised resistive-g quasi-mode, (\sqrt{ag}/cL) , by $(\gamma_{gN})_M$, then it can readily be shown that if $z_m \ll L$, $(\gamma_{gL})_M > (\gamma_{gN})_M > (\gamma_p)_M$, whereas if $z_m > L$, $(\gamma_p)_M > (\gamma_{gN})_M$. Hence if $z_m \ll L$, the localised resistive-g quasi-mode is dominant, if $z_m > L$ the pressure driven quasi-mode is dominant.

The above comparisons show the relationship between the pressure driven and gravity driven resistive modes in a shear-free plasma and the corresponding quasi-modes in a sheared field. It has already been demonstrated in the shear free case that as the collision frequency decreases the pressure driven resistive mode passes into the collision-free drift instability [14], [15]. A corresponding transition presumably takes place between the quasi-modes in a sheared field ($s L \gg 1$) but time and space does not permit these comparisons to be made here.

7. Normal Modes

The problem of a toroidal plasma, of length $L = 2\pi R$, is analogous in certain respects to that of a straight cylinder or slab of length L , with the periodic boundary condition that the solution at the two ends shall match. The shear parameter in the toroidal problem which corresponds to s in the slab is ℓ/L , where ℓ = rotational transform angle. If $\ell \gg 1$ and $L \gg z_m$, then quasi-modes, analogous to those in slab geometry, should be possible in the torus. Since their localisation length is much less than L , the periodicity requirement should not affect the mode significantly. However, in most toroidal experiments of current interest $\ell = 0(1)$, and z_m for the analogous slab problem is greater than $2\pi R$. It is not obvious how a quasi-mode of the type considered can fit into such a geometry.

7.1 Resistive-g Normal Modes

There is no such problem with the resistive normal modes treated without F.L.R. effects by Furth, Rosenbluth and Killeen [8], and by Johnson, Greene and Coppi [11], and with F.L.R. effects by Coppi [4], [5]. In slab geometry a normal mode can be written in the form of equation (2) where $k_{\parallel}(x) = (\underline{k} \cdot \underline{B}(x))/B_0 = k_y s x$ (the origin is chosen so that $\underline{k} \cdot \underline{B} = 0$ at $x = 0$).

In the collision dominated case ($v \gg \omega, \omega v \gg c_e^2 k^2$), from equation (17) $Z = \eta, Y = \omega_e/\omega\eta$. Assuming $d^2\Phi/dx^2 \gg k_y^2 \Phi$, and applying a scaling factor to the x coordinate $\xi = x/\varepsilon$, equation (18) and (19) may then be written in the form

$$\frac{d^2 A}{d\xi^2} = -\frac{D}{r} A - \frac{D}{r} f \xi \Phi \quad (36)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} + (r - \xi^2) \Phi = -\xi f A \quad (37)$$

$$\text{where } \varepsilon^4 = \frac{\tau \omega_i}{4\pi i \omega_e c_e^2 s^2 k_y^2},$$

$$r = -\frac{agk_y^2 \varepsilon^2}{\omega \omega_i} = \left[-\frac{ik_y (ag)^2}{4\pi \omega \omega_i c_e^2 s^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad f = \frac{\omega}{ck_y s \varepsilon}$$

These equations are of the same form as the differential equations derived from resistive fluid equations [5], [8], [11]. In fact if the substitutions $\Phi = \xi(\omega B_0/k_y)$ and $A = \tilde{B} (c/ik_y)$ are made in equation (8) and (18) they become identical with equation (26) and equation (27) of [5] for the x components of plasma displacement (ξ) and

perturbed magnetic field (\tilde{B}). Thus the same analysis when applied to equation (8) and (18) will give results in agreement with those previously obtained for the resistive-g mode.

As an alternative to the Fourier transform technique used in [5] and [11], when $D = \alpha c_A^2 s^2 \ll 1$ the solution may be obtained as a power series in D. The results of such a series solution for the electrostatic resistive-g normal mode will now be outlined, details of the analysis will be given elsewhere. D is assumed small but not as small as the relative scale length of the mode i.e. $\alpha c \ll D \ll 1$. Formally it is assumed that $\alpha c = O(D^N)$ where N is some integer greater than one. When $D = 0$, equation (36) and (37) decouple and the zero order solution corresponding to a localised electrostatic mode is $A^{(0)} = 0$, $r = 2n + 1$, $\Phi^{(0)} = h_n(\xi)$ where $h_n(\xi)$ is the Hermite function of order n. Terms of order D may be determined by integrating equation (36) twice, and identifying the resulting expression with the general asymptotic solution for large ξ . The solution must be capable of satisfying the further boundary condition that Φ and A shall vanish at the plasma boundaries, where $\xi = 0$ ($1/\epsilon_0$)^[11]. The solution obtained as above can satisfy this condition only when n is even.

The eigenvalue equation $r = 4n + 1$ is identical with the result obtained for the resistive-g normal mode by Coppi [5], and without F.L.R. effects by earlier authors [8], [11]. It is also identical with the equation for the localised resistive-g quasi-mode, equation (31) with n even. Thus the variation of the unstable root, $\omega = iy$, with k_y is just the same as described for the quasi-mode in Section 6.2. There is also a close correspondence between the localisation properties of the normal mode in the x-direction, and the quasi-mode in the z direction. The solution of equation (36) and (37) to order D, for ω satisfying equation (31) with n even, is

$$\Phi(\xi) = h_n(\xi) + O(D) \text{ for } \xi \leq 0 \quad (1)$$

$$\sim h_n(\xi) + \frac{DK}{\xi^{1-D}} \left[1 + \frac{2n+1}{\xi^2} + \dots \right] + O(D^2) \text{ for } \xi \gg 1 \quad (38)$$

$$A(\xi) = O(D) \text{ for } \xi \leq 0 \quad (1)$$

$$\sim - \frac{D}{(2n+1)\xi} h_n(\xi) + DK \xi^D + O(D^2) \text{ for } \xi \gg 1 \quad (39)$$

$$\text{where } K = \frac{1}{(2n+1)} \int_0^\infty \xi^2 h_n(\xi) d\xi.$$

For sufficiently small k_y , such that $k_y V_{eo} \ll \gamma$, ϵ is approximately

real and the turning points in the complex x -plane, corresponding to $\xi = \pm (4n+1)^{\frac{1}{2}}$, lie close to the real x axis. The solution $\Phi(x)$ for real x is then strongly localised between $x = \pm \varepsilon (4n+1)^{\frac{1}{2}}$. Beyond these turning points it decays as $\exp[-x^2/2\varepsilon^2]$ out to $|x| = 0 [\varepsilon \ln(1/D)]$. Beyond this the second term in equation (38) becomes dominant, and the mode decays more slowly. It also ceases to be electrostatic, and takes on a hydromagnetic character, $\omega_A \sim c k_{\parallel} \Phi$ corresponding to $E \cdot B \approx 0$.

As k_y increases, γ increases as $k_y^{\frac{1}{3}}$ and the width of the localisation region shrinks, $\varepsilon \propto k_y^{-\frac{1}{3}}$, until $k_y V_{eo} = 0(\gamma)$. For larger k_y the turning points move into the complex plane, exactly analogous to the behaviour of the quasi-modes described in section 6.2, and the width of the localisation region along the real x axis tends to the asymptotic limit.

$$\Delta x_m = a_i (\nabla p / 2\rho g)^{\frac{1}{2}} (4n + 1) \quad (40)$$

A similar limit was found by Coppi [4].

7.2 Pressure-Driven Resistive Drift Mode

In the shear free resistive plasma, pressure gradient and gravity appear as two instability mechanisms driving the same "electrostatic" mode, see equation (27). A difference appears in the quasi-modes in a sheared field. In conditions where g is the dominant instability mechanism the mode can localise itself within a fraction of the plasma length, whereas when pressure gradient is dominant it cannot. A similar difference appears between the normal modes. When $g = 0$, then $r = 0$ in equation (37) and there are no localised solutions. Although the pressure gradient instability is contained in these equations, it does not appear in the eigenvalue equation for modes localised in x .

The instability mechanism is strongest for a small but finite value of k_{\parallel} . If the mode extends over the full width of the slab, its growth rate will be reduced to some average value over the range of k_{\parallel} . However localisation is also possible due to variation in parameters other than $(E \cdot B)$. The velocity of this mode, $\text{Re}(\omega)/k_y$, approximately equals V_{eo} . Thus a relatively small change in dp_{eo}/dx may lead to a significant change in $\omega_e = \omega - k_y V_{eo}$. If the shear is weak, this can lead to localisation about a point of inflection in the pressure profile [10].

7.3 The Inertial- g Mode

The impedance to current flow along field lines is predominantly due to electron inertia if $c_e^2 k_{\parallel}^2 < \omega^2$ and $v < |\omega|$. For an electron

inertial mode to exist, it must localise itself sufficiently close to $x = 0$ (where $k_y B = 0$) that the first inequality is satisfied, otherwise it will be Landau damped. The equations for the inertial mode, corresponding to equation (36) and (37) for the resistive-g mode, may be obtained by replacing $\eta/4\pi$ by $c^2(\omega + iv)/i\omega_{pe}^2$, see equation (16). Thus the eigenvalue equation for localised "electrostatic" inertial-g modes, corresponding to the condition $r = 2n + 1$ in equation (37), is

$$(\omega - k_y v_{io}) (\omega - k_y v_{eo}) = - \frac{k_y^2 (ag)^2}{s^2 \Omega_i \Omega_e (2n+1)^2} (1 + \frac{iv}{\omega}) \quad (41)$$

This differs from the result obtained in [6], where the electron inertia was taken to be proportional to $\omega - k_y v_{eo}$, rather than ω [7]. Assuming $dp_{eo}/dx = dp_{io}/dx$, and neglecting the iv/ω term, (41) gives

$$\omega^2 = k_y^2 v_{eo}^2 \left[1 - \left(\frac{ag}{c_A^2 s^2} \right) \left(\frac{\rho g}{\nabla p} \right) \frac{1}{\beta} \frac{m}{M} \frac{1}{(2n+1)^2} \right] \quad (42)$$

Since $ag \ll c_A^2 s^2$ and $\rho g \ll \nabla p$ is assumed, such a mode requires extremely low values for β for instability.

In a shear free plasma with $\beta < m/M$, the electron inertial instability survives even when $g = 0$ [7], [20]. It is unstable when k_{\parallel} lies in the range $\omega \omega_i/c_A^2 < k_{\parallel}^2 < \omega^2/c_e^2$. In a sheared field this mode does not appear to be able to localise itself within the unstable region, and so energy will spread into the region where electron Landau damping is heavy [18].

7.4 The Collision-free Drift Wave

For the collision-free drift wave, $\omega/k_{\parallel} \ll c_e$ is assumed, and Ψ is given by equation (15). Since $k_{\parallel} \neq 0$ within the region of interest, equation (21) and (22) for Ψ and χ is the more convenient form. Provided g is not too large, these equations could be solved by iteration, assuming the mode to be approximately electrostatic in the sense that the zero order solution is the solution of equation (21) with $\chi = 0$. Writing equation (21) in the form $\partial^2 \Phi / \partial x^2 - [V(x) + k_y^2] \Phi = 0$ then, if $V(x)$ is mainly real, a necessary condition for the existence of localised solutions is that $V(x)$ shall have a minimum, near which $V(x) < 0$ [17]. One then looks for a solution which falls off exponentially outside the turning points, x_1 and x_2 , where $V(x) + k_y^2 = 0$.

When $g = 0$, $\chi = 0$, equation (21) is identical with the equation for the drift mode in reference [9] and [13], except for the absence of a correction term $O(c_i k_{\parallel} / \omega)^2$ due to ion flow along field lines.

The imaginary terms in Y , resulting from resonant electrons, give rise to an instability provided that the mode can localise itself within a region where $c_i \ll \omega/k_{\parallel} \ll c_e$. An inner turning point can occur at the point where $c_A^2 k_{\parallel}^2 = \omega \omega_i$, and hence $V(x) = 0$. Since $\omega \approx k_y V_{en} [1 + 0(k^2 a_i^2)]$, and V_{en} varies with x , $\omega - k_y V_{en}(x) = 0$ and hence $\text{Re}[V(x)] = 0$ at some x , giving the outer turning point. When $\beta > m/M$, the mode can localise itself within the required region provided the shear is not too large i.e. $(s/a) < (aa_i)^{\frac{1}{3}}$ and $(aa_i)^{\frac{1}{2}} \beta^{\frac{1}{4}}$ [13]. When $\beta < m/M$ the localisation region includes the point $\omega/k_{\parallel} = c_e$, where electron Landau damping is heavy. Although this case has not been thoroughly investigated, it would appear likely that the collision-free drift mode in an infinite plasma with $\beta < m/M$ is stabilised by shear. If the plasma has vacuum boundaries in the x direction, this need not be the case, as will be discussed later.

The addition of a weak gravitational field affects the growth rate of the drift wave indirectly, in that it alters the real part of ω which in turn alters the factor $(\omega - k_y V_{en} + k_y V_{yT}/2)$ in the resonant particle contribution to Y . It is concluded in [9] that a weak g can alter the growth rate, but not affect the localisation criteria quoted earlier in this paragraph.

7.5 Transition from Collision free to Resistive Normal Modes

Mikhailovskii and Pogutse [14], [15] have demonstrated the transition of the collision free drift instability into the pressure-driven resistive drift mode, as $v/c_e k_{\parallel}$ increases in a shear-free plasma. A similar transition occurs in a sheared field, but because k_{\parallel} varies over the localisation region it is now less sharp. Consider first $g = 0$ and $\beta > m/M$. If $v/k_y V_{eo} < (\beta M/m)^{\frac{1}{2}}$ then $v < c_e k_{\parallel}$ over the localisation region $\omega/c_A \leq k_{\parallel} \ll \omega/c_i$, and neither resonant particle contribution nor the real part of $V(x)$ is significantly affected by collisions. If $(\beta M/m)^{\frac{1}{2}} < v/k_y V_{eo} < (\beta M/m)$, then $v > c_e k_{\parallel}$, at least over part of the localisation region, while still $v \omega < c_e^2 k_{\parallel}^2$. The real part of $V(x)$ is unaltered but instead of the resonant particle contribution there is now a small imaginary part from the factor $(1 + i\omega/c_e^2 k_{\parallel}^2)$ in equation (16). As shown in [15], this collisional instability mechanism can be stronger than that due to resonant particles when $v = 0$. When $v/k_y V_{eo} > \beta M/m$ then $v \omega > c_e^2 k_{\parallel}^2$, at least over part of the region, and the equations become those for the resistive drift wave. As the mode moves into the collision dominated regime, the impedance Z changes from imaginary to real, see equation (17). The resulting

change in phase of $V(x)$ leads to the different localisation properties of the mode in the two limits.

When $\beta < m/M$, the drift mode is electron Landau damped if $v/k_y V_{eo} < 1$. If $v/k_y V_{eo} > 1$, electron Landau damping is no longer important and the mode merges into the resistive drift mode.

Within the validity of the equations used there is no apparent lower limit on the collision frequency for the resistive-g instability in an infinite plasma with $g \neq 0$. From equation (32) for the maximum growth rate, $|\omega| < v$ for all k_y if $(pg/\nabla p) < (s/a)^{(M/m)}^{1/2}$, in which case the mode cannot be affected by electron inertia. When this inequality is reversed, the eigenvalue equation (31) gives $\gamma > v$ for k_y above a certain value and hence the neglect of electron inertia is no longer valid. The neglect of the electron pressure gradient contribution to Z , which requires $wv \gg c_e^2 k^2$, is valid over the localisation region if $k_y a_i < (v/\Omega_e) (pg/\nabla p)^{1/2} D(\beta a_i a)^{-1}$. In a cylindrical plasma, where the minimum k_y is limited by the dimensions, this may set a lower limit on v for the instability. Ion viscosity, neglected in this treatment, is likely to become important before the above inequality is violated.

8. Cylindrical Plasma

Predictions for the growth rates of the corresponding modes in a cylindrical plasma may be obtained by making the following substitutions in the slab results

$$ag \rightarrow \frac{2}{R_c^2} \frac{dp}{dr}, \quad s \rightarrow r \quad \frac{d\mu}{dr} = \frac{r}{L} \frac{dt}{dr}, \quad k_y \rightarrow \frac{m}{r} \quad (43)$$

where R_c = radius of curvature of the field lines = rB^2/B_θ^2 , μ = pitch of the field lines = B_θ/rB_z , t = rotational transform over the length L , and m = the azimuthal wavenumber.

The finite geometry may introduce certain new effects. For instance, to avoid electron-ion Landau damping the collision free drift wave must satisfy $\omega/c_e < k_{||} < \omega/c_i$. It can do this in an infinite plasma only if the dispersive properties are such that the mode becomes evanescent outside a suitable range of x . However, in a cylindrical plasma bounded by vacuum, a mode could fill the entire cross section and still satisfy the above inequality if $t < a_i L/r_0^2$. The finite geometry affects resistive instabilities in that the minimum k_y is now $1/r$ which may already be above the value at which F.L.R. effects are important.

9. Conclusions

General equations have been obtained for low frequency modes in a low- β plasma confined by a sheared magnetic field, valid for arbitrary ratio of collision frequency to mode frequency within the accuracy of the B.G.K. collision model. These equations have been solved for modes which, to lowest order in the gravitational destabilising force, are electrostatic. In the appropriate limits the equations give the normal mode and quasi-mode forms of the electrostatic resistive-g instability, the pressure driven drift instability, the inertial instabilities, and the drift (universal) micro-instability.

The relationship between the quasi-mode forms of the different instabilities is discussed for a plasma bounded by conducting end plates perpendicular to the magnetic field. Whereas in a long plasma the resistive-g quasi-mode may overcome the stabilising effect of shear by localising itself within a fraction of the length, the pressure-driven resistive drift mode does not have this ability. A criterion is obtained which predicts which of the resistive quasi-modes is the fastest growing.

A corresponding difference exists between the localisation properties of the normal mode forms of the instabilities. For each mode the instability mechanism is strongest when $k_{\parallel} = (\underline{k}_B)/B$ lies within some specified range. However, it does not necessarily follow that the mode can localise itself within the band of x where \underline{k}_B has the appropriate values. Only the resistive-g normal mode has the property that it can so localise itself irrespective of the plasma parameters. No lower limit has been found for the collision frequency below which the resistive-g mode ceases to be unstable in an infinite plasma. In a finite plasma, however, the restrictions on the maximum permissible wavelength can lead to such a lower limit. The inertial-g mode appears to be stabilised by shear except at extremely low values of β .

The transition between the collision-free drift wave and the pressure-driven resistive wave has already been demonstrated in a shear free plasma^{[14], [15]}. The corresponding transition between the normal modes in a sheared field, discussed in Section 7.5 is less sharp because (\underline{k}_B) varies over the localisation width and hence the relative importance of collisional and collision-free effects, which depends on $v/c_e k_{\parallel}$, changes within this region.

Acknowledgements.

I am indebted to Dr. J.B. Taylor for many helpful comments and suggestions and to Dr. P. Rutherford for several fruitful

discussions. I would like to thank the members of Theory Division, Plasma Physics Laboratory, Princeton, where the early part of this work was done, for their assistance and hospitality. I am grateful to Dr. A.B. Mikhailovskii and O.P. Pogutse for supplying a preprint of reference [15].

References

- [1] Bhattacharjee, P.L., Gross, E.P. and Krook, M. Phys. Rev. 94 (1954) 511.
- [2] Chen, F.F. Phys. Fluids 7, (1964) 949.
- [3] Chen, F.F. Phys. Fluids 8, (1965) 912.
- [4] Coppi, B. Phys. Rev. Letters 12, (1964) 417.
- [5] Coppi, B. Phys. Fluids 7, (1964) 1501.
- [6] Coppi, B. Phys. Letters 12, (1964) 213.
- [7] Coppi, B. Phys. Letters 14, (1965) 172.
- [8] Furth, H., Killeen, J. and Rosenbluth, M. Phys. Fluids 6 (1963) 459.
- [9] Galeev, A.A. ZETF (USSR) 44, (1963) 1920. Sov. Phys. - JETP 17 (1963) 1292.
- [10] Galeev, A.A., Moiseev, S.S. and Sagdeev, R.Z. Atomnaya Energiya 15 (1963) 451. J. Nucl. Energy Pt. C 6 (1964) 645.
- [11] Johnson, J., Greene, J. and Coppi, B. Phys. Fluids 6 (1963) 1169.
- [12] Jukes, J.D. Phys. Fluids 7 (1964) 1468.
- [13] Mikhailovskaya, L.V. and Mikhailovskii, A.B. Nucl. Fusion 3 (1963) 28.
- [14] Mikhailovskii, A.B. and Pogutse, O.P. Doklady 156 (1964) 64 Sov. Phys. - Doklady 9 (1964) 379.
- [15] Mikhailovskii, A.B. and Pogutse, O.P. (To be published).
- [16] Roberts, K.V. and Taylor, J.B. Phys. Fluids 8 (1965) 315.
- [17] Silin, V.P. ZETF (USSR) 44 (1963) 1271; Sov. Phys. - JETP 17 (1963) 857.
- [18] Stringer, T.E. Princeton Univ. Rep. MATT - 320 (1965).
- [19] Vedenov, Velikov and Sagdeev Usp. Fiz. Nauk. 73 (1961) 701; Sov. Phys. - Uspekhi 4 (1961) 332.
- [20] Galeev, Oraevskii, and Sagdeev, ZETF (USSR) 44 (1963) 911 Sov. Phys. JETP 17 (1963) 615.

MAXIMAL ORDERING STABILITY PROBLEM

E. FRIEMAN AND K. WEIMER
PRINCETON UNIVERSITY,
PRINCETON, N.J., UNITED STATES OF AMERICA
AND
P. RUTHERFORD
UNITED KINGDOM ATOMIC ENERGY AUTHORITY,
THE CULHAM LABORATORY,
ABINGDON, BERKS., ENGLAND

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

MAXIMAL ORDERING STABILITY PROBLEM. This paper is an attempt to unify the discussions of hydro-magnetic instabilities, resistive instabilities, and microinstabilities that have previously been given by many authors using different sets of equations and plasma models. We have studied a slab plasma at low β with gravitational, shear, collisional, and resonant particle effects included. The basic equations used are the Maxwell-Vlasov set with the standard Fokker-Planck collision term. We first discuss the circumstances under which these equations are valid. We then order the various terms in the equations in an expansion in $\epsilon = R_L/L_\perp$ where R_L is the ion Larmor radius and L_\perp is the characteristic scale length of the equilibrium state perpendicular to the main confining field. The ordering is so chosen that the maximum number of physical effects are brought into the final set of equations in such a way that they all compete.

The advances of this procedure are that most of the previously known instabilities are predicted by these equations and that the relation between the various modes is made clear. In addition, the method also permits the conclusion that all low frequency modes have been uncovered. Similar conclusions have been reached by Stringer using a hydromagnetic fluid model which neglects resonant particle effects. Except for the microinstabilities our results are in essential agreement.

Although all the ramifications of the final set of equations have not as yet been explored, the stability of present stellarators will be discussed within the confines of the model. In addition, criteria for the new stabilized stellarator configurations discussed by Kulsrud and Spitzer will be given.

PROBLEME DE LA STABILITE: PROCEDE POUR TENIR COMPTE DU MAXIMUM D'EFFETS. L'objet de ce mémoire est de tenter d'unifier les diverses études portant sur les instabilités hydrodynamiques, les instabilités résistives, ainsi qu'les microinstabilités, faite par plusieurs auteurs utilisant des ensembles d'équations et des modèles de plasmas différents. Les auteurs ont étudié un plasma en forme de plaque à β faible en tenant compte d'effets dus à la gravitation, aux collisions, au croisement des lignes de champ et aux particules résonantes. Ils emploient comme équation de base l'ensemble de Maxwell-Vlasov avec le terme collisionnel de Fokker-Planck habituel. Ils discutent d'abord les conditions dans lesquelles ces équations sont valables. Ils agencent ensuite les différents termes des équations dans un développement en $\epsilon = R_L/L_\perp$ où R_L est le rayon de Larmor des ions et L_\perp est la longueur d'échelle caractéristique de l'état d'équilibre perpendiculaire au champ principal de confinement. L'agencement est choisi de manière que le nombre maximum d'effets physiques soit introduit dans le système final d'équations et que ces effets se font concurrence.

L'avantage de cette méthode réside dans le fait que ces équations permettent de prévoir la plupart des instabilités connues et de dégager la relation qui existe entre les différents modes. De plus, la méthode permet de conclure que tous les modes à basse fréquence ont été découverts. Stringer est arrivé à des conclusions semblables en se fondant sur un modèle à fluide hydromagnétique où l'effet des particules résonnantes est négligé. Les résultats obtenus par les auteurs sont en bon accord avec les siens, sauf en ce qui concerne les microinstabilités.

Toutes les ramifications du système d'équations final n'ont pas encore été explorées, mais les auteurs discutent la stabilité des stellarators actuels dans les limites du modèle. De plus, ils établissent des critères pour les nouvelles configurations stabilisées pour stellarator étudiées par Kulsrud et Spitzer.

МАКСИМАЛЬНОЕ УПОРЯДОЧЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ. Сделана попытка унифицировать рассмотрение гидромагнитных неустойчивостей, неустойчивостей сопротивления и микронеустойчивостей, которое ранее приводилось многими авторами с использованием различных систем уравнений и моделей плазмы. Авторы исследовали пластинчатую плазму при малом значении β , включая значение гравитационных, срезывающих эффектов, ударных и резонансных частиц. Основные уравнения, которые были использованы, — это система Максвелла-Власова со стандартным членом столкновения Фоккера-Планка. Сначала мы рассматриваем условия, при которых применимы эти уравнения. Затем мы располагаем различные члены уравнений в ряд $\epsilon = R_L/L_\perp$, где R_L радиус иона Лармора L_\perp характерная шкальная длина состояния равновесия, перпендикулярная главному удерживающему полю. Расположение осуществляется так, что максимальное число физических воздействий вынесено в конечную систему уравнений таким образом, что все они конкурируют.

- Преимущества этого метода состоят в том, что большая часть ранее известных неустойчивостей предсказывается этими уравнениями и становится ясной связь между различными модами. Кроме того, этот метод позволяет также прийти к заключению, что все низкочастотные моды не были охвачены. К аналогичным выводам пришел Стрингер, используя гидромагнитную газовую модель, которая пренебрегает влияниями резонансных частиц. Полученные результаты в основном сходятся, за исключением микронеустойчивостей.

Хотя все разветвления конечной системы уравнений еще не исследованы, устойчивость имеющихся "стеллараторов" рассматривается в рамках модели. Кроме того, приводятся критерии для конфигурации нового стабилизированного "стелларатора", рассмотренного Кулсрудом и Шпитцером.

EL PROBLEMA DE LA ESTABILIDAD: PROCEDIMIENTO PARA TENER EN CUENTA EL MAXIMO DE EFECTOS. Esta memoria constituye un intento de unificar los diferentes estudios sobre las inestabilidades hidromagnéticas, las inestabilidades resistivas y las microinestabilidades, que han sido efectuados por varios autores utilizando diferentes sistemas de ecuaciones y de modelos de plasma. Los autores han estudiado un plasma de forma de placa, de β pequeña, teniendo en cuenta los efectos debidos a la gravitación, a los choques, al cruce de las líneas de fuerza y a las partículas resonantes. Emplean como ecuación básica el sistema de Maxwell-Vlasov con el término de colisiones de Fokker-Planck habitual. En primer lugar discuten las condiciones en las cuales dichas ecuaciones son válidas. Seguidamente ordenan los distintos términos de las ecuaciones mediante un desarrollo en $\epsilon = R_L/L_\perp$, en donde R_L es el radio de Larmor de los iones y L_\perp es la longitud de escala característica del estado de equilibrio perpendicular al campo principal de confinamiento. Se ha elegido la ordenación de modo que el número máximo de efectos físicos sea introducido en el sistema de ecuaciones final, y que todos ellos compitan.

La ventaja de este procedimiento reside en el hecho de que estas ecuaciones permiten predecir la mayoría de las inestabilidades conocidas previamente y aclarar la relación entre los diversos modos. Además, el método permite también comprobar que se han descubierto todos los modos de baja frecuencia. Stringer ha llegado a conclusiones análogas basándose en un modelo de fluido hidromagnético que no tiene en cuenta los efectos de las partículas resonantes. Excepto en lo que se refiere a las microinestabilidades, estos resultados concuerdan con los de los autores de la presente memoria.

Si bien no se han explorado aún todas las ramificaciones del sistema de ecuaciones final, se discutirá la estabilidad de los stellaratores actuales, dentro de los límites de este modelo. Además, se presentarán criterios para las nuevas configuraciones estabilizadas para stellarator estudiadas por Kulsrud y Spitzer.

A. INTRODUCTION

In the past few years a number of instabilities of hydromagnetic, resistive, and microscopic types have been pointed out for plasma containment devices which depend on shear stabilization. In the present work we attempt to find the relations between these instabilities to determine whether a stable operating regime exists and further whether other modes of instability remain to be discovered. A previous investigation by Stringer [1] proceeds along the same lines as the present work but is based upon a set of macroscopic equations. Here we start more generally from the full set of Vlasov-Maxwell equations with the standard Fokker-Planck collision terms.

The particular equilibrium we consider is meant to be a model for a stellarator although it also may represent other sheared field devices. General arguments lead us to believe that low frequency instabilities are the most dangerous as far as producing rapid anomalous transport of plasma across the field. We therefore only consider these here.

The philosophy of the calculation consists of ordering the terms that appear in the equations in a single small dimensionless expansion parameter in such a way that the maximum number of physical effects is brought in to compete with one another. We will also see that certain characteristic features of the stellarator are built into the ordering.

A second point of philosophy concerning the calculation is that we consider the stability of equilibria as we raise β to higher and higher values. We also consider the limiting situations as we raise the temperature to higher and higher values so that the various collision frequencies decrease.

B. ORDERING

We assume the equilibrium state is the familiar plasma slab shown in Fig. 1 and define our basic expansion parameter

$$\epsilon \equiv R_L / L_1 \ll 1 \quad (1)$$

where R_L is the ion larmor radius and L_1 is the scale length for macroscopic gradients. The perturbations are assumed to be of the form

$$A(x) e^{-i\omega t + ik_y y + ik_z z} \quad (2)$$

and the wave number parallel to the magnetic field is

$$k_{||}(x) = k_z + \frac{B_y(x)}{B_z} k_y \quad (3)$$

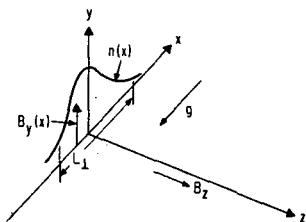


FIG. 1. Slab plasma model of equilibrium.

The ordering procedure is specified in terms of the characteristic frequencies for the various physical effects included in the model. These are:

1. Shear

The effect of shear appears through

$$\omega_{sh} \sim k_{||} v_A \quad (4)$$

where v_A is the Alfvén velocity.

2. Curvature

The curvature, R, of the stellarator fields is represented by the equivalent gravitational acceleration

$$g = v^2/R \quad (5)$$

and the frequency

$$\omega_g \sim \sqrt{gn'/n} , \quad n' = \frac{dn}{dx} . \quad (6)$$

3. Finite larmor radius

These effects are characterized by

$$\omega_F \sim k_y v_{pi} , \quad \left. \frac{v_{pi}}{v_{pe}} \right\} = \pm \frac{c}{eB} \frac{1}{n} \frac{d}{dx} nkT \quad (7)$$

where v_{pi} is the ion diamagnetic drift velocity.

4. Resonant particles

Resonance effects are given by

$$\omega_R \sim k_{||} v_e , \quad v_e = \sqrt{\frac{kT_e}{m}} \quad (8)$$

for the electrons with similar relations for the ions.

5. Electron inertia

These effects are frequency dependent and are given by

$$\omega_I \sim \frac{c^2 k_y^2}{\omega_{pe}^2} \omega \quad (9)$$

where ω_{pe} is the electron plasma frequency.

6. Resistivity

The effects of electron-ion collisions are given by

$$\omega_\eta \sim \eta c^2 k_y^2 \sim \frac{c^2 k_y^2}{\omega_{pe}^2} \nu_- \quad (10)$$

where ν_- is the electron-ion collision frequency.

7. Viscosity

Viscous effects appear through ion-ion collisions and are given by

$$\omega_V \sim \mu k_1^2 / nM , \quad \mu \sim nM \nu_+ v_i^2 / \Omega_i \quad (11)$$

where the viscosity coefficient μ is determined by the ion-ion collision frequency ν_+ and the ion cyclotron frequency Ω_i . Of course, we also have

$$\nu_+ \sim \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \nu_- . \quad (12)$$

We now go on to consider how the stellarator geometry is built into the ordering scheme. We first note that the stellarator [2] is characterized by sheared fields whose curvature to radius ratio is

$$\frac{L_{||}}{L_{\perp}} \sim \frac{R}{L_{\perp}} \sim \frac{1}{\delta^2} , \quad \delta \ll 1 \quad (13)$$

and whose shear is given by

$$\frac{B_y}{B_z} \sim \delta^2 . \quad (14)$$

From (13) and (14) the total rotational transform angle ι is of order unity since

$$\iota \sim \frac{B_y}{B_z} \frac{L_{||}}{L_{\perp}} . \quad (15)$$

The simplest requirement of hydromagnetic stability, namely, the shear stabilization of the curvature effects, yields

$$k_{||} v_A \sim \sqrt{g \frac{n'}{n}} . \quad (16)$$

We assume for the present $k_{||} \sim L_{||}^{-1}$ and use (3) and (5) in (16) to get the familiar result [2]

$$\beta \sim \delta^2 . \quad (17)$$

We also note that $k_{||} \sim L_{||}^{-1}$ requires

$$k_y R_L \sim \epsilon . \quad (18)$$

from (3). We now demand finite larmor radius stabilization and find that

$$k_{||} v_A \sim k_y v_{pi} \quad (19)$$

leads to

$$\delta \sim \epsilon . \quad (20)$$

At this point we remark that it is impossible to find a single ordering in ϵ which will bring in all the other physical effects in the above list and still maintain the stellarator requirements. This follows since there are not enough free parameters left to be determined. We also note that we assume v_A/c of order unity relative to ϵ throughout the calculation.

C. INERTIAL ORDERING

To demonstrate the method, we first consider a relatively simple problem in which we include electron inertia effects in addition to curvature, shear, and finite Larmor radius, but we neglect all other effects. We then require $\omega \sim \omega_L$ which leads to $m/M \sim 1$ relative to ϵ . Thus, for this case, $\beta \ll m/M$.

We then write the full set of equations and indicate the order in ϵ of each term.

$$\begin{aligned} & \epsilon^2 \quad \epsilon \quad \epsilon \quad \epsilon^3 \quad \epsilon \quad \epsilon \quad \epsilon \quad \epsilon^3 \\ & \frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{e}{M} (E_x \frac{\partial f}{\partial v_x} + E_y \frac{\partial f}{\partial v_y} + E_z \frac{\partial f}{\partial v_z}) \\ & - \Omega_i \frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{e}{Mc} [-v_z B_y \frac{\partial f}{\partial v_x} + v_z B_x \frac{\partial f}{\partial v_y} + (v_x B_y - v_y B_x) \frac{\partial f}{\partial v_z}] \\ & - g \frac{\partial f}{\partial v_x} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \epsilon^2 \quad \epsilon^2 \quad \epsilon^2 \\ & \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B_x \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \epsilon^2 \quad \epsilon^2 \quad \epsilon^2 \\ & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B_y \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & 1 \quad 1 \quad 1 \\ & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & 1 \quad \epsilon^4 \quad \epsilon \quad \epsilon^4 \\ & \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j_x + \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \epsilon^4 \quad 1 \quad \epsilon \quad \epsilon^4 \\ & \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} j_y + \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \epsilon^2 \quad \epsilon^2 \quad \epsilon \quad \epsilon^6 \\ & \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} j_z + \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{aligned} \quad (27)$$

All the symbols in (21) - (27) have their usual meanings and ϕ is the azimuthal angle in velocity space.

We now linearize these equations about the equilibrium state which is specified to be free of electric fields. In addition, the ions and electrons are assumed to be Maxwellian to lowest order in ϵ . After a good deal of calculation we find the perturbation equations

$$\begin{aligned} \omega^2 & \left[k_y^2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \rho \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v_A^2}{c^2} \left(k_y^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right] \psi \\ & - \omega k_y v_{pi} \left[k_y^2 - \frac{1}{p_{\perp}^2} \frac{\partial}{\partial x} (p_{\perp} \frac{\partial}{\partial x}) \right] \psi + g \frac{\rho}{\rho} k_y^2 \psi \\ & = v_A^2 \left[k_{\parallel} \left(k_y^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) X + X \frac{\partial^2 k_{\parallel}}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

and

$$\left(k_y^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) X - \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \left(1 - \frac{k_y v_{pe}}{\omega} \right) (k_{\parallel} \psi - X) + \frac{\partial^2 k_{\parallel}}{\partial x^2} \psi = 0. \quad (29)$$

We note from (25) and (26) that B_z is constant to lowest order in ϵ and thus from (24) we may write

$$E_{\perp} = - \nabla_{\perp} \psi \quad (30)$$

In addition we have defined

$$E_{\parallel} = i (X - k_{\parallel} \psi) \quad (31)$$

and

$$\rho = nM, \quad p_{\perp} = n\kappa T. \quad (32)$$

In the derivation of (28) and (29) we introduced a subsequent mass ratio expansion so that we require

$$\epsilon \ll \frac{m}{M} \ll 1. \quad (33)$$

We now eliminate X from (28) and (29) and get

$$\begin{aligned} & \left[\nabla_{\perp}^2 - \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \left(1 - \frac{k_y v_{pe}}{\omega} \right) \right] \left[\omega^2 \left(1 - \frac{k_y v_{pi}}{\omega} \right) \nabla_{\perp}^2 \psi + \omega^2 \left(\frac{\rho'}{\rho} - \frac{k_y v_{pi}}{\omega} \frac{p_{\perp}''}{p_{\perp}'} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right. \\ & \left. + \left(-g \frac{\rho'}{\rho} k_y^2 - k_{\parallel}'' v_A^2 + k_{\parallel}^2 v_A^2 \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \left(1 - \frac{k_y v_{pe}}{\omega} \right) \right) \psi \right] \left[v_A^2 \left(k_{\parallel} \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \left(1 - \frac{k_y v_{pe}}{\omega} \right) k_{\parallel}'' \right) \right]^{-1} \\ & + \left[\frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \left(1 - \frac{k_y v_{pe}}{\omega} \right) k_{\parallel} - k_{\parallel}'' \right] \psi = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

In order to simplify (34), we search for two types of solutions, those which are highly localized and those which are weakly localized in the x -direction. This search is aided by the size of the quantity

$$\frac{\omega_{pe}^2}{c^2 k_y^2} \sim \frac{\beta}{\epsilon^2} \frac{M}{m} \sim \bar{\beta} \frac{M}{m}, \quad \beta \equiv \bar{\beta} \epsilon^2. \quad (35)$$

If we assume $\bar{\beta} M/m$ to be large, we obtain from (34) the equation governing the weakly localized modes

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \left[1 - \frac{\omega^2}{k_{||}^2 v_A^2} \left(1 - \frac{k_y v_{pi}}{\omega} \right) \right] + \frac{\partial \psi}{\partial x} \left[\frac{2k_{||}'}{k_{||}} - \frac{\omega^2}{k_{||}^2 v_A^2} \left(\frac{\rho'}{\rho} - \frac{k_y v_{pi}}{\omega} \frac{p_{||}''}{p_{||}} \right) \right] \\ + \psi k_y^2 \left[\frac{\frac{g \rho'}{\rho} + \omega^2 \left(1 - \frac{k_y v_{pi}}{\omega} \right)}{v_A^2 k_{||}^2} - 1 \right] = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Equation (36) is identical to the equation treated by Kulsrud [3] and Stringer [4] for the shear and finite Larmor radius stabilization [5] of the interchange mode. The Suydam [6] type of analysis shows that this mode is stable if

$$4g \frac{\rho'}{\rho} \frac{k_y^2}{k_{||}^2 v_A^2} < 1 \quad (37)$$

in the absence of finite Larmor radius effects, and the results of Ref. [3] show that the stability is enhanced if they are included. We note that the Suydam analysis assumes that the modes are localized around the point where $k_{||}$ vanishes. However, one can show by variational arguments that if (37) is satisfied no instabilities of the kink or less localized type appear. This is a basic defect of the plane plasma models and is due to the improper treatment of curvature.

We now proceed to consider the highly localized solutions of (34) by assuming that the spatial variation of the perturbation is much more rapid than the variation of the equilibrium quantities. This procedure yields the equation

$$\nabla_1^2 \phi + \phi \left[\frac{-g \frac{\rho'}{\rho} k_y^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \left(1 - \frac{k_y v_{pe}}{\omega} \right) (k_{||}^2 v_A^2 - \omega^2 \left(1 - \frac{k_y v_{pi}}{\omega} \right))}{\omega^2 \left(1 - \frac{k_y v_{pi}}{\omega} \right)} \right] = 0 \quad (38)$$

where

$$\nabla_1^2 \psi = \phi. \quad (39)$$

In order that (38) be a valid approximation we require

$$\begin{aligned} k_1^2 \left[g \frac{\rho'}{\rho} k_y^2 + \left(k_{\parallel}^2 v_A^2 - \omega^2 \left(1 - \frac{k_y v_{pi}}{\omega} \right) \right) \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \left(1 - \frac{k_y v_{pe}}{\omega} \right) \right] \\ >> \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \left(1 - \frac{k_y v_{pe}}{\omega} \right) g \frac{\rho'}{\rho} k_y^2 . \end{aligned} \quad (40)$$

We further assume that the variation in the shear is more rapid than the variation in the other equilibrium quantities over the region of localization of the mode. We may thus write

$$k_{\parallel}(x) = k_{\parallel}(0)x \quad (41)$$

so that k_{\parallel} vanishes at $x = 0$. Equation (38) then becomes a Weber equation for which the eigenvalue equation is

$$\begin{aligned} \left[\left(1 + \frac{g \frac{\rho'}{\rho}}{\omega^2 \left(1 - \frac{k_y v_{pi}}{\omega} \right)} \right) + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2 k_y^2} \left(1 - \frac{k_y v_{pe}}{\omega} \right) \right]^2 \\ = - (2q+1)^2 \frac{\omega_{pe}^2}{c^2 k_y^2} \frac{\left(1 - \frac{k_y v_{pe}}{\omega} \right)}{\left(1 - \frac{k_y v_{pi}}{\omega} \right)} \frac{k_{\parallel}^2 v_A^2}{k_y^2 \omega^2} , \quad q = 0, 1, 2, \dots . \end{aligned} \quad (42)$$

We first consider the case in which g dominates in (42) and call this the inertial g mode. The condition (40) then yields

$$1 >> \frac{\omega_{pe}^2}{c^2 k_y^2} \left(1 - \frac{k_y v_{pe}}{\omega} \right) . \quad (43)$$

Thus, for low $\bar{\beta}$ situations (43) is satisfied easily while for high $\bar{\beta}$ we see that ω must be very closely equal to $k_y v_{pe}$. Since we wish to represent a cylindrical plasma, we have

$$g > 0, \frac{\rho'}{\rho} < 0, v_{pe} > 0, v_{pi} < 0 \quad (44)$$

and we assume $k_y > 0$.

When we solve (42) for small $\bar{\beta}$ we find instability. However, for large $\bar{\beta}$ we find the stability criterion

$$g \frac{\rho'}{\rho} \frac{ck_y}{\omega_{pe}} \frac{1}{k_{\parallel}^2 v_A} \frac{1}{v_{pe}} << 1 . \quad (45)$$

In the opposite limit in which g is negligible, which we term the inertial drift mode, we find that the system is stable. The criterion for g being negligible is, from (40)

$$k_{\parallel}^2 v_A^2 \gg g \frac{\rho'}{\rho} k_y^2 . \quad (46)$$

These results are in agreement with those of Coppi [7] and Stringer [1].

In obtaining these results it is not sufficient simply to examine the eigenvalue equation (42). In addition, one must examine the location of the anti-Stokes lines to insure that finite solutions actually exist.

D. RESONANT PARTICLE ORDERING

We now proceed to consider situations for which we increase β to become of order m/M while we keep all the other relations the same as in section C. This ordering forces $v_e \sim v_A$ and thus brings in the resonant frequency. After some calculation we find that (28) is unchanged but (29) is replaced by

$$(X - k_{\parallel} \psi) \left(\frac{ck}{\omega B k_{\parallel}} \frac{\partial n}{\partial x} + \int \frac{\left(\frac{e}{m} \frac{\partial F}{\partial v_z} - \frac{ck}{B k_{\parallel}} \frac{\partial F}{\partial x} \right) dv}{\omega - k_{\parallel} v_z} \right) = 0 . \quad (47)$$

This result agrees with Rudakov and Sagdeev [8] and can be justified for a shearless plasma as was shown by Mikhailovskii and Rudakov [9]. However, for the case of interest, (47) indicates that the mode has localized to such an extent that $k_x R_L \sim \epsilon$ is no longer valid. This is so because we have lost the derivative terms in (47) necessary to describe the spatial structure of the mode. The only acceptable solution of (47) is therefore

$$X = k_{\parallel} \psi . \quad (48)$$

Equation (48) tells us that E_{\parallel} vanishes so that we recover hydromagnetics. Upon substituting (48) in (28) we recover the interchange mode.

To proceed therefore, we must reorder the expansion with $k_x R_L \sim 1$. It can be demonstrated that any intermediate ordering between $k_x R_L \sim \epsilon$ and $k_x R_L \sim 1$ leads to the above-mentioned difficulty. We now require

$$\omega_{sh} \sim \omega_g \sim \omega_F \sim \omega_R \sim \omega_I . \quad (49)$$

It is important to note that this ordering cannot maintain the stellarator requirements since the equivalent curvature needed to satisfy (49) is of order $1/\epsilon^2$ bigger than the stellarator curvature. Thus, the stellarator curvature simply drops out of the equations for this case. However, in order to compare our results with those of Galeev [10] and Mikhailovskaya and Mikhailovskii [11], we will replace g/ϵ^2 by G in the equations with the understanding that it is to be dropped for the geometry of interest.

In this regime, the perturbations vary rapidly compared to the equilibrium quantities. Thus, we are instructed naturally to seek solutions of the W.K.B. form in the manner of Rukhadze and Silin [12] and Frieman and Rutherford [13]. To simplify the results we have subsequently assumed $k_y R_L \ll 1$. Thus we have

$$\epsilon \ll k_y R_L \ll 1 \quad (50)$$

and

$$\beta \sim \delta^2 \sim \epsilon^2 \sim m/M \quad (51)$$

The fourth order equation replacing (34) is now

$$\begin{aligned} & \left[\omega^2 (1 + v_A^2/c^2) - \omega k_y (G/\Omega_i) - \omega k_y v_{pi} \right] \nabla_\perp^2 \nabla_\perp^2 \psi \\ & - k_y^2 (G n'/n) \nabla_\perp^2 \psi \\ & - \frac{\omega^2 \omega_{pe}^2}{c^2 n k_{\parallel}} \left\{ \left[v_A^2 k_{\parallel}^2 (1 - k_y G/\omega \Omega_i) - \omega^2 (1 + v_A^2/c^2) + k_y (G \omega/\Omega_i) + k_y v_{pi} \omega \right] \nabla_\perp^2 \psi \right. \\ & \left. + k_y^2 (G n'/n) \psi \right\} \left\{ \int \frac{(\partial F/\partial v_z - (k_y v_z/\omega \Omega_e) \partial F/\partial x) dv}{\omega - k_{\parallel} v_z} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

and

$$\Omega_e = eB/mc \quad (53)$$

The result (52) is identical to Galeev's [10] Eq. (2.8) after some typographical errors have been corrected. We now examine (52) for highly and weakly localized modes and again find the drift and interchange modes. If we let β become small in the drift mode, we recover the results of section C. On the other hand, if we let β become large compared to m/M , we can assume that

$$\omega \ll k_{\parallel} v_e \quad (54)$$

and expand the resonant denominator in (52). We thus obtain the equation for the highly localized drift mode

$$\begin{aligned} & \nabla_\perp^2 \phi - \frac{1}{(\omega - k_y v_{pi})} \frac{1}{k_{\parallel}^2 v_A^2 R_L^2} \left\{ (\omega - k_y v_{pe}) + \frac{i\omega}{k_{\parallel} v_e} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\omega - k_y v_{pe}) \right\} \\ & \times \left\{ v_A^2 k_{\parallel}^2 - \omega^2 + k_y v_{pi} \omega \right\} \phi = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

We now use the method of Mikhailovskaya and Mikhailovskii [14] to determine the stability criterion for this mode. The method uses the W.K.B. procedure in the complex plane [15]. Thus, we find the dispersion equation

$$\begin{aligned} & \int_{z_1}^{z_2} dz \left\{ \frac{(\omega - k_y v_{pe})}{(\omega + k_y v_{pe})} \left[\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_A^2} (1 + \frac{k_y v_{pe}}{\omega}) - 1 \right] (1 + \frac{i\omega}{k_{\parallel} v_e} \sqrt{\frac{\pi}{2}}) - k_y^2 R_L^2 \right\}^{1/2} \\ & = R_L (n + 1/2) \pi \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (56)$$

where z_1 and z_2 are the complex turning points. The imaginary part of (56) is small, however, because of (54), so that we may assume the turning points to be real and search for the imaginary part of ω as a perturbation.

Following Ref. [14] we find the stability criterion by requiring that the real part of (56) allows no finite solutions. Thus, we rewrite (56) as

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\omega_R - k_y v_{pe}}{\omega_R + k_y v_{pe}} - \frac{1}{k_{\parallel}^2 v_A^2} \left(\omega_R + \frac{k_y v_{pe}}{2} + \sqrt{\left(\frac{k_y v_{pe}}{2}\right)^2 + k_{\parallel}^2 v_A^2} \right) \right. \\ \times \left. \left(\omega_R + \frac{k_y v_{pe}}{2} - \sqrt{\left(\frac{k_y v_{pe}}{2}\right)^2 + k_{\parallel}^2 v_A^2} \right) \right]^{1/2} dx = R_L (n + 1/2) \pi \quad (57)$$

in which we have neglected $k_y R_L$ compared to unity. Over the region of localization, which we assume to be small, both v_{pe} and k_{\parallel} can be assumed to vary linearly.

We now define

$$k_y v_{pe} = \omega_o(x_o) \left(1 - \frac{(x - x_o)}{L_1}\right) \quad (58)$$

and

$$\omega_1 = \frac{k_y v_{pe}}{2} - \sqrt{\left(\frac{k_y v_{pe}}{2}\right)^2 + k_{\parallel}^2 v_A^2} \quad (59)$$

The behavior of the integrand in (57) is shown in Fig. 2.

It is clear from Fig. 2 that as we raise $k_{\parallel}^2 x v_A$ relative to ω_o by increasing the shear, the turning points x_1 and x_2 move closer together and the region of localization of the mode tends to become smaller. We find that

$$\frac{x_2}{L_1} \sim \frac{\omega_o(0)}{k_{\parallel}^2 v_A L_1} \ll 1 \quad (60)$$

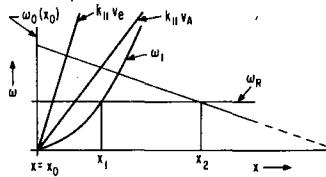


FIG. 2. Behaviour of integrand of Eq. (57).

and that the argument of the square root in (57) is of order x_2/L_1 . Thus the condition that no finite solution exists is

$$\left(\frac{x_2}{L_1}\right)^{1/2} \frac{x_2}{L_1} \ll \frac{R_L}{L_1} \quad (61)$$

or

$$\frac{k_{\parallel}^2 v_A L_1}{\omega_o} \gg \left(\frac{R_L}{L_1}\right)^{2/3} \quad (62)$$

We remark that the stabilization condition (62) requires much less shear than that given by Eq. (9) of Ref. [14]. The reason for this is that we are here stabilizing $\beta \lesssim m/M$ whereas Ref. [14] assumes $\beta \gg m/M$.

E. RESISTIVE AND VISCOSUS EFFECTS

We now go on to consider the effects of resistivity and viscosity on the basic two modes. We start with the Vlasov-Maxwell equations with the Fokker-Planck collision terms and order the expansion such that the resistive and viscous frequencies now compete with the shear, curvature, and finite Larmor radius effects. It is found that this requires

$$\epsilon \sim \delta \sim \beta^{1/2} \sim (m/M)^{1/4} \quad (63)$$

and

$$k_y R_L \sim \epsilon. \quad (64)$$

In addition we assume

$$\epsilon \ll v_A/c \ll 1. \quad (65)$$

With these assumptions we can show that the problem of deriving the basic equations follows the Chapman-Cowling technique. Thus, we need not recalculate any of the transport coefficients but at the appropriate point merely take over the results of Spitzer [16] and Braginskii [17]. We now find the equations

$$\begin{aligned} & \frac{i(\omega - k_y v_{pi})}{4\rho} \left[(k_y^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \mu (k_y^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}) - 4 k_y^2 \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial}{\partial x} \right] \psi \\ & + \omega (\omega - k_y v_{pi}) (k_y^2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \rho \frac{\partial}{\partial x}) \psi + k_y^2 g \frac{\rho'}{\rho} \psi \\ & = k_{||} v_A^2 (k_y^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}) X \end{aligned} \quad (66)$$

and

$$(k_y^2 - \partial^2/\partial x^2) X = - \frac{4\pi i}{\eta c^2} (\omega + k_y v_{pi}) (k_{||} \psi \cdot X) \quad (67)$$

where

$$\mu = 4n\kappa T \nu_i/\Omega_i^2 \quad (68)$$

is the viscosity coefficient. In deriving (66) and (67) we have assumed that the temperature is constant and that $j_{||}$ vanishes in equilibrium.

We now follow the work of Furth, Killeen and Rosenbluth [18], Johnson, Greene and Coppi [19], and Coppi [20] and investigate the resistive g mode and the tearing mode. We also investigate the resistive drift mode first pointed out by Mikhailovskii and Pogutse [21].

The resistive g mode results if we assume

$$\begin{aligned} \omega_g & \sim \omega_{sh} \\ \omega & \sim \omega_F \sim \lambda \omega_g \\ \omega_\eta & \sim \omega_V \sim \lambda^3 \omega_g \end{aligned} \quad (69)$$

where λ is a new expansion parameter

$$\epsilon \ll \lambda \ll 1 \quad (70)$$

and the width of the resistive layer is

$$x/L_1 \sim \lambda \quad (71)$$

about $k_{\parallel} = 0$. In terms of the original parameters this expansion can be written

$$\frac{\beta}{\delta^2} \sim 1, \quad \frac{\epsilon}{\delta} \sim \lambda, \quad \delta^2 \sim \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}, \quad \omega \sim \nu_- \frac{m}{M}. \quad (72)$$

We now further assume

$$\beta \ll \delta^2 \quad (73)$$

and find that (66) and (67) become

$$\begin{aligned} i(\omega - k_y v_{pi}) \frac{\mu}{4\rho} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - (\omega - k_y v_{pi}) \omega \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k_y^2 g \frac{\rho'}{\rho} \psi \\ = -ik_{\parallel}^2 x^2 v_A^2 \frac{\omega_{pe}^2}{c^2 \nu_-} (\omega + k_y v_{pi}) \psi. \end{aligned} \quad (74)$$

Now if

$$\delta^2 \ll \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \quad (75)$$

we can neglect the viscosity term in (74) and find that it reduces to a Weber equation. The eigenvalues are then given by

$$(\omega + k_y v_{pi}) \omega (\omega - k_y v_{pi}) = -i\nu_- \left[k_y^2 g \frac{\rho'}{\rho} \frac{c}{k_{\parallel}^2 v_A \omega_{pe}} \right]^2. \quad (76)$$

We now go on to our philosophy that we wish to investigate the behavior of the resistive modes as the temperature continues to increase. Thus, we assume that ν_- tends toward zero. In this limit (76) yields the unstable mode

$$\omega = \frac{i\nu_-}{(k_y v_{pi})^2} \left[k_y^2 g \frac{\rho'}{\rho} \frac{c}{k_{\parallel}^2 v_A \omega_{pe}} \right]^2. \quad (77)$$

The corresponding eigenfunction is

$$\psi \sim \exp \left[\frac{k_y^2 g \frac{\rho'}{\rho} x^2}{\omega^2 (1 - \frac{k_y v_{pi}}{\omega})} \right] \quad (78)$$

from which it can be seen with (77) that as ν_- tends to zero, rapid spatial oscillations occur. Thus, in this limit, the viscosity term is no longer negligible.

The effect of viscosity comes into play when

$$\frac{\nu_-}{k_y v_{pi}} \frac{m}{M} \sim \delta^2 \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} \quad (79)$$

and at this juncture we find that the width of the resistive layer is of order

$$\frac{x}{L_1} \sim \epsilon \left(\frac{M}{m} \right)^{1/4}. \quad (80)$$

Thus we see that viscosity dominates the g mode before the resistive layer becomes the order of an ion larmor radius in width.

To consider the effect of viscosity we look for localized solutions by the W.K.B. procedure. We first Fourier transform (74) and note that if localized solutions exist in k space, they will also exist in x space. The transform of (74) is

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial k_x^2} = \frac{\left[i \left(1 - \frac{k_y v_{pi}}{\omega} \right) \left(\frac{k_y^2 \mu}{4\rho\omega} \right) \frac{k_x^4}{k_y^4} + \left(1 - \frac{k_y v_{pi}}{\omega} \right) \frac{k_x^2}{k_y^2} + g \frac{\rho'}{\rho} \frac{1}{\omega^2} \right]}{\left[i \left(\frac{k_{||}^2 v_A^2}{\omega^2} \right) \left(\frac{\omega_{pe}^2}{c^2 k_y^2} \right) \frac{\omega}{v_-} \left(1 + \frac{k_y v_{pi}}{\omega} \right) \right]} \psi \quad (81)$$

Since we are interested in following the mode given by (77) we write $\omega = i\gamma$ and find the approximate turning points for the case when the viscosity effects are small to be

$$k_{x_1}^2 = -i g \frac{\rho'}{\rho} \frac{1}{\gamma k_y v_{pi}} k_y^2 \quad (82)$$

and

$$k_{x_2}^2 = -\frac{4\rho\gamma}{\mu}. \quad (83)$$

The turning points and anti-Stokes lines corresponding to this case are shown in Fig. 3. The mode AB (i.e., localized between the turning points A and B) is just that given by (77), and has γ real and positive. In an analysis which will be given elsewhere we have also considered the modes AC, BC, CD, etc., and have shown that no localized solutions of this type exist. When viscosity dominates the mode, the turning points A, B move toward the origin and, to lowest order, coalesce. In this case one looks for modes CD and finds that γ^3 is real and positive. The case where γ is real and positive is shown in Fig. 4 and these modes are not localized for real k_x and so are not allowed. The only localized solutions are damped and have $\arg \gamma = -2\pi/3$. The turning points and anti-Stokes lines for these damped modes are shown in Fig. 5. The stabilization criterion for this mode is

$$1 >> \delta^2 \sqrt{\frac{M}{m}} >> \frac{\nu_-}{\Omega_i} \frac{m}{M} \left(\frac{L_1}{R_L} \right)^2 \quad (84)$$

when we assume $T_e \cong T_i$.

We now go on to examine the less localized tearing modes following the procedure of Ref. [20]. The new ordering in λ is

$$\omega_g / \omega_{sh} \sim \sqrt{\lambda}, \quad \omega \sim \omega \sim \lambda \omega_g, \quad \omega_\eta \sim \lambda^2 \omega_g, \quad \omega_V \sim \lambda^3 \omega_g \quad (85)$$

and again

$$x/L_1 \sim \lambda \quad (86)$$

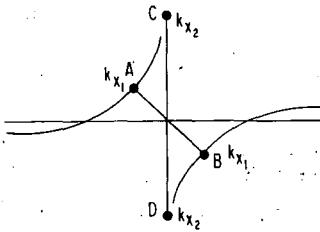
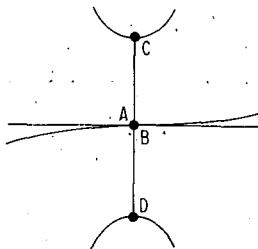
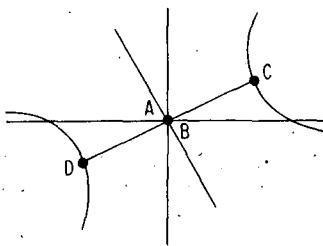


FIG. 3. Turning points and anti-Stokes lines for negligible viscosity.

FIG. 4. Turning points and anti-Stokes lines in the case in which viscosity dominates and γ is real and positive.FIG. 5. Turning points and anti-Stokes lines in the case in which viscosity dominates and $\arg \gamma = -2\pi/3$ (damped modes).

Under the action of this expansion we find that (66) becomes

$$\begin{aligned} i \frac{(\omega - k_y v_{pi})}{4\rho} \mu \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - (\omega - k_y v_{pi}) \omega \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k_y^2 g \frac{\rho}{\rho} \psi \\ = - \frac{4\pi i}{\eta c^2} (\omega + k_y v_{pi}) k_{||}^1 x v_A^2 (k_{||}^1 x \psi - \chi) \end{aligned} \quad (87)$$

and (67) yields

$$\frac{\partial^2 \chi^{(0)}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \chi^{(1)}}{\partial x^2} = - \frac{4\pi i (\omega + k_y v_{pi})}{\eta c^2} (k_{||}^1 x \psi - \chi) \quad (88)$$

We again assume that $\delta^2 \ll (m/M)^{1/2}$ and drop the viscosity term, and we also assume that g vanishes in the resistive layer since the g mode was treated previously. In this case one must match the solutions in the layer

to those in the outer region. This procedure is fully treated in Ref. [20] so that we do not repeat it here. We find that for

$$\nu_- / k_y v_{pi} \gg M/m \quad (89)$$

the mode is unstable with

$$\frac{\omega - k_y v_{pi}}{k_y v_{pi}} \sim i \left(\frac{\nu_-}{k_y v_{pe}} \frac{m}{M} \right)^{3/5} \quad (90)$$

However, as we go to the high temperature limit which corresponds to the reversal of the inequality (89) we find the roots

$$\omega - k_y v_{pi} \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow 0, \quad \omega + k_y v_{pi} \rightarrow 0 \text{ (triple root)} \quad (91)$$

We also find that all five roots (91) are not allowed by the matching analysis. In fact, the only allowed root is the stable one.

$$\frac{\omega + k_y v_{pi}}{k_y v_{pi}} \sim -i \left(\frac{\nu_-}{k_y v_{pe}} \frac{m}{M} \right)^{1/5} \quad (92)$$

A further point worth noting is that, unlike the resistive g mode, the tearing mode retains a fixed width as ν_- tends to zero so that viscosity continues to play no role.

We now go on to examine the resistive drift mode. We return to (66) and (67) and neglect the viscosity and g terms and assume highly localized perturbations. The result of this procedure is

$$\nabla_\perp^2 \phi + \phi \left[\frac{\omega_{pe}^2}{c^2 \nu_-} \frac{i(1 - \frac{k_y pe}{\omega})}{\omega(1 + \frac{k_y pe}{\omega})} (\omega^2 (1 + \frac{k_y pe}{\omega}) - k_\parallel^2 v_A^2) \right] = 0. \quad (93)$$

We treat this in the same fashion as we treated (38) and find the eigenvalue equation

$$(\omega - k_y v_{pe}) \omega (\omega + k_y v_{pe}) = -ik_\parallel^2 v_A^2 \frac{c^2 \nu_-^2}{\omega_{pe}^2}. \quad (94)$$

For low temperatures we obtain from (94)

$$\omega^3 = -ik_\parallel^2 v_A^2 \frac{c^2 \nu_-^2}{\omega_{pe}^2} \quad (95)$$

which yields three roots. The only root which corresponds to an instability is

$$\omega' = i (k_\parallel^2 v_A^2 \frac{c^2 \nu_-^2}{\omega_{pe}^2})^{1/3}. \quad (96)$$

As we proceed to higher temperatures the unstable root is given by

$$\omega = ik_\parallel^2 v_A^2 \frac{c^2 \nu_-^2}{\omega_{pe}^2} \frac{1}{(k_y v_{pe})^2}. \quad (97)$$

However, a check of the anti-Stokes lines shows that neither (96) nor (97) is an allowed result.

As we decrease ν_- still further, our equations break down when $\omega \nu_- \sim k_{\parallel}^2 v_e^2$. We shall show in the next section that when this occurs the replacement

$$-i\nu_- \rightarrow -i\nu_- + \frac{k_{\parallel}^2 v_e^2}{\omega} \quad (98)$$

should be made. Equation (93) then becomes

$$\nabla_1^2 \phi + \phi \left[\frac{\omega_{pe}^2}{c^2} - \frac{(1 - \frac{k_y v_{pe}}{\omega})}{(-i\nu_- + \frac{k_{\parallel}^2 v_e^2}{\omega})} - \frac{\left(\omega^2 (1 + \frac{k_y v_{pe}}{\omega}) - k_{\parallel}^2 v_A^2 \right)}{\omega (1 + \frac{k_y v_{pe}}{\omega})} \right] = 0. \quad (99)$$

We next note that if ν_- is decreased still further, (99) and (55) become identical except for the small imaginary parts. Thus, in this limit the stability criterion (62) applies.

F. RESISTIVE AND RESONANT PARTICLE ORDERING

We now go on to consider briefly the case in which we include all effects with the exception of viscosity. The object is to show again the relation between the various modes. To this end we use the Krook [22] model rather than the full Fokker-Planck terms in the interest of simplicity. The general fourth order equation is in this case

$$\begin{aligned} & \left[\omega (1 + v_A^2/c^2) - \frac{k_y G}{\Omega_i} - k_y v_{pi} \right] \frac{1}{\omega} \nabla_1^2 \nabla_1^2 \psi \\ & - k_y^2 G \frac{n'}{n} \frac{\nabla_1^2 \psi}{\omega^2} \\ & + \left\{ \left[v_A^2 k_{\parallel}^2 (1 - \frac{k_y G}{\omega \Omega_i}) - \omega^2 (1 + \frac{v_A^2}{c^2}) + \frac{k_y G \omega}{\Omega_i} + k_y v_{pi} \omega \right] \nabla_1^2 \psi \right. \\ & \left. + k_y^2 G \frac{n'}{n} \psi \right\} \\ & \times \frac{i \omega_{pe}^2}{n k_{\parallel}^2 c^2} \frac{\int \frac{\frac{\partial F}{\partial v_z} - \frac{k_y v_z}{\omega \Omega_e} \frac{\partial F}{\partial \epsilon_x}}{\nu_- - i \omega + i k_{\parallel} v_z} dv}{1 - \frac{v}{n} \int \frac{F}{\nu_- - i \omega + i k_{\parallel} v_z} dv} = 0. \quad (100) \end{aligned}$$

We then find that when $v_- >> k_{||} v_e$, (100) becomes

$$\left[\omega \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \right) - \frac{k_y G}{\Omega_i} - k_y v_{pi} \right] \left[v_A^2 k_{||}^2 R_L^2 - \frac{i \eta c^2 \omega}{4\pi} \right] \nabla_1^2 \nabla_1^2 \psi \\ - k_y^2 G \frac{n'}{n} \frac{1}{\omega} \nabla_1^2 \psi \left[v_A^2 k_{||}^2 R_L^2 - \frac{i \eta c^2 \omega}{4\pi} \right] \\ - \left\{ \omega \left(1 - \frac{k_y v_{pe}}{\omega} \right) \right\} \left\{ \left[v_A^2 k_{||}^2 \left(1 - \frac{k_y G}{\omega \Omega_i} \right) - \omega^2 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + k_y \frac{G \omega}{\Omega_i} + \omega k_y v_{pi} \right] \nabla_1^2 \psi + k_y^2 G \frac{n'}{n} \psi \right\} = 0 \quad (101)$$

We immediately see from (101) that the result (98) obtains.

If we expand (100) for the case $k_{||} v_e >> v_- \sim \omega$, we find

$$v_A^2 k_{||}^2 R_L^2 \left\{ 1 - \frac{v_-}{k_{||} v_e} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right\} \left\{ \omega \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \right) - \frac{k_y G}{\Omega_i} - k_y v_{pi} \right\} \nabla_1^2 \nabla_1^2 \psi \\ - v_A^2 k_{||}^2 R_L^2 \frac{k_y^2}{\omega} G \frac{n'}{n} \left\{ 1 - \frac{v_-}{k_{||} v_e} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right\} \nabla_1^2 \psi \\ - \left\{ \omega - k_y v_{pe} + \frac{(i\omega - v_-)}{k_{||} v_e} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\omega - k_y v_{pe}) \right\} \\ \times \left\{ \left[v_A^2 k_{||}^2 \left(1 - \frac{k_y G}{\omega \Omega_i} \right) - \omega^2 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \right) + \frac{k_y G \omega}{\Omega_i} + k_y v_{pi} \omega \right] \nabla_1^2 \psi \right. \\ \left. + k_y^2 G \frac{n'}{n} \psi \right\} = 0 \quad (102)$$

from which we obtain our earlier results as $v_- \rightarrow 0$.

G. CONCLUSIONS

From the above results we emerge with a general picture of the various types of instability which can occur in the stellarator geometry. We see that there are basically two modes which occur in all circumstances. These are the shear Alfvén mode and the drift mode. We further note that the Alfvén mode tends not to become as highly localized as the drift mode and is more easily destabilized by the various effects which create a parallel electric field, namely, electron inertia, parallel pressure gradients, and resistivity. On the other hand, we see that the drift mode can be localized and stabilized by shear, but as β increases, the amount of shear required also increases.

In summary we see that it is possible to stabilize all modes in this model of the stellarator with sufficient shear and high enough temperature.

ACKNOWLEDGMENT

We wish to thank Drs. John M. Greene and T. E. Stringer for many helpful and illuminating discussions on various phases of this work.

Work accomplished under auspices of the U.S. Atomic Energy Commission.

REFERENCES

- [1] STRINGER, T. E., Princeton University Plasma Physics Laboratory Report MATT-320 (1965).
- [2] JOHNSON, J. L., OBERMAN, C. R., KULSRUD, R. M., and FRIEMAN, E. A., Phys. Fluids 1, 281 (1958).
- [3] KULSRUD, R. M., Phys. Fluids 6, 904 (1963).
- [4] STRINGER, T. E., Princeton University Plasma Physics Laboratory Report MATT-289 (1964).
- [5] ROSENBLUTH, M. N., KRALL, N. A., and ROSTOKER, N., Nucl. Fusion Suppl. Pt. 1, 143 (1962).
- [6] SUYDAM, B. R., Progr. Nucl. Energy 1, 463 (1959).
- [7] COPPI, B., Phys. Rev. Letters 11, 226 (1964); ibid. 12, 213 (1964).
- [8] RUDAKOV, L. I., SAGDEEV, R. Z., Nucl. Fusion Suppl. Pt. 2, 481 (1962).
- [9] MIKHAILOVSKII, A. B., and RUDAKOV, L. I., JETP 44, 912 (1963), Soviet Physics—JETP 17, 621 (1963).
- [10] GALEEV, A. A., JETP 44, 1920 (1963), Soviet Physics—JETP 17, 1292 (1963).
- [11] MIKHAILOVSKAYA, L. V., and MIKHAILOVSKII, A. B., Nucl. Fusion 3, 113 (1963).
- [12] RUKHADZE, A. A., and SILIN, V. P., UFN 82, 499 (1964), Soviet Physics—Usp. 7, 209 (1964).
- [13] FRIEMAN, E., and RUTHERFORD, P., Bull. Am. Phys. Soc. 9, 319 (1964).
- [14] MIKHAILOVSKAYA, L. V., and MIKHAILOVSKII, A. B., Nucl. Fusion 3, 28 (1963).
- [15] HEADING, J., An Introduction to Phase-Integral Methods (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1962).
- [16] COHEN, R. S., SPITZER, L., Jr., and ROUTLY, P. McR., Phys. Rev. 80, 230 (1950).

- [17] BRAGINSKII, S. I., JETP 33, 459 (1957), Soviet Physics—JETP 6, 358 (1958).
- [18] FURTH, H. P., KILLEEN, J., and ROSENBLUTH, M. N., Phys. Fluids 6, 459 (1963).
- [19] JOHNSON, J. L., GREENE, J. M., and COPPI, B., Phys. Fluids 6, 1169 (1963).
- [20] COPPI, B., Phys. Fluids 7, 1501 (1964).
- [21] MIKHAILOVSKII, A. B., and POGUTSE, O. P., DAN SSSR 156, 64 (1964), Soviet Physics—Doklady 9, 379 (1964).
- [22] BHATNAGAR, P. L., GROSS, E. P., and KROOK, M., Phys. Rev. 94, 511 (1954).

DISCUSSION

N. A. KRALL: In what way does the ordering scheme you consider exclude the experiment described by Dr. Furth*, in which he found that shear helped to some extent, but that a larger increase in shear had no effect. Is that a reason for tempering our optimism?

E. A. FRIEMAN: The mathematical expansion used applies to the stellarator and I therefore cannot answer your question directly, since I do not know whether the Levitron fits this expansion.

B. COPPI: In answer to Dr. Krall's question I should like to say that we have considered numerically a case corresponding to Dr. Furth's experiment, but we found that the stability depended critically on the ratio T_i/T_e which could not be specified by his experiment. Therefore, I find it difficult to accept the conclusion that shear is ineffective in bringing about stabilization. With regard to Dr. Frieman's presentation, I should like to remark that I am not sure that the effect of ion-ion collisions is as important for the tearing mode as for the g mode. In the tearing mode and in the absence of ion-ion collisions the radial wavelength of the perturbation does not go to zero when ν_{ei} approaches 0, whereas it does in the g mode.

H. D. FURTH: I agree with Dr. Coppi that the Levitron experimental results do not contradict his theory in any absolute sense, because our parameters are not sufficiently well known. However, our observation of a lack of sensitivity to shear in the strong-shear limit seems to me to be difficult to reconcile with the theory of the resistive-interchange mode in any parameter range.

B. COPPI: In view of the strong magnetic curvature, it is likely that the Levitron experiment did not have sufficient shear to be above the threshold for stability. With regard to the lack of sensitivity to variations

* These proceedings (CN-21/90)

in shear by an order of magnitude under the threshold, it is to be recalled that what is observed is the non-linear phase of the instability. In this regime it is difficult to detect a variation in the growth rate which, as indicated by some numerical computations, may not be as large.

COLLISIONAL INTERCHANGE INSTABILITIES IN SHEAR AND $\int dl/B$ STABILIZED SYSTEMS

B. COPPI

UNIVERSITY OF CALIFORNIA,

SAN DIEGO, CALIF., UNITED STATES OF AMERICA

AND

M. N. ROSENBLUTH

GENERAL ATOMIC DIVISION, GENERAL DYNAMICS CORPORATION,

SAN DIEGO, CALIF., AND

UNIVERSITY OF CALIFORNIA (SAN DIEGO)

LA JOLLA, CALIF., UNITED STATES OF AMERICA

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

COLLISIONAL INTERCHANGE INSTABILITIES IN SHEAR AND $\int dl/B$ STABILIZED SYSTEMS. The stability analysis of systems possessing shear or $\int dl/B$ stabilization, or both, is performed starting from the Vlasov equation with a Krook collision operator and including the relevant microscopic effects. Configurations of the first type are found to be stable in the collisionless regime against modes due to electron inertia if a sufficient amount of shear is present. Then instability exists only in the presence of electron-ion collisions. The instability persists, as long as the effects of ion-ion collisions are neglected, through the regime where the radial wavelength μ is small compared with the ion Larmor radius a , with the same growth rate as found for $\mu > a$ and relatively high temperature. However, the influence of ion-ion collisions is shown to be important as soon as the growth rate is of the order of the diffusion damping $v_{ii}(a/\mu)^2$ and leads to stability if a sufficient shear is present. Conversely, configurations which are $\int dl/B$ stable but have no shear, exhibit unstable waves in the presence of collisions: at high temperatures the drift wave, with wavelength along the field corresponding to the periodicity $1/L_R$ of the field curvature, and a gravitational-interchange wave modified by finite Larmor radius effects. The former wave is unstable for longer transverse wavelengths and for proper values of these it resonates with the latter. The resonant mode has growth rate proportional to $T^{-\frac{1}{2}}$, T being the temperature, and is only slightly affected by the ion-ion collisions, but it is expected to be stabilized by ion Landau damping of $E_R^2 \lesssim r R_c$, r being the density scale length and R_c the maximum radius of magnetic curvature. At low temperatures, where finite Larmor radius effects are not important, the drift wave is replaced by the sound wave along the lines of force, but the transition to the interchange wave no longer depends on the transverse wavelength. In a system with both $\int dl/B$ and shear stabilization, these waves no longer exist as pure normal modes; the conditions under which they disappear are given. The conclusion is that, although at high temperatures systems with only shear can be stable, configurations with both V and shear stabilization become stable under much less restrictive conditions; for example, less shear, lower temperature rate, etc. The existence of a new collisional instability in a system with favourable curvature and shear is finally pointed out.

INSTABILITES D'INTERCHANGE DUES AUX COLLISIONS DANS DES DISPOSITIFS STABILISES PAR CROISEMENT DE LIGNES DE CHAMP ET PAR VARIATION DE $\int dl/B$. Les auteurs étudient la stabilité de dispositifs stabilisés au moyen d'un croisement de lignes de champ (1^{er} type), d'une variation de $\int dl/B$ (2^e type) ou par ces deux moyens (3^e type), en partant de l'équation de Vlasov avec un opérateur collisionnel de Krook et en y comprenant les effets microscopiques importants. Ils constatent que les dispositifs du premier type, dans le régime sans collision, sont stables vis-à-vis des modes dus à l'inertie des électrons si le croisement est suffisant. Ensuite, l'instabilité n'existe qu'en présence de collisions électrons-ions. L'instabilité persiste aussi longtemps que l'on néglige les effets des collisions ions-ions, grâce au régime dans lequel la longueur d'onde radiale μ est petite par rapport au rayon de Larmor des ions a , la vitesse de croissance étant la même que pour $\mu > a$ et une température assez élevée. Toutefois, les auteurs montrent que l'influence des collisions

ions-ions est importante aussi tôt que la vitesse de croissance atteint l'ordre de l'amortissement de diffusion $v_{ii}(a/\mu)^2$, et stabilise le dispositif si le croisement est suffisant. En revanche, les dispositifs du deuxième type présentent des ondes instables en présence de collisions: à haute température, l'onde de dérive, avec une longueur d'onde le long du champ correspondant à la périodicité $1/L_R$ de la courbure du champ, et une onde d'interchange gravitationnelle modifiée par des effets du rayon de Larmor fini. La première onde est instable pour des longueurs d'onde transverses plus grandes et, pour des valeurs propres de ces longueurs, elle entre en résonance avec la seconde onde. La vitesse de croissance du mode résonant est proportionnelle à $T^{-\frac{1}{2}}$, T étant la température; ce mode n'est que faiblement modifié par les collisions ions-ions, mais on s'attend qu'il soit stabilisé par l'amortissement de Landau des ions si $L_R^2 \lesssim rR_c$, r étant la grandeur caractéristique de la densité et R_c le rayon de courbure magnétique maximum. Aux basses températures, où les effets du rayon de Larmor des ions ne sont pas importants, l'onde de ligne de champ est remplacée par l'onde sonore le long des lignes de force, mais la transition vers l'onde d'interchange ne dépend pas de la longueur d'onde transverse. Dans un dispositif du troisième type, ces ondes n'existent pas en tant que modes normaux purs; les auteurs indiquent les conditions dans lesquelles ces ondes disparaissent. Ils concluent que si les dispositifs du premier type peuvent être stables à haute température, les dispositifs du troisième type le deviennent dans des conditions beaucoup plus faciles à obtenir, par exemple un croisement moins important, une température moins élevée, etc. Pour terminer, ils signalent l'existence d'une nouvelle instabilité collisionnelle dans un dispositif où la courbure et la croisement sont favorables.

КОЛЛИЗИОННЫЕ ОБМЕННЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМАХ СТАБИЛИЗИРОВАННЫХ "ШИРОМ" И СПОСОБОМ $\int dl/B$. Анализ устойчивости систем, обладающих стабилизацией "широм" или $\int dl/B$ в стабилизацией или той и другой, проводится, начиная от уравнения Власова с оператором столкновений Крука и включая соответствующие микроскопические эффекты. Установлено, что конфигурации первого типа устойчивы в бесколлизионном режиме по сравнению с модами, вызываемыми инерцией электронов, если имеется достаточное количество "шира". Затем неустойчивость существует лишь при наличии столкновений ион-ион. Неустойчивость сохраняется, пока пренебрегают влиянием столкновений ион-ион, в режиме, где длина радиальной волны μ мала по сравнению с ларморовским радиусом иона a , с той же скоростью увеличения, как установлено для $\mu > a$ и относительно высокой температурой. Показано, однако, что влияние столкновений ион-ион важно постольку, поскольку скорость увеличения находится в пределах порядка затухания диффузии $v_{ii} (a/\mu)^2$ и ведет к устойчивости, если имеется достаточный "шир". Наоборот, конфигурации, которые обладают устойчивостью $\int dl/B$, но не имеют "шира", демонстрируют неустойчивые волны при наличии столкновений: при высоких температурах дрейфовую волну с длиной волны вдоль поля, которая соответствует частоте $1/L_p$ кривизны поля, и гравитационно-обменной волны, модифицированной влиянием конечного ларморовского радиуса. Первая волна неустойчива для большей длины поперечной волны и при соответствующих величинах ее она резонирует с последней. Мода резонанса имеет скорость увеличения, пропорциональную $T^{-\frac{1}{2}}$, где T — температура, и столкновения ион-ион оказывают на нее лишь слабое действие, но ожидается, что она стабилизируется ионным затуханием Ландау, если $L_R^2 < rR_c$, где r — длина шкалы плотности и R_c — максимальный радиус магнитной кривизны. При низких температурах, где влияния конечного ларморовского радиуса не играют роли, дрейфовая волна замещается звуковой волной вдоль силовых линий, однако переход к обменной волне больше не зависит от длины поперечной волны. В системе с $\int dl/B$ и "шир" — стабилизацией эти волны больше не существуют как чистые нормальные моды; даются условия, при которых они исчезают. Вывод состоит в том, что хотя при высоких температурах системы только с "широм" могут быть устойчивыми, конфигурации с V'' и "шир" — стабилизацией становятся устойчивыми при гораздо менее ограничительных условиях; т.е. при меньшем "шире", более низкой интенсивности температуры и т.д. В заключение подчеркивается существование новой коллизионной неустойчивости в системе с благоприятной кривизной и "широм".

INESTABILIDADES DE INTERCAMBIO CON COLISIONES EN SISTEMAS ESTABILIZADOS POR CIZALLAMIENTO Y POR $\int dl/B$. Los autores analizan el caso de los sistemas estabilizados por cizallamiento o por $\int dl/B$ o con ambos, partiendo de la ecuación de Vlasov con un operador de Krook para las colisiones e incluyendo los efectos microscópicos correspondientes. Llegan a la conclusión de que las configuraciones de primer tipo son estables en el régimen sin colisiones frente a los modos originados por la inercia electrónica, siempre que haya un grado suficiente de cizallamiento. Es decir, la inestabilidad se observa solamente en presencia de las colisiones electrón-ion. La inestabilidad persiste, prescindiendo de los efectos de los choques ion-ion, en el régimen en que la longitud de onda radial μ es reducida en comparación con el radio iónico

de Larmor a, con la misma velocidad de crecimiento que en el caso de $\mu > a$ y temperatura relativamente elevada. Sin embargo, los autores demuestran que los efectos de los choques entre iones adquieren importancia tan pronto como la velocidad de crecimiento es del orden del amortiguamiento por difusión $v_{ii}(a/\mu)^2$ y origina estabilidad si el grado de cizallamiento es suficiente. Recíprocamente, las configuraciones con $\int dl/B$ estable pero sin cizallamiento presentan ondas inestables en presencia de colisiones; a temperaturas elevadas, se observan ondas de deriva, cuya longitud corresponde a la periodicidad $1/L_R$ de la curvatura del campo, y una onda de intercambio-gravitación modificada por los efectos del radio finito de Larmor. La primera es inestable para grandes longitudes de onda transversal y, a determinados valores de éstas, entra en resonancia con la segunda. El modo de resonancia tiene una velocidad de crecimiento proporcional a $T^{-\frac{1}{2}}$, siendo T la temperatura, y sólo resulta ligeramente afectado por los choques entre iones, pero se prevé que será estabilizado por el amortiguamiento iónico de Landau si $L_R \lesssim R_C$, siendo r la longitud de la escala de densidades y R_C el radio máximo de curvatura magnética. A temperaturas bajas, en que los efectos del radio finito de Larmor carecen de importancia, la onda de deriva es sustituida por la onda acústica a lo largo de las líneas de fuerza; pero la transición a la onda de intercambio ya no depende de la longitud de onda transversal. En un sistema estabilizado por cizallamiento y por $\int dl/B$ estas ondas dejan de existir como modos normales puros; se indica las condiciones en que desaparecen. La conclusión es que, si bien a temperaturas elevadas pueden ser estables los sistemas que sólo tengan cizallamiento, las configuraciones con estabilización «V» y por cizallamiento son estables en condiciones mucho menos restrictivas, por ejemplo, menor cizallamiento, variación de temperatura más reducida, etc. Por último, se señala la existencia de una nueva inestabilidad de colisión en un sistema con curvatura y cizallamiento favorables.

INTRODUCTION

The aim of the present work is to provide a consistent theory of the stability of a low pressure confined plasma, considering the effects of interparticle collisions [1,2]. The particular objective is to analyze the stability of equilibrium configurations which in the collisionless hydromagnetic limit are stabilized either by shear [3] or in an average sense ($\int dl/B$ stable [4]). The approach we use is rather general and can be used to treat different types of instability and see their mutual relations, but we concentrate on the interchange-type modes which are not found in the collisionless hydromagnetic limit.

At low β we may limit ourselves to electrostatic modes, or the equivalent "quasi-modes" [5], which are driven by a local pressure gradient in the direction of the magnetic field curvature.

In Section II we discuss the equilibrium state for our idealized problem, and in Section IIb we discuss the techniques for performing the linearized stability analysis using the Vlasov equation with a Krook collision operator. In Section III shear-stabilized, i.e., "V" unstable, systems are analyzed neglecting ion-ion collisions. The equations are solved analytically for the regime where the radial wavelength of the perturbation remains large compared to the ion gyro-radius, and numerically when this condition is violated. We have displayed the analysis in some detail in Sections II and III while in subsequent sections for reasons of brevity we display in detail only the novel features of the analysis omitting those steps which are the same as in II and III. In Section IV the stabilizing effect of ion-ion collisions on these equilibria is considered. In Section V we turn our attention to systems with variable field curvature, i.e., negative "V" systems, in the shear-free case and finally in Section VI we discuss the stabilizing effects of shear in these cases. In Section VII the results and conclusions are summarized. In the appendix, a new collisional instability, arising in the presence of favorable curvature and shear, is analyzed. A glossary of symbols is provided at the end.

I. THE EQUILIBRIUM

As a model of a system possessing shear and $\int dl/B$ stability, we consider a one-dimensional plasma layer, perpendicular to the x-direction where the magnetic

field, in a set of local coordinates, is represented by

$$\mathbf{B} = B_0 \left(1 - \frac{x}{R_{oc}(\zeta)} \right) \mathbf{e}_z + B_0 \frac{x}{L_s} \mathbf{e}_y \quad (1)$$

As we treat a low β system, we neglect diamagnetic effects and imagine these field changes, so simulating the vacuum magnetic field of external windings.

Precisely $B_0 x / L_s$ represents the "shear", $B_0 (1 - x/R_0(\zeta))$ the main magnetic field and its curvature variation, where ζ is a linear coordinate along the magnetic field line. The $\int d\ell/B$ configuration is represented by the profile [4]

$$\frac{1}{R_0(\zeta)} = \frac{1}{R_c} (\cos \left[\frac{2}{L_R} \zeta - h \right]),$$

where $0 < h < 1$. Then, if we define $r = -(d \ln n/dx)^{-1}$, where $n(x)$ is the particle density, the usual ordering of parameters will be $x \lesssim r < L_R < R_c < L_s$. Introducing the set of rotating coordinates $e_\zeta = B/B$, e_x , and $e_y = e_\zeta \times e_x$, we have in lowest order

$$x = y - \frac{x}{L_s} z, \quad \text{and} \quad \zeta = z + \frac{x}{L_s} y.$$

We shall disregard effects due to temperature gradients and anisotropies, and consider $(m/M)^{1/2} < \tau < (M/m)^{1/2}$, where $\tau = T_e/T_i$, T_e and T_i are the electron and ion temperature respectively, and m and M the electron and ion masses.

We describe the system by the kinetic equation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}}. \quad (2)$$

The collision operator is assumed to be of the form [6]

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{coll}} = - v (f - f_L)$$

where v is an effective collision frequency, and f_L a distribution of relaxation (locally Maxwellian) determined in such a way that conserves the number of particles and the total momentum of the system. We assume that, for all species j , $v_j < \Omega_j$, where Ω_j is the gyration frequency, and define the equilibrium over a time scale shorter than the mass diffusion time. The equilibrium is then described by

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f_{0j} + \frac{e_j}{m_j} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{0j} = 0. \quad (3)$$

We choose a suitable f_{0j} close to thermal equilibrium [7]

$$f_{0j} = \left(\frac{\alpha_j}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\alpha_j v^2} \left[1 - \frac{1}{h_j} \left(x + \frac{v_y}{\Omega_j} \right) + 2 \frac{x}{R_c} \right]$$

where $\alpha_j = (v_{\text{thermal},j})^{-2}$ and we have only included the largest terms in the expansion. The condition for charge neutrality implies that

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_i} - \frac{2}{R_c} = \frac{1}{h_e} - \frac{2}{R_c}.$$

Then, having assumed $E_0 = 0$, ions and electrons have a diamagnetic velocity indicated respectively by $v_i = -(2\Omega_i \alpha_i h_i)^{-1}$ and $v_e = -(2\Omega_e \alpha_e h_e)^{-1}$. Moreover, tak-

ing a moment of Eq. (3), we have in lowest order

$$-\frac{dn}{dx} (T_e + T_i) + J_y B_0 = 0$$

where J_y is the diamagnetic current. Clearly we have assumed $\beta = 2n(T_e+T_i)/B_0^2 \ll 1$, and $a_e, a_i < r$ where a_e and a_i are the electron and ion Larmor radius respectively.

II. THE STABILITY

We consider a small perturbation from equilibrium so that $f = f_0 + \hat{f}$ with $\hat{f}/f_0 \ll 1$. Dealing with a low β system we limit the analysis to electrostatic perturbations [2], so that

$$\mathbf{E} = -\nabla \hat{\phi}, \quad (4)$$

$$-\nabla^2 \hat{\phi} = \sum_j e_j \int \hat{f}_j d^3 v. \quad (5)$$

Then, the linearized perturbed kinetic equation is

$$\frac{\partial \hat{f}_j}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \hat{f}_j + \frac{e}{m} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v \hat{f}_j = + \frac{e_j}{m_j} \nabla \hat{\phi} \cdot \nabla_v f_0 - v_j \hat{f}_j + v_j \hat{f}_{Lj} \quad (6)$$

or, with different notation,

$$\frac{df_j}{dt} + v_j \hat{f}_j = \frac{e_j}{m_j} \nabla \hat{\phi} \cdot \nabla_v f_0 + v_j \hat{f}_{Lj} \quad (6')$$

where

$$\hat{f}_{Lj} = \left(\frac{n_j}{n} + 2\alpha_j v_j \hat{u}_j + 2 \sum_k \frac{v_{jk}}{v_j} \alpha_j v_j \hat{u}_k \right) f_{0j}. \quad (7)$$

Here $v_j = v_{jj} + v_{jk}$, v_{jj} and v_{jk} indicate like particle and unlike particle collision frequency, $n_j = \int \hat{f}_j d^3 v$ [8] is the perturbed density and $\hat{u}_j = \int \hat{f}_j d^3 v$ [9] the perturbed flow (average) velocity. The first term on the r.h.s. of Eq. (7) is considered for number of particle conservation and the last two terms for momentum conservation. A general method for solution of Eq. (6) is that of integration along particle orbits [7,8], as represented by

$$\hat{f} = \int dt' e^{v_j t'} \left(\frac{e}{m} \nabla \hat{\phi} \cdot \nabla_v f_0 + v \hat{f}_{Lj} \right). \quad (10)$$

The additional equations which complete the problem are Eqs. (4), (5), (7), (8) and (9).

Since we have assumed $a_j/L_s \ll 1$, around the origin the lowest order expression for the particle orbits is

$$x(t') - x = -\frac{v}{\Omega} \sin(\theta - \Omega t') + \frac{v}{\Omega} \sin \theta,$$

$$y(t') - y = \frac{v}{\Omega} [\cos(\theta - \Omega t') - \cos \theta] + \frac{ht'}{\Omega R_{oc}}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{L_R}{\alpha R_{c\perp} \Omega} \left[\sin \frac{2}{L_R} \zeta(t') - \sin \frac{2}{L_R} \zeta \right],$$

$$z(t') - z \approx \zeta(t') - \zeta = v_{\parallel} t' .$$

Here we have used a set of cylindrical coordinates for velocity space, the direction of B being the axis, and taken into account only the drift due to curvature consistently with our previous ordering of the scale distances. The velocity dependence (spread) of this drift has been neglected as for the instabilities we will consider normally

$$\text{Im}(s) \sim kv_1 \sim ka \frac{v_{th1}}{r} \gg \frac{k}{\alpha R_c \Omega} \sim ka \frac{v_{th1}}{R_c},$$

and resonances with the drift frequency are not relevant although this neglect should be borne in mind when applying our results to extreme cases.

We consider perturbations which are localized in the x -direction over distances $\Delta x < r$, and take the lowest order terms in x/r for the equilibrium quantities around $x = 0$. Therefore, in the absence of "shear", for $L_s = \infty$, we look for normal mode solutions of the form $\phi = \tilde{\phi}(z)\exp(st + iky)$, corresponding to "ballooning modes". When instead L_s is finite but $L_R = \infty$, we look for solutions of the form $\phi = \tilde{\phi}(\zeta)\exp(st + ikx)$ which are mildly localized over ζ . These are "quasi-modes" [5] and result from a proper superposition of elementary modes [2] $\phi = \tilde{\phi}(x)\exp(st + iky)$, centered around different values of x , which are strongly localized in the x -direction. We notice that iky can be written $ikx + ik\zeta$, in terms of rotating coordinates, with $k\zeta = k x/L_s$, while for the "quasi-mode" $iky = iky + ik_x x$ where $k_x = -k \zeta/L_s$. Analytically the amplitude $\tilde{\phi}(\zeta)$ of the "quasi-mode" can be obtained as the Fourier transform $\tilde{\phi}(k_x)$ of $\tilde{\phi}(x)$, where $k_x = -k \zeta/L_s$ is the Fourier variable. We also recall that the width Δ of the quasi-mode, namely the distance over which it is localized along ζ , is related both to the width δ and the period μ of variation of the mode $\tilde{\phi}(x)$ along x . In particular, when $\mu \rightarrow 0$ or $\delta \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow \infty$.

We will not discuss here the general integral equation in $\tilde{\phi}(\zeta)$, but the most significant special cases of it.

III. CONFIGURATIONS WITH ONLY SHEAR STABILIZATION

This case corresponds to $L_R = \infty$ and $h = 0$.
A. In view of the analytic difficulty that the problem involves we neglect at first the effects of ion-ion collisions [11]. We also neglect the electron Larmor radius and with it effects connected with the transverse resistivity, an assumption which is legitimate as long as $L_s^2 \gg rR_c$, as was found for the regime where the hydromagnetic approximation is valid [10]. We are then left with the contribution of electron-electron and ion-electron collisions. The drag exerted by the electrons on the ions is of order m/M and neglected here.

For the "quasi-mode", where

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \zeta^2} \ll \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2},$$

Poisson's equation becomes

$$-k^2 \left(1 + \frac{L_s^2}{L_c^2} \right) \tilde{\phi}(\zeta) = e(\tilde{n}_e - \tilde{n}_i) \quad (11)$$

and neglecting the Debye length in comparison with the ion gyro-radius

$$\tilde{n}_e = \tilde{n}_i . \quad (11')$$

To carry out the integrals along particle orbits we use the same expansion procedure and integration by part as indicated in Ref. 7. Then, for the electron species,

$$\begin{aligned} \tilde{n}_e(\zeta) &= \frac{\tilde{\phi}(\zeta)}{e\lambda_D^2} - \frac{(s+v_e+ikv_e)}{e\lambda_D^2} \left(\frac{\alpha_e}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{||} e^{-\alpha_e v_{||}^2} \int_0^\infty dt' \\ &\quad \tilde{\phi}(\zeta+v_{||} t') e^{(s-ikG_e+v_e)t'} + \mathcal{E}_e(\zeta) . \end{aligned} \quad (12)$$

where $\mathcal{E}_e(\zeta)$ represents the contribution due to collisions, λ_D is the Debye length, $v_e \equiv v_{ee} + v_{ei}$, and $G_e = 1/(\alpha_e \Omega R_c)$. Analogously we obtain for the ions

$$\begin{aligned} \tilde{n}_i(\zeta) &= - \frac{\tilde{\phi}(\zeta)}{e\lambda_D^2} \tau + \frac{(s+ikv_i)}{e\lambda_D^2} \tau I_0[b(\zeta)] e^{-b(\zeta)} \\ &\quad \cdot \left(\frac{\alpha_i}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{||} e^{-\alpha_i v_{||}^2} \int_0^\infty dt' \tilde{\phi}(\zeta+v_{||} t') e^{(s-ikG_i)t'} , \end{aligned} \quad (13)$$

where $b(\zeta) \equiv \frac{1}{2} (ka)^2 \left(1 + \frac{\zeta^2}{L_s^2} \right)$ and $G_i = - G_e / \tau > 0$.

The collisional term for the electrons is

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_e(\zeta) &= v_e \left(\frac{\alpha_e}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{||} e^{-\alpha_e v_{||}^2} \int_0^\infty dt' \tilde{n}_e(\zeta+v_{||} t') e^{(s+v_e-ikG_e)t'} \\ &\quad + 2\alpha_e v_{ee} \left(\frac{\alpha_e}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{||} v_{||} e^{-\alpha_e v_{||}^2} \int_0^\infty dt' \tilde{u}_e(\zeta+v_{||} t') e^{(s+v_e-ikG_e)t'} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_e &= \left(\frac{\alpha_e}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_{||} e^{-\alpha_e v_{||}^2} dv_{||} \int_0^\infty dt' e^{(s+v_e-ikG_e)t'} \\ &\quad \times \left[v_e \frac{\tilde{n}_e}{n} (\zeta+v_{||} t') - (s+v_e ikv_e) \frac{1}{ne\lambda_D^2} \tilde{\phi}(\zeta+v_{||} t') \right] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &\quad + 2\alpha_e v_{ee} \left(\frac{\alpha_e}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_{||}^2 e^{-\alpha_e v_{||}^2} dv_{||} \int_0^\infty dt' e^{(s+v_e-ikG_e)t'} \tilde{u}_e(\zeta+v_{||} t') . \end{aligned} \quad (15)$$

The simplest approximation which can be adopted in order to bring the integral equation resulting from Eqs. (11)-(15) to a differential one corresponds to the assumption that $\Delta \gg v_{th e}^2 t' \sim v_{th e}^2 / |s+v_e|$. If we had considered the elementary

mode, this would correspond to taking the asymptotic form of the resulting W function [11] for $k_x v_{||} \ll |s+v_e|$. We have verified a posteriori that this assumption is satisfied in most cases of practical interest. Then, after expansion of the quantities under the integral in $v_{||} t'$, we have

$$\tilde{n}_e(\zeta) = -\frac{1}{s-ikG_e} \left\{ ik(G_e + v_e) \frac{\tilde{\Phi}(\zeta)}{ek_D^2} + \frac{1}{2\alpha_e(s-ikG_e + v_e)} \right. \\ \times \left. \frac{1}{(s-ikG_e + v_{ei})} \frac{d^2}{d\zeta^2} \left[(s+v_e + ikv_e) \frac{\tilde{\Phi}(\zeta)}{ek_D^2} - v_e \tilde{n}_e(\zeta) \right] \right\}. \quad (16)$$

In the same way, since we assume $v_{th_1}^2 \ll v_{th_e}^2$, we have

$$\tilde{n}_1(\zeta) = \frac{\tilde{\Phi}(\zeta)}{ek_D^2} \frac{\tau}{s-ikG} \left\{ ik(G+v_1) - (s+ikv_1) F_0(\zeta) \right\}, \quad (17)$$

where

$$F_0(\zeta) \equiv 1 - I_0(b(\zeta)) e^{-b(\zeta)},$$

and finally obtain

$$\frac{d^2}{d\zeta^2} \left\{ \tilde{\Phi}[(s+ik|v_1|\tau)(s-ikG) + v_e(s-ikG-ikG\tau+ik|v_1|\tau) + \tau v_e(s-ik|v_1|)F_0(\zeta)] \right\} \\ + 2\alpha_1 \frac{m}{M} (s+ikG\tau+v_e)(s+ikG\tau+v_{ei}) \left\{ k^2 G_1(|v_1|-G)(1+\tau) - (s+ikG\tau)(s-ik|v_1|)F_0(\zeta) \right\} = 0 \quad (18)$$

A simple analytic solution of Eq. (18) is obtained in the limit where $b\zeta^2/L_s^2 \ll 1$, corresponding to $k_x^2 \ll 2/a^2$, where we recover the results derived from moment equations [7]. We assume for simplicity $\tau \sim 1$, recall that $G/|v_1| \sim r/R_c \ll 1$, and obtain then $d^2/d\zeta^2 Y + \bar{Q}Y = 0$, where

$$\bar{Q} = 2\alpha_1 \frac{m}{M} \frac{(s+ikG\tau+v_e)(s+ikG\tau+v_{ei}) \left\{ k^2 |v_1| G(1+\tau) - (s+ikG\tau)(s-ik|v_1|) \right\}}{(s+ik|v_1|\tau)(s-ikG+v_e) + \tau v_e(s-ik|v_1|) \left[F_0(b) + b \frac{k^2}{L_s^2} F'_0(b) \right]} \\ \times \left[F_0(b) + b \frac{k^2}{L_s^2} F'_0(b) \right]. \quad (19)$$

$$F_0(b) \equiv 1 - I_0(b)e^{-b}, \quad F'_0 \equiv dF_0/db.$$

If we further consider $b \ll 1$ and neglect frequencies of oscillation of the order of ikG and $ikG\tau$, we can reduce this to

$$\bar{Q} \approx 2\alpha_1 \frac{m}{M} \frac{(s+v_{ei})}{(s+ik|v_1|\tau)} \left\{ k^2 |v_1| G_1(1+\tau) - s(s-ik|v_1|)b \left(1 + \frac{k^2}{L_s^2} \right) \right\}. \quad (20)$$

In this approximation, electron-electron collisions do not show any effect. Then if we consider the largest eigenvalue corresponding to the solution $\phi = \exp(-\sigma t^2/2)$ we obtain the dispersion relation

$$s(s-ik|v_1|)(s+ik|v_1|\tau) = (s+v_{ei}) \frac{m}{M} \frac{k^2 L_s^2}{\alpha_1^2} \left[(1+\tau) \frac{v_{th1}^2}{rR_c} - s(s-ik|v_1|) \right]^2 \quad (21)$$

The solution of this quintic has to be coupled with the condition $\text{Re}[\sigma] > 0$, where

$$\sigma = 2 \frac{m}{M v_{th1}} \frac{(s+v_{ei})}{(s+ik|v_1|\tau)} b \left[(1+\tau) \frac{v_{th1}^2}{rR_c} - s(s-ik|v_1|) \right], \quad (22)$$

and the limitations $\Delta^2 \gg v_{th_e}^2 / |s+v_e|^2$ and $b\Delta^2 / L_s^2 \ll 1$, where $\Delta^2 = 1/\text{Re}[\sigma]$.

This problem has been solved numerically and some of the results are presented in Fig. 1 and 2 which we discuss later.

We can summarize the main conclusions, by considering a dimensionless form of Eq. (21) and some asymptotic significant cases,

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda+1\tau) = \frac{\lambda + C\tau^{-3/2}}{S} \left[2(1+\tau)\psi - \lambda(\lambda-1)b \right]^2 \quad (23)$$

where

$$S = \frac{M r^2}{m L_s^2}, \quad C = \frac{v_{ei}}{k|v_1|} \left(\frac{T_e}{T_1} \right)^{3/2}, \quad \lambda = \frac{s}{k|v_1|},$$

and

$$\psi = \frac{r}{R_c}$$

- 1) There is only one solution of Eq. (22) which can be unstable and satisfy the above requirements.
- 2) In the very low temperature limit the magnetic shear is almost ineffective, as the dispersion relation is, for $C \rightarrow \infty$

$$s(s-ik|v_1|) = (1+\tau) \frac{v_{th1}^2}{rR_c}, \quad (24)$$

as in Ref. 7.

- 3) In the low temperature regime where $C \gg 1$, $\lambda \gg 1$, $\tau \approx 1$ and $b \ll 1$

$$s \approx \left(v_{ei} \frac{m}{M} \right)^{1/3} \left(2 \frac{a}{r} \frac{v_{th1}}{R_c} k L_s \right)^{2/3} \quad (25)$$

as in Ref. 1.

- 4) In the high temperature regime where $\lambda \ll 1$, $C \gg \lambda$ and $b \ll 1$

$$s \approx v_{ei} \frac{m}{M} \left(\frac{L_s}{R_c} \right)^2 \frac{4}{\tau} (1+\tau)^2, \quad (26)$$

where the growth rate does not depend [2] on k .

- 5) In the high temperature collisionless regime where $C = 0$, the necessary and sufficient conditions for interchange-type instability are,

$$\frac{r}{R_c} > \frac{b}{8(1+\tau)} \quad (27)$$

and

$$16 \frac{m}{M} \frac{\frac{L_s^2}{s}}{R_c^2} > 1 \quad (28)$$

Equation (27) is the condition for instability required in the absence of shear [7], so that the unstable mode appearing when Eq. (28) is also satisfied is a continuation of the (shearless) interchange mode.

C. Since the amount of shear required in order not to satisfy Eq. (28) is rather mild, we assume hereafter $L_s < \sqrt{M/m} R_c/4$, and then find instability only in the presence of collisions ($C \neq 0$). However, using the dimensionless form of Eqs. (22) and (23) we find for $b \ll 1$

$$b \frac{\Delta^2}{L_s^2} \approx \frac{s^2}{C^2(4\tau)^3}$$

so that our approximation breaks down for $C \lesssim s/(4\tau)^{3/2}$. This corresponds to the condition where μ , the length of oscillation of the elementary mode $\tilde{\phi}(x)$ is $\mu \approx a$. Correspondingly the width δ is $\approx a(R_c/r)^\frac{1}{2} \gg a$ and is not responsible for the violation of validity of Eq. (21) at high temperatures.

To overcome this limitation, which is quite drastic for interesting values of τ and S , we have carried out a numerical solution [12] of the full Eq. (18). In dimensionless form this is

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dk^2} \{ \tilde{\phi} [(\lambda + i\tau)(\lambda - 12\tau) + qC\tau^{-3/2}(\lambda + i\tau - 12\tau - 12\tau\tau) + qC\tau^{-1/2}(\lambda - i)F_0(K^2)] \\ + \frac{1}{S} (\lambda + 12\tau + qC\tau^{-3/2})(\lambda + 12\tau + C\tau^{-3/2}) \{ 2\tau(1+\tau)(1-2\tau) - (\lambda - i)(\lambda + 12\tau)F_0(K^2) \} \} \tilde{\phi} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

where $K^2 = b \frac{\Delta^2}{L_s^2}$ and $q \equiv 1 + \frac{v_{ee}}{v_{ei}}$. The complex eigenvalue λ is determined by

requiring that the solution $\tilde{\phi}(K)$ is even in K and finite for $K \rightarrow \infty$. We integrate numerically from ∞ to the origin, starting with the solution which has exponential decay, and search [12] in the complex plane the value of λ which makes the real and imaginary part of $\frac{d\ln \tilde{\phi}}{dk}|_{K=0} = 0$. In order to find the largest eigenvalue and delimit the region where the search is made, we proceed by continuity from the regime where Eq. (23) is valid and the results overlap with those from Eq. (30).

We have presented some of the conclusions in Figs. 1 and 2. There a dimensionless growth rate

$$\Gamma \equiv \text{Re}[s] \frac{r\sqrt{2}}{v_{th_i}} \quad (31)$$

is given versus a dimensionless collision frequency

$$C_f = v_{ei} \frac{r\sqrt{2}}{v_{th_i}} \tau^{3/2} \quad (32)$$

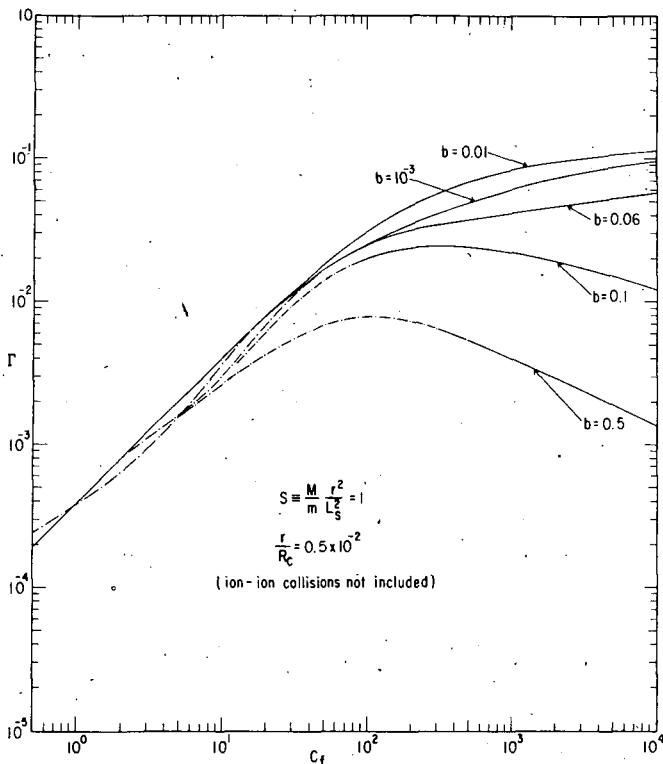


FIG. 1. Temperature dependence of the growth rate when the ion-ion collisions are neglected. The dashed line represents data obtained from solving Eq.(30) for the regime where the radial wavelength μ is equal or less than the ion Larmor radius. The solid line is obtained from the quintic Eq.(21) corresponding to larger value of μ .

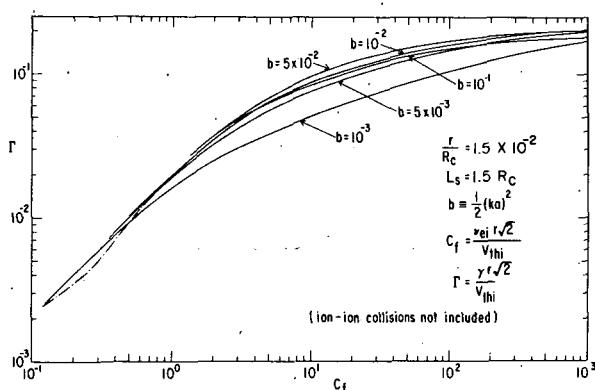


FIG. 2. Corresponds to Fig. 1 and represents a mock up of the stellarator. The results from the quintic have a more extended validity. In particular, the curve with $b=10^{-3}$ shows the behaviour $\Gamma \propto \eta^{1/3}$ predicted by the fluid theory.

With all the quantities evaluated at the ion temperature, for a set of values of b , τ , S and $\#$, representing respectively the wavelength and the magnetic field strength, the electron temperature, the magnetic shear, and the magnetic curvature. In particular, in Fig. 2, S and $\#$ are chosen to represent a mockup of the stellarator.

The solid line corresponds to the regime where the quintic Eq. (23) is valid, while the dash-line corresponds to the regime where the full solution of Eq. (30) is valid instead. We see that for the case of Fig. 1, the breakdown of validity for the quintic occurs at relatively modest temperatures. However, in spite of the considerable effort involved in solving Eq. (30) we see that the results do not show a drastic departure from the values predicted by the quintic. The fact that the distance of oscillation μ becomes shorter or comparable with a does not have an important role. In addition the electron-electron collisions do not have an appreciable influence.

In addition to λ the numerical program gives Δ and verifies that the electron Larmor radius can be consistently neglected and the expansion parameter $v_{th_e}/(|s+v_e|\Delta)$ is $\ll 1$.

IV. EFFECTS OF ION-ION COLLISIONS

In view of the magnitude of Δ , or of the smallness of μ , at relatively high temperature we can verify by a proper ordering or use of moment equations that since $s \lesssim v_{11}(k_x a)^2$ and $k_x a \sim 1$, the effects of ion-ion collisions can no longer be neglected.

One intrinsic difficulty of using the Krook model to include them is that we do not expect from it accurate results when $k_x a \sim ka \sim 1$, as it is not correct for small angle collisions. Another difficulty is that, even with this model, the derivation and the solution of an equation corresponding to Eq. (30) is formidable. The first difficulty is not serious since one of the effects of ion-ion collisions is of broadening the wavelength μ of the mode $\tilde{\phi}(x)$ in the x space. Under these conditions we have shown numerically that the results are essentially determined by the asymptotic form of the ion-ion collision operator which is obtained in the limit $k_x a \sim ka \ll 1$, where it is expected to be accurate.

The perturbed kinetic equation for the ions now is

$$\frac{df_1}{dt} + v_1 \hat{f}_1 = - \frac{e}{M} \nabla \tilde{\phi} \cdot \nabla f_{01} + v_1 f_{01} \left(\frac{n_1}{n} + 2\alpha_1 v_x \hat{u}_{x1} + 2\alpha_1 v_y \hat{u}_{y1} \right) \quad (33)$$

and has to be coupled with the equations for the moments \hat{n}_1 , \hat{u}_{x1} , $\hat{u}_{y1} \approx \hat{u}_{x1}$. Then, proceeding as in the analysis leading to Eq. (18) we find

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\zeta^2} & \left\{ \frac{\tilde{\phi}}{s-ikG+v_1 F_1} [(s+ik|v_1|\tau)(s-ikG) + v_e(s-ikG-ikG\tau + ik|v_1|\tau) \right. \\ & + \tau v_e (s-ik|v_1|) F_1(\zeta) + v_{11} (s+v_e \tau + v_e + ik|v_1|\tau) F_1(\zeta)] \} \\ & + 2\alpha_1 \frac{m}{M} (s+ikG\tau + v_e) (s+ikG\tau + v_{e1}) \left\{ k^2 G (|v_1|-G)(1+\tau) - [v_{11}(s-ik|v_1|+ikG+ikG\tau) \right. \\ & \left. + (s+ikG\tau)(s-ik|v_1|)] F_1(\zeta) \right\} \frac{\tilde{\phi}}{s-ikG+v_1 F_1} = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

where

$$F_1(\zeta) = 1 - I_0[b(\zeta)]e^{-b(\zeta)} + \frac{v_{11}}{s-ikG+v_{11}(1-2P[b(\zeta)])} Q^2[b(\zeta)]$$

$$b(\zeta) = b \left(1 + \frac{\zeta^2}{L_s^2} \right), \quad (35)$$

$$P = b(\zeta)e^{-b(\zeta)} \left\{ I_0[b(\zeta)] - I_1[b(\zeta)] \right\},$$

$$Q = \sqrt{\frac{1}{2} b(\zeta)} \left\{ I_0[b(\zeta)] - I_1[b(\zeta)] \right\} e^{-b(\zeta)},$$

and $v_1 \approx v_{11}$. In the limit where $b(\zeta) \ll 1$

$$F_1 \approx \frac{b(\zeta)}{s-ikG+v_{11}} \left[s-ikG + \frac{1}{4} v_{11} b(\zeta) \right].$$

In particular, in the absence of shear ($L_s = \infty$), $b \ll 1$ and $kG \ll s$ the dispersion relation is

$$(s-ik|v_1|)(s + \frac{1}{4} v_{11} b) = (1+\tau) \frac{v_{th}^2}{rR_c}$$

a result also obtained by using moment equations [13], and yielding weak instability in the shear-free case.

Equation (34) has now been integrated numerically by the same techniques discussed in Section III. The main result of this is that, given ψ and S , stability can be achieved for $C < C_{crit}$, i.e., for sufficiently high temperature. For instance, in Fig. 3 we show the fastest of the modes considered in Fig. 1 and find that it becomes stable for $C_f < 14.2$.

To see that this fact does not depend on the form which our ion-ion collision operator takes for $b(\zeta) \gtrsim 1$ in the region where the Krook model is not reliable, we have carried out another numerical program [12] which makes use of the form which F_1 takes for $b(\zeta) \ll 1$. This gives similar results to those obtained from the complete equation and shows excellent agreement in the limit $v_{11} = 0$ with those obtained from Eq. (30). In particular, the approximate form of F_1 which we have chosen is the one which gives the most pessimistic growth rates, as indicated by the upper curve in Fig. 4. In Figs. 5 and 6 we show the variation of the growth rate and the frequency of oscillation as a function of $\alpha \equiv v_{11}/v_{ie}$. The reduction of the former is rather drastic, and the latter becomes of the order of the frequency of the drift wave, $k_V \tau$.

In order to give a quantitative evaluation of the values $C_{critical}$ at which marginal stability occurs we have computed the curves of Figs. 7 and 8. We have investigated cases with the following range of parameters:

$$\tau = 1, \alpha \equiv \frac{v_{11}}{v_{ie}} = (1840)^{-\frac{1}{2}}, 5 \times 10^{-3} \leq \psi \leq 10^{-1}, 0.18 \leq S \leq 4, \text{ where } S = 0.18 \text{ is intended to correspond to the case of the stellarator, and } b = 10^{-2}.$$

We have chosen this value of b , having observed that the most unstable modes correspond to small values of b , in general such that, $b \ll \langle k^2 \rangle$, where $\langle k^2 \rangle = b \zeta^2/L_s^2$. In this case the dimensionless form of Eq. (34) can be rescaled in ζ^2 and made independent of b . Then we expect

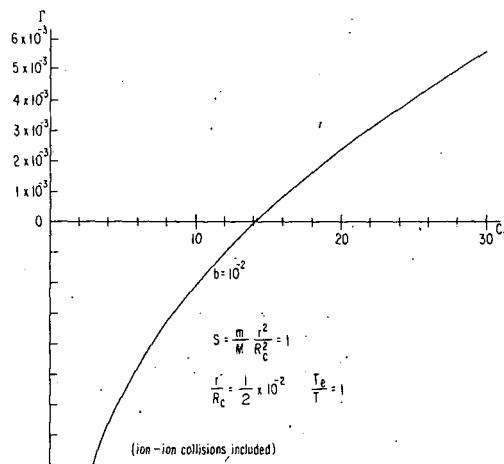


FIG. 3. Growth rate for the fastest of the modes of Fig. 1, when ion-ion collisions are included.

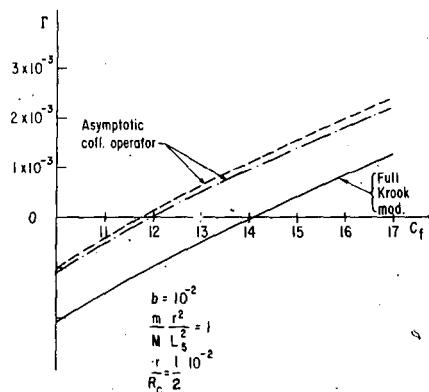


FIG. 4. Comparison of growth rates obtained using different approximations for the ion-ion collision operator. The upper curves are obtained from asymptotic forms corresponding to wavelengths larger than the Larmor radius, and show close agreement.

$$C_{fcrit} = \sqrt{b} C_{crit}(\alpha, S, \tau, \tau)$$

and that C_{crit} increases with τ , as numerically found. A fit of the numerical results for the mentioned ranges of τ and S near $C = C_{crit}$ is

$$\lambda \approx 16 \frac{C}{S} - 0.057 - 0.251 \quad (36)$$

where ω is the frequency of the drift wave.

Thus, a configuration, in this range of τ and S with $\tau=1$ will be stable if

$$\frac{v_{ei}r}{v_{th_i}} \lesssim \frac{.004S}{\tau} \frac{b_i}{r}$$

where we have assumed that the largest possible transverse wavelength is $\sim \frac{1}{r}$.

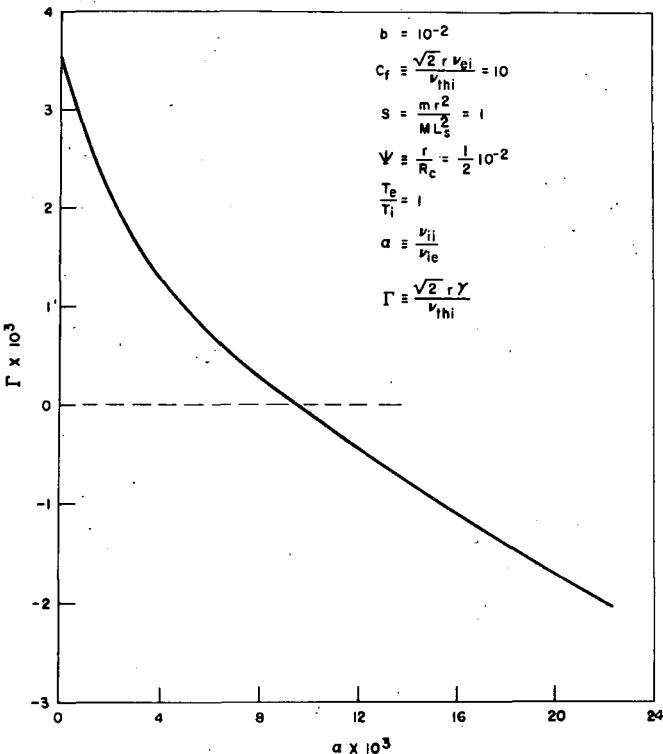


FIG. 5. Variation of the growth rate as a function of $\alpha = v_{ii}/v_{ei}$. For $\alpha = (m/M)^{1/2}$, damping occurs.

The physical explanation of these results is that the presence of shear causes the instability to have very short radial distances of oscillation μ at high temperatures (small collision frequency). Then the diffusion over μ due to ion-ion collisions becomes important and tends to counteract the instability. One of the effects is to reduce the growth rate. Another effect is to make μ considerably larger, and Δ shorter, than it is in the absence of ion-ion collisions. As a consequence our expansion in $|s+v_{ei}| \Delta/v_{thi}$ breaks down much sooner and the electron Landau damping has an earlier effect on the instability than for Eq. (30). For instance, we have found that this occurs before reaching C_{crit} for $S = 1$ and $\Psi \geq 4 \times 10^{-2}$. A rough analytic argument using perturbation theory based on this simple picture agrees qualitatively in its dependence on v_{ei} , curvature, and shear, but not very well quantitatively, with the results of the numerical calculation. This lack of exact agreement is not too surprising as both Δ and s are complex and depend sensitively on the ion-ion collisions.

V. $\int d\ell/B$ STABLE CONFIGURATIONS

We consider now the case where $L_s = \infty$ but L_R is finite, limiting discussion to the high temperature collisional regime.

In order to include simply the effect of transverse resistivity we make mixed use of moment equations and of the orbits method [2,14,15], carrying on the expansion in v_{\perp} as indicated in Section III, to include the sound wave. We consider perturbations of the form $\phi = \tilde{\phi}(z)\exp(st+iky)$, take $\tau=1$, $b \ll 1$ and use a standard method of reduction [10] for the moment equations. The result is

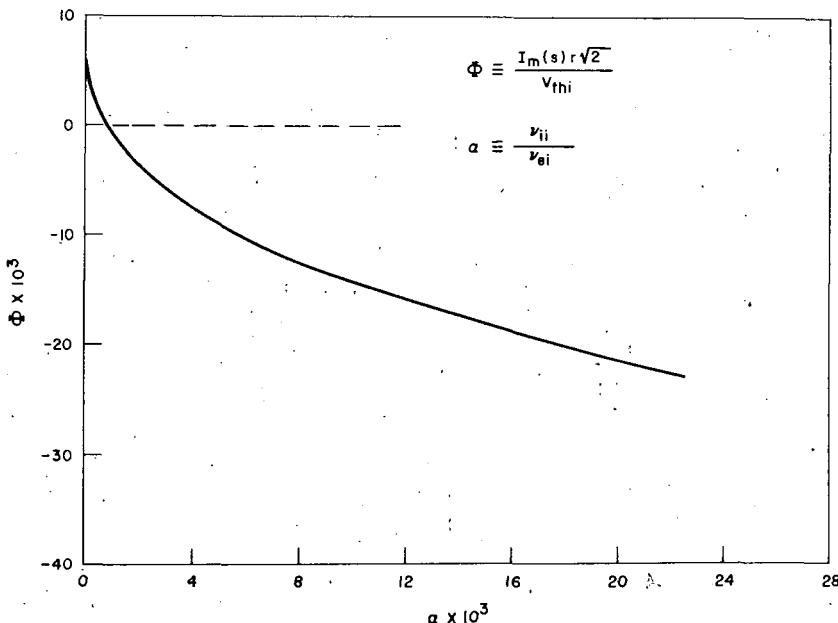


FIG. 6. Variation of the frequency of oscillation for the case of Fig. 5 as a function of α . When $\alpha = (m/M)^{1/2}$ the frequency is of the order of that of the drift wave $k v_i t$.

$$\left(\frac{v_{thi}^2}{\beta \eta_{||}^2 L_R^2} \frac{s - ik|v_i|}{s^2} \right) \frac{d^4 \tilde{\phi}}{dz^4} - \left[\frac{2\eta_{||} + \eta_{\perp}}{2\eta_{||}} + \frac{2}{\beta \eta_{||} k^2} \left(s + ik|v_i| - ik|v_i| \frac{\beta \eta_{||} k^2}{4s} \right) \right] \frac{d^2 \tilde{\phi}}{dz^2} + \left[\frac{L_R^2}{v_{thi}^2} s (s - ik|v_i| + \frac{\beta}{2} \eta_{||} k^2) + \frac{2h L_R^2}{r R_c} \right] \tilde{\phi} - \left(\frac{2 L_R^2}{r R_c} \cos 2z \right) \tilde{\phi} = 0 \quad (37)$$

where

$$\bar{z} \equiv \frac{z}{L_R}, \text{ and } \frac{\beta}{2} \eta_{||} = v_{ei} \frac{m}{M} a^2.$$

We solve Eq. (42) as a Hill equation looking for a solution of the form $\tilde{\phi} = \sum_n \tilde{q}_n e^{i 2n \bar{z}}$. Then the dispersion relation is obtained by solving the Hill determinant $\Delta_H = 0$.

In the limit of high conductivity the elements off the main diagonal are small compared to all diagonal terms, except possibly $n = 0$ or any diagonal term vanishing due to a particular choice of s . In these circumstances we may restrict ourselves to a 3×3 determinant and the dispersion relation is obtained in the form

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[s(s - ik|v_i| + \frac{\beta}{2} \eta_{||} k^2) - \frac{1}{v_{thi}^2} + \frac{2h}{r R_c} \right] \cdot \left\{ s(s - ik|v_i| + \frac{\beta}{2} \eta_{||} k^2) \frac{1}{v_{thi}^2} + \frac{2h}{r R_c} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{L_R^2} \frac{M}{m} \frac{1}{v_{ei} b} \left[s + ik|v_i| - ik|v_i| \frac{\beta \eta_{||} k^2}{4s} + \frac{2v_{thi}^2 (s - ik|v_i|)}{L_R^2 s} \right] + \frac{2}{L_R^2} \left(\frac{2\eta_{||} + \eta_{\perp}}{\eta_{||}} \right) \right\} = \frac{2}{(r R_c)^2} \right. \end{aligned} \quad (38)$$

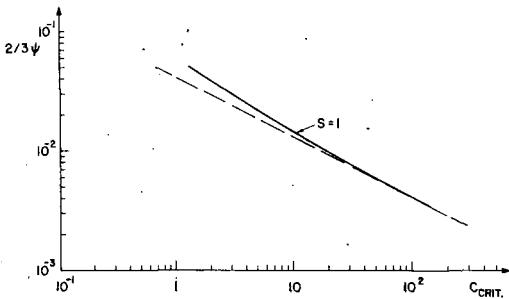


FIG. 7. Values of C_{crit} , representing the temperature at which ion-ion stabilization occurs, for constant shear, as a function of magnetic curvature. The dashed line represents $C_{\text{crit}} \propto R_c^2$.

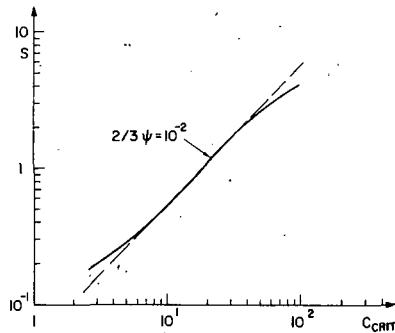


FIG. 8. Values of C_{crit} , for constant magnetic curvature and as a function of shear. The dashed line represents $C_{\text{crit}} \approx (L_s)^{-2}$.

We have discussed elsewhere [16] the hydromagnetic limit of the solution, resulting for $k v_1 \ll v_{th1}/L_R$. Here we consider instead $k a \gg r/L_R$ and again find two types of waves:—"interchange-gravitational" waves, with

$$s \approx i \left(\frac{k|v_1|}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2 v_1^2}{4} + \frac{2hv_{th1}^2}{rR_c}} \right);$$

--a "drift" wave with $s \approx -ik|v_1|$. For $ka \ll r/L_R$ the latter is replaced by the sound wave which we discuss in Ref. 16. In fact, for $s = -ik|v_1| + \epsilon$ we have

$$\text{Re}[\epsilon] = v_{ei} \frac{m}{M} b \left[\frac{L_R^2}{2hrR_c} \frac{1-2\left(h - \frac{1}{2}bR_c/r\right)^2}{1 - \frac{1}{2}bR_c/(rh)} - 2 \left(\frac{\eta_\perp}{\eta_\parallel} + 1 \right) \right], \quad (39)$$

and we see that stability can be achieved when $L_R^2 \sim rR_c$. It is evident that a resonance with the "gravitational" wave occurs for

$$b = 2 \frac{rh}{R_c},$$

where the growth rate

$$\epsilon \approx \sqrt{1} \frac{L_R}{R_c} \left(\frac{m}{M} v_{ei} \frac{v_{th_i}}{r} \right)^{1/2} \left(\frac{rh}{R_c} \right)^{1/4} \quad (40)$$

is larger and has a weak dependence ($T^{-\frac{1}{2}}$) on the temperature. The first gravitational wave is always stable, but the second one can be unstable if $b > 2hr/R_c$. In fact, for $s = -i\omega + \epsilon$ and

$$\omega = \frac{1}{2} k |v_i| \left(\sqrt{k + \frac{16}{b} \frac{r}{R_c}} - 1 \right) < k |v_i|, \\ \epsilon = \frac{1}{4} \frac{m}{M} v_{ei} b \left[\left(\frac{L_R}{r R_c} \right)^2 \frac{v_{th_i}^2}{(2\omega + k|v_i|)(k|v_i| - \omega)} - 4 \frac{\eta_{||}}{\eta_{\perp}} \right]. \quad (41)$$

We have also extended our previous treatment of the ion-ion collisions leading to the analogue of Eq. (34). We omit the details and state only the result. For the shear-free case ion-ion collisions do not have an effect on the unstable drift wave and influence only weakly the resonance mode but do stabilize the "gravitational" wave. Without ion-ion collisions this is unstable if $b > 2hr/R_c$, i.e., when the drift wave is stable. Its frequency $s = -\omega i + \epsilon$ is given by:

$$\epsilon \approx 2v_{ei} \frac{m}{M} \frac{L_R^2}{R_c^2} - \frac{1}{4} v_{ii} b \quad (42)$$

and it is stabilized for $L_R^2 < R_c^2 \frac{b}{8} \sqrt{\frac{M}{m}}$, so this wave appears to be much less important than the drift wave.

Comparing these results with those we obtain in the hydromagnetic limit [16], the main difference is that now the transition between the gravitational wave and the drift wave depends on the value of the wavelength of the perturbation, and the gravitational wave is fairly easily stabilized by ion-ion collisions. The resonant case is particularly relevant because of a large growth rate ($\alpha T^{\frac{1}{2}}$) at high temperatures, and because by adjusting k the resonance may be produced for all values of L_R^2/rR_c . We recall that at resonance $ka \approx 2\sqrt{hr}/R_c$. Since $k_{min} \sim 1/r$ resonance cannot occur if $a/r > 2\sqrt{hr}/R_c$. Moreover, the resonance will also be destroyed by ion Landau damping if the phase velocity of the drift wave is less than ion thermal speed, i.e., if

$$L_R \frac{ka}{2r} v_{th_i} < v_{th_i}$$

or, using the above resonance condition, if

$$\frac{h L_R^2}{r R_c} < 1. \quad (43)$$

We have also made a preliminary study of the situation with respect to the "universal" instability. We find that in the collisionless regime no new unstable modes of this type are introduced. In particular, if we look for solutions of the form

$$\sum_n \tilde{d}_n e^{i(k_L L_R + n z)}$$

then there is no instability for $k_{||} = 0$ but for $k_{||} L_R < 1$ a weak instability due to electron Landau damping like the universal instability may persist. The on-the-average favorable curvature exerts a stabilizing effect, but to obtain complete stability requires adequate "communication" between good and bad regions.

In other words some complicated function of v_{th_1}/sL_R and v_{th_1}/sL_R must be large enough. It is clear that $v_{th_1}/sL_R > 1$ is adequate for good communication but in the case $v_{th_1}/sL_R \ll 1$ v_{th_1}/sL_R we have not yet completely solved the problem since many elements of the Hill determinant are now involved.

VI. INFLUENCE OF SHEAR ON $\int d\ell/B$ STABLE CONFIGURATION, NEGLECTING ION-ION COLLISIONS

As in Section V, we make mixed uses of the moment equations and the orbit method, assume for simplicity $r=1$, and $b \ll 1$, and neglect ion-ion collisions. Then we take the Fourier transform of the equation equivalent to Eq. (42) and obtain in proper dimensionless units

$$\left\{ \left[K^2 + \bar{s}\bar{\eta}_{\parallel} \left(1 - \frac{L_R^2}{L_s^2} \frac{d^2}{dK^2} \right) \right] \left[\left(1 - \frac{1}{\bar{s}} \right) \bar{s}^2 + K^2 + \bar{s}\bar{\eta}_{\perp} \left(1 - \frac{L_R^2}{L_s^2} \frac{d^2}{dK^2} \right) \right] + 12\bar{\ell}\bar{s}K^2 + \bar{\eta}_{\parallel} \bar{s}gh \right\} \bar{\phi} = \frac{1}{2} \bar{\eta}_{\parallel} \bar{s}g[\bar{\phi}(K-1) + \bar{\phi}(K+1)] \quad (44)$$

where

$$\bar{s} = sL_R/v_{th_1}, \quad \bar{\ell} = k|v_i| L_R/v_{th_1}, \quad \bar{\eta}_{\parallel} = \eta_{\parallel} \frac{\beta}{2} k^2 L_R/v_{th_1},$$

$$\bar{\eta}_{\perp} = \eta_{\perp} \frac{\beta}{2} k^2 L_R/v_{th_1}, \quad g = 2L_R^2/(rR_c) \text{ and } L_R/L_s \ll 1.$$

In fact, referring to Section V we now look for solutions of the form

$$\bar{\phi}(\zeta) = \int_n \bar{\phi}(n+K)e^{i(n+K)\zeta} dK$$

where $\zeta = \zeta/L_R$, and $K \ll 1$. As in Section V we consider in lowest order the $n = 0, \pm 1$ components and are led to the equation

$$\begin{aligned} & \left\{ \bar{s}(\bar{s}-i\bar{\ell}) \left(1 - \frac{L_R^2}{L_s^2} \frac{d^2}{dK^2} \right) + (\bar{s}+i\bar{\ell}) \frac{K^2}{\bar{\eta}_{\parallel}} + gh - \frac{1}{2} \bar{s}^2 \bar{\eta}_{\parallel} \bar{s} \right. \\ & \times \left. \frac{(\bar{s}^2+1+i\bar{\ell}\bar{s} - \frac{i\bar{\ell}}{\bar{s}}) + \bar{\eta}_{\parallel} \bar{s} \left[gh + \bar{s}(\bar{s}-i\bar{\ell}) + (2\bar{\eta}_{\perp} + \bar{\eta}_{\parallel})/\bar{\eta}_{\parallel} - i\bar{\ell}/\bar{s} \right]}{\left[(\bar{s}^2+1+i\bar{\ell}\bar{s} - \frac{i\bar{\ell}}{\bar{s}}) + \bar{\eta}_{\parallel} \bar{s} \left[gh + \bar{s}(\bar{s}-i\bar{\ell}) + (2\bar{\eta}_{\perp} + \bar{\eta}_{\parallel})/\bar{\eta}_{\parallel} - i\bar{\ell}/\bar{s} \right] \right]^2 - 4K^2 \left(1 - \frac{i\bar{\ell}}{\bar{s}} \right)^2} \right\} \bar{\phi}(K) = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

The structure of this equation is identical to the one we consider in Ref. 16, for the same type of configuration but discussing only the hydromagnetic regime. By using the same argument given there we find that the unstable drift wave disappears if

$$\frac{L_s}{L_R} \left(\frac{gr}{L_R ka} \right)^2 \frac{\bar{\eta}_{\parallel}}{\sqrt{gh-2\bar{\ell}}} < 1. \quad (46)$$

If we consider instead the resonant case where $gh = 2\bar{\ell}^2 + 3 + \frac{1}{\bar{s}^2}$, we find, in a similar way, the stability condition

$$\frac{L_s}{L_R} \frac{\bar{s}^{2/3} \bar{\eta}_{\parallel}^{5/6}}{\bar{\ell}^{5/6}} < 1$$

where at resonance $\bar{\ell} \approx 2 \sqrt{hL_R^2/rR_c}$.

An important difference from the hydromagnetic analysis arises when $\ell > 2\sqrt{rh/R_c}$ and we consider the gravitational wave. Then the growth rate is composed by a part due to the unfavorable curvature as found in Section V and a part due to the presence of shear as discussed in the appendix. There we show that a critical temperature exists at which the mode disappears. Although this appears to be the most serious instability for the present configuration, we have not yet concluded the consideration of the complete variable curvature problem with ion-ion collisions and are not yet able to draw a definite conclusion.

A different treatment, appropriate to the case of low temperature and high shear, shows that for $\Delta \ll L_R$, at high temperatures, the variation of curvature has no stabilizing effect as might be expected. Thus the condition $\Delta_0 \gg L_R$ (where Δ_0 is the "length" of the mode for $L_R = \infty$) is a necessary requirement for the effective utilization of negative V'' .

VII. CONCLUSIONS

We have considered the collisional interchange-type instability for very low β using the Vlasov equation with a Krook collision operator. See Section I for details of the notation and equilibrium studied. The following cases have been analyzed:

I. Sheared magnetic field and constant curvature, i.e., shear stabilized but V'' unstable.

A. For very small shear, $L_s^2/R_c^2 > M/(16m)$, the shear is ineffective in the sense that in the collisionless regime there exists a continuation of the ordinary unstable hydromagnetic interchange mode [7].

B. For a larger amount of shear, instability exists only in the presence of (electron-ion) collisions. When the temperature increases to the point where the resistive growth rate given by the fluid theory, (see Eq. 25), is less than the frequency of the drift wave $\omega \sim kv_1$, then the ordinary fluid theory becomes invalid and the growth rate, neglecting ion-ion collisions, decreases rapidly as

$$s \approx 16v_{ei} \frac{m}{M} \frac{l^2}{R_c^2} s \quad (\text{see Eq. 23}).$$

Detailed numerical integration shows this result, in the absence of ion-ion collisions, to remain valid even when the radial wave number μ of the perturbation becomes comparable with a_1 (see Fig. 1).

C. Under such conditions ion-ion collisions also become important. This occurs because at high temperature and in the presence of shear the radial wavelength μ becomes small and the diffusion damping $-v_{ii}(a_1/\mu)^2$ becomes larger than the growth rate. Detailed numerical calculations, while not in complete quantitative agreement with this simple picture, verify that ion-ion collisions do indeed lead to a complete stabilization of the resistive interchange modes as the collision frequency becomes small (see Eq. 36). A further stabilizing effect is that ion-ion collisions decrease Δ , thereby leading to Landau damping.

II. V'' Stable systems

A. Without shear -- In this case there exist two types of wave in the collisionless regime: (i) the stable interchange oscillations in the average-favorable "gravitational" field, modified by finite Larmor radius effects; (ii) a drift wave with wavelength along the field corresponding to the periodicity, $1/L_R$, of the field curvature. In the presence of collisions one or the other of the two types of wave can be unstable with growth rate $\propto \eta$, if $ka > 2\sqrt{rh/R_c}$. One of the "gravitational" waves, and if $ka < 2\sqrt{rh/R_c}$ the drift wave. Moreover, for $ka = 2\sqrt{rh/R_c}$ a resonance occurs between the two waves producing a growth rate proportional to T^{-1} . The ion-ion collisions do not have an important effect on the drift wave or resonant mode, but can stabilize the "gravitational" mode.

However, we have neglected the Landau damping which will stabilize these modes if $\text{Im}[s] < v_{th_1}/L_R$, i.e., for the resonant case if $hL_R^2/rR_c < 1$.

B. With shear -- In the presence of shear, the above mentioned waves no longer exist as pure normal modes. Then, neglecting for simplicity the effects of ion-ion collisions, we find roughly that stability against the drift wave and its resonance occurs for $s\tau < 1$, where s is the shear-free growth rate and τ the time for the wave to propagate a distance L_s , the shear distance of the field. These waves are, in fact, phase mixed away. The gravitational wave exhibits a larger growth rate (see appendix) due to the presence of shear, but there exists for a given shear a critical collision frequency below which it ceases to be bounded in space and therefore disappears.

We conclude that at high temperatures the resistive interchange becomes stable even for pure shear stabilization, but that "V" stable systems, with shear, are stabilized under much less restrictive conditions, e.g., less shear, lower temperature, etc.

ACKNOWLEDGMENTS

We wish to thank Dr. Bernard W. Roos for developing the numerical search for the eigenvalues of the differential equations we encountered, and for his assistance, Mrs. E. Metzner for programming, and W. Horton for help in some computations.

We would also like to acknowledge the related work by Dr. D. B. Chang on the stability of the "tearing" mode and of D. Bhadra on application of the F.P. equation to the universal instability which were originally planned for inclusion in this paper and should be published elsewhere but had to be omitted because of space limitations, and also thank Dr. Chang for many helpful discussions and his criticism.

Discussions with Dr. J. B. Taylor and Dr. R. M. Kulsrud are recalled with pleasure.

This work was performed under the auspices of the U. S. Atomic Energy Commission and under a joint General Atomic-Texas Atomic Energy Research Foundation program on controlled thermonuclear reactions.

GLOSSARY OF SYMBOLS

$a_{1,e}$ = ion (electron) gyro radius (a is also used instead of a_1)

B = magnetic field

$$b \equiv \frac{(ka_1)^2}{2}$$

$$b(\zeta) \equiv b \left(1 + \frac{\zeta^2}{L_s^2} \right)$$

$$C \equiv \frac{v_{ei}}{k|v_1|} \tau^{3/2}, \text{ with } v_{ei} \text{ evaluated at ion temperature}$$

$$C_f = \sqrt{b} \quad C = \frac{v_{ei} r \sqrt{2}}{v_{th_1}} = \text{dimensionless collision frequency, with } v_{ei} \text{ evaluated at ion temperature}$$

E = electric field

e_j = electric charge

$$g = \frac{2L^2}{rR_c}$$

$G_j = (\alpha_j \Omega_j R_c)^{-1}$ = curvature drift velocity (G is also used instead of G_1)

h/R_c = average magnetic field curvature

k = wave number in the y (azimuthal) direction

J = current density

L_s = inverse of magnetic shear (see Eq. 1)

L_R = the period of variation of the magnetic curvature

$$\lambda = \frac{k |v_i| L_R}{v_{th_i}}$$

M = ion mass

m = electron mass

n = particle density

$$r = - \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \right)^{-1}$$

R_c = radius of curvature of magnetic field

$$S = \frac{M}{m} \frac{r^2}{L_s^2}, \text{ proportional to shear}$$

s = growth rate (i.e., a time dependence $\exp(st)$ is considered)

T = temperature

x = radial coordinate

u = flow velocity

v_i and v_e = ion and electron diamagnetic velocity

$$\alpha_j = (v_{thermal j})^{-2}$$

$$\beta = \frac{2p}{B^2}$$

$\gamma \equiv \text{Re}[s]$ = growth rate

s = total width of the elementary mode in the x -direction

η = resistivity

ϵ = small change in s induced by collisional effects

ϕ = electric potential

$$\Gamma \equiv \sqrt{b} \operatorname{Re}[\lambda] = \text{dimensionless growth rate} = \frac{\gamma_{\text{th}} \sqrt{2}}{v_{\text{th}}}$$

$$\vartheta \equiv \sqrt{b} \operatorname{Im}[\lambda] \text{ dimensionless frequency}$$

ω = frequency of oscillation

$$K = k_x a / \sqrt{b} = \sqrt{b} \zeta / L_s$$

Ω_j = gyration frequency

$$\psi = r/R_c$$

$$\lambda \equiv s/k |v_i|$$

μ = radial wavelength of the elementary mode

ν = collision frequency

ρ = mn = mass density

$$\tau \equiv \frac{T_e}{T_i} = \text{temperature ratio}$$

ζ = linear coordinate along the magnetic field lines

Δ = distance along the magnetic field over which the "quasi-mode" is localized

$$\bar{\eta} \equiv \frac{\beta}{2} \frac{\eta k^2 L_R}{v_{\text{th}}}$$

$$\bar{s} = s L_R / v_{\text{th}}$$

$\bar{\epsilon}$ = small change in \bar{s} induced by collisions

APPENDIX

A Collisional Instability in the Presence of Favorable Curvature and Shear

In Section II we have assumed $R_c > 0$ corresponding to unfavorable curvature, i.e., $\nabla p \cdot \nabla B > 0$. We consider now the case where $R_c < 0$, and the direction of the magnetic curvature is favorable to stability. This has important implications for negative "V" systems. We neglect for simplicity the effects of ion-ion collisions, assume $\tau = 1$ and $b + K^2 \ll 1$, in the same approximation as for Eq. (20). In dimensionless units (see Eq. (23) with $\psi < 0$) and referring to the solution $\phi = \exp(-\bar{\sigma} K^2/2)$ we find

$$\lambda(\lambda^2 + 1) \frac{s}{\lambda + C} = [4|\psi| + \lambda(\lambda - 1)b]^2, \quad (1A)$$

and

$$\bar{\sigma} = - \frac{\lambda + C}{S} \frac{4|\psi| + \lambda(\lambda-1)b}{\lambda+1} . \quad (2A)$$

Then, considering the limit $\psi S/(b^3 C) \ll 1$ and the "gravitational-interchange" wave corresponding to

$\lambda = -i\omega_0 + \epsilon_0$ with $\omega_0 = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 16\psi/b} - 1) < 1$, requiring
 $b > 2\psi$, we have for $C \gg \lambda$

$$\bar{\sigma} = \frac{C}{S} b \frac{\epsilon_0(2\omega_0 + 1)}{1 - \omega_0} , \quad (3A)$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{b(2\omega_0 + 1)} \sqrt{i\omega_0 \frac{S}{C} (1 - \omega_0^2)} , \quad (4A)$$

and a growth rate of order

$$\gamma \sim 2 \left(\frac{M}{m} \frac{v_{th1}^3}{L_s^2 R_c v_{ei}^3 (ka)^3} \right) . \quad (5A)$$

This dependence on collision frequency is of course only valid if v_{ei} is large and in fact we also can see from Eqs. (1A) and (2A) that, given $A = 4\psi/b$, a critical value $Z_{crit} \approx 1$ of

$$Z \equiv \frac{S}{b^2 c} = \frac{M}{m} \frac{r}{L_s^2} \frac{v_{th1}}{(ka)^3 v_{ei}}$$

exists, such that for $Z > Z_{crit}$ $\text{Re}[\bar{\sigma}] < 0$ and the instability disappears. Thus at high temperatures where v_{ei} is small the instability is not dangerous.

We have confirmed all this by detailed numerical computations. Note that under the worst conditions $Z = Z_{crit}$ the growth rate approaches the hydrodynamic limit $\gamma_H \equiv v_{th1} \sqrt{R_c}$.

We notice that, besides vanishing in the collisionless regime, the instability cannot be found in the hydromagnetic limit where the term ikv_e appearing in Eq. (12) is neglected in comparison with s . If we had used moment equations this would correspond to the term $(B/\Omega_1 M_n) d\rho_e/dx$ coming from the modified Ohm's law. The effect of ion-ion collisions is important in this case in assessing the value of the growth rate and the conditions under which stability occurs. A complete analysis of this has not yet been carried out.

We consider now the configuration of Section VI, having shear and varying curvature with $\Delta \gg L_R$ so that the variable curvature must be considered. Looking at the gravitational wave, (see Eq. (45) where we employ the same dimensionless units)

$$\text{for } \ell > 2\sqrt{hL_R^2/rR_c}, \text{ we have } \bar{\omega} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\ell^2 + 4gh} - \ell \right) < \ell$$

$$\text{and } \bar{s} = -i\bar{\omega} + \bar{\epsilon}, \text{ where } \bar{\epsilon} = \frac{1}{2\bar{\omega} + \ell} \left(\bar{\epsilon}_0 + \frac{\bar{\omega}}{2} g^2 \frac{\bar{\eta}_1}{\bar{\omega}\ell - \bar{\omega}^2 + 1 + \frac{\bar{\ell}}{\bar{\omega}}} \right) \text{ and } \bar{\epsilon}_0 \text{ is the}$$

eigenvalue of

$$\left[\left(\frac{L_R}{L_s} \right)^2 g h \frac{d^2}{dk^2} + i(\bar{\epsilon} - \bar{\omega}) \frac{K^2}{\pi^2} - i\epsilon_0 \right] \bar{\phi}(k) = 0. \quad (6A)$$

This case is then reduced to that of Eqs. (3A) and (4A) and the discussion of the stability follows the same line. We notice that the growth rate, $\text{Re}[\bar{\epsilon}]$, is now composed by $\text{Re}[\bar{\epsilon}_0]$, which is due to the effects of shear, and by the part due to the unfavorable curvature. The second part, for a sizable amount of shear, is negligible, so that the results for the case of average "favorable" curvature are recovered.

- [1] FURTH, H. P., KILLEEN, J., and ROSENBLUTH, M. N., Phys. Fluids 6, 456 (1963).
- [2] COPPI, B., Phys. Rev. Letters 12, 417 (1964).
- [3] SPITZER, Jr., L., 2nd U.N. Conf. Peaceful Uses, 32, 181 (1958).
- [4] FURTH, H. P., and ROSENBLUTH, M. N., Phys. Fluids 7, 764 (1964), and Lecture Notes at the International Centre for Theoretical Physics (IAEA, Trieste, 1964)..
- [5] ROBERTS, K. V., and TAYLOR, J. B., Phys. Fluids 8, 315 (1965).
- [6] BATNAGAR, P. F., GROSS, E. P., and KROOK, M., Phys. Rev. 94, 511 (1954).
- [7] ROSENBLUTH, M. N., KRALL, N. A., and ROSTOKER, N., Nucl. Fusion Suppl., Part 1, 143 (1962).
- [8] MIKHAILOVSKII, A. B. and POGUTSE, O. P., Soviet Phys. Doklady 9, 379 (1964) (Doklady Ak. Nauk SSSR 156, 64, 1964).
- [9] COPPI, B., Proceedings of the Conference on "Non-Equilibrium Thermodynamics and Stability" (University of Chicago Press 1965, in press).
- [10] COPPI, B., GREENE, J. M., and JOHNSON, J. L., Report Matt. 326 (Princeton University 1965), or COPPI, B., Phys. Rev. Letters, 12, 6 (1964).
- [11] KRALL, N. A. and ROSENBLUTH, M. N., Report GA-5729 (General Atomic, San Diego) to appear in Phys. Fluids.
- [12] COPPI, B., and ROOS, B. W., Report GA-6581 (General Atomic, 1965).
- [13] GREENE, J. M. and COPPI, B., Report Matt. 355 (Princeton University, 1965) (in press for Phys. Fluids).
- [14] JUKES, P. F., Phys. Fluids 7, 1468 (1964).
- [15] STRINGER, T. E., Bull. Am. Phys. Soc. 10, 208 (1965).
- [16] FURTH, H. P., KILLEEN, J., ROSENBLUTH, M. N., and COPPI, B., 2nd Conf. Plasma Phys. and Nucl. Fusion, Paper CN 21/106, Culham (1965).

STABILITY OF NON-UNIFORM PLASMA IN A MAGNETIC FIELD GRADIENT

J.D. JUKES

UNITED KINGDOM ATOMIC ENERGY AUTHORITY,
THE CULHAM LABORATORY,
ABINGDON, BERKS., ENGLAND

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

STABILITY OF NON-UNIFORM PLASMA IN A MAGNETIC FIELD GRADIENT. Both shear Alfvén waves and electroacoustic waves become strongly distorted at very low frequencies in a low pressure plasma having a density gradient ∇n confined by a strong magnetic field. These waves can become unstable (either hydrodynamically, or because of resonance with electrons moving along field lines) when finite ion orbit size is taken into account. This paper considers additionally the effect of a gradient in the magnetic field B , which may form a magnetic well, for example with $\nabla n \cdot \nabla B < 0$. Particular attention is paid to the situation where the ion temperature T_i much exceeds the electron temperature T_e as with an injected plasma. In this case the magnetic well is shown to have a pronounced stabilizing effect on the above waves. The stability condition can be written

$$1 + (T_i/T_e)(n/\nabla n)(\nabla B/B) < 0.$$

In the unstable case $\nabla n \cdot \nabla B > 0$ one recovers the well known flute instabilities ($k_{\parallel} = 0$) which may be stabilized by finite ion Larmor radius a_i if k_{\perp} is quantized and thereby greater than a certain critical value. However, there arise additionally less rapidly growing instabilities whose growth rate γ tends to

$$\left| \frac{\nabla n}{n} \right| \left(\frac{T_e}{m_i T_i} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{k_{\perp}^2 a_i^2}{2} + \frac{T_i}{T_e} \frac{n}{\nabla n} \frac{\nabla B}{B} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

for $1 > k_{\perp}^2 a_i^2 > \beta m_i/m_e$ with finite, though small, k_{\parallel} . These predictions are compared with experiment. The stability conditions required in closed, toroidal systems in which the magnetic field gradient alternates in sign along a field line are considered in some detail. It is shown that the half length L of a region of unfavourable gradient should not exceed $\sim (T_i/T_e)(n/\nabla n)$.

STABILITE D'UN PLASMA NON UNIFORME DANS UN GRADIENT DE CHAMP MAGNETIQUE. Les ondes croisées d'Alfvén et les ondes électro-acoustiques sont fortement déformées aux très basses fréquences dans un plasma à basse pression possédant un gradient de densité ∇n et confiné par un champ magnétique puissant. Ces ondes peuvent devenir instables (soit hydrodynamiquement, soit à cause d'une résonance avec des électronnes se déplaçant le long des lignes de force), lorsqu'on prend en considération la dimension finie des orbites des ions. Dans ce mémoire, l'auteur étudie en outre l'effet d'un gradient de champ magnétique B pouvant former un puits magnétique, par exemple avec $\nabla n \cdot \nabla B < 0$. Il considère des distributions de vitesses des ions dans l'espace des vitesses qui représentent de manière approchée la situation dans une machine à miroirs dans laquelle on injecte des ions dont l'énergie moyenne T_i dépasse largement T_e . Dans ce cas, le puits magnétique a un effet stabilisateur marqué sur les ondes mentionnées plus haut. La condition de stabilité peut d'écrire

$$1 + (T_i/T_e)(n/\nabla n)(\nabla B/B) < 0.$$

Dans le cas où il n'y a pas de stabilité ($\nabla n \cdot \nabla B > 0$) on retrouve les instabilités en cannelures bien connues ($k_{\parallel} = 0$), qui peuvent être neutralisées au moyen d'une dimension finie rayon de Larmor a_{\perp} , si k_{\perp} est quantifiée

et par conséquent plus grand qu'une certaine valeur critique. Toutefois, il se produit des instabilités supplémentaires qui croissent moins rapidement, dont la vitesse de croissance γ tend vers

$$\left| \frac{\nabla n}{n} \right| \frac{T_e}{(m_i T_i)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{k_{\perp}^2 a_i^2}{2} + \frac{T_i}{T_e} \frac{n}{\nabla n} \frac{\nabla B}{B} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

pour $1 > k_{\perp}^2 a_i^2 > \beta m_i / m_e$ où k_{\parallel} est fini bien que petit. Les auteurs comparent ces prévisions aux résultats de l'expérience. Ils examinent en détail les conditions de stabilité nécessaires dans des systèmes toriques fermés où le gradient du champ magnétique change de signe le long d'une ligne de champ. Ils montrent que la demi-longueur d'une région de gradient défavorable ne devrait pas dépasser $\approx (T_i/T_e)(n/\nabla n)$.

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ГРАДИЕНТА МАГНИТНОГО ПОЛЯ. Альфеновские волны сдвига и электроакустические волны сильно искажаются при очень низких частотах в плазме с небольшим давлением, имеющей градиент плотности ∇n и удерживаемой сильным магнитным полем. Эти волны могут стать неустойчивыми (либо гидродинамически, либо ввиду наличия резонанса с электронами, движущимися вдоль линий поля), когда учитывается конечность размера орбиты иона. Рассматривается влияние градиента магнитного поля B , создающего магнитную яму, например с $\nabla n \cdot \nabla B < 0$. Рассматривается распределение ионов в пространстве скоростей, аппроксимирующую то, которое осуществляется в зеркальной машине с инъекцией ионов, где средняя энергия ионов T_i значительно превосходит T_e как в случае инжекторированной плазмы. В этом случае магнитная яма оказывает заметное стабилизирующее воздействие на указанные выше волны. Условие устойчивости можно записать как

$$1 + (T_i/T_e)(n/\nabla n)(\nabla B/B) < 0.$$

В случае неустойчивости ($\nabla n \cdot \nabla B > 0$) получаются хорошо известные желобковые неустойчивости ($k_{\parallel} = 0$), которые можно стабилизировать при конечной орбите ионов a_i , если k_{\perp} принимает дискретные значения и тем самым превосходит некоторое критическое значение. Однако при этом дополнительно возникают менее быстро растущие неустойчивости, скорость роста которых стремится к

$$\left| \frac{\nabla n}{n} \right| \frac{T_e}{(m_i T_i)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{k_{\perp}^2 a_i^2}{2} + \frac{T_i}{T_e} \frac{n}{\nabla n} \frac{\nabla B}{B} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

для $1 > k_{\perp}^2 a_i^2 > \beta m_i / m_e$ с конечным, хотя и небольшим значением k_{\parallel} . Данные прогнозы сравниваются с экспериментом. Довольно детально рассматриваются условия устойчивости, необходимые для замкнутых тороидальных систем, в которых градиент магнитного поля чередуется по знаку вдоль линии поля. Показывается, что половинная длина L области неблагоприятного градиента не должна превышать $\approx (T_i/T_e)(n/\nabla n)$.

ESTABILIDAD DE UN PLASMA NO UNIFORME EN UN GRADIENTE DE CAMPO MAGNETICO. Las ondas cruzadas de Alfvén y las ondas electroacústicas sufren una fuerte distorsión a frecuencias muy bajas, en un plasma a presión reducida con un gradiente de densidad ∇n , confinado por un campo magnético intenso. Estas ondas pueden convertirse en inestables (hidrodinámicamente, o por resonancia con electrones que se desplazan a lo largo de las líneas de fuerza) cuando se tiene en cuenta el tamaño finito de las órbitas de los iones. El autor estudia además el efecto de un gradiente en el campo magnético B , que puede formar un pozo magnético, por ejemplo, con $\nabla n \cdot \nabla B < 0$. Considera en particular el caso en que la temperatura iónica, T_i , es muy superior a la temperatura electrónica, T_e , como suele ocurrir en un plasma inyectado. En este caso, demuestra que el pozo magnético ejerce un pronunciado efecto estabilizador sobre las ondas mencionadas. La condición de estabilidad puede exponerse en la forma

$$1 + (T_i/T_e)(n/\nabla n)(\nabla B/B) < 0.$$

En el caso inestable ($\nabla n \cdot \nabla B > 0$), se vuelven a encontrar las conocidas inestabilidades en estrías ($k_{\parallel} = 0$), que pueden ser estabilizadas por el radio iónico finito de Larmor a_i si k_{\perp} está cuantificado siendo, por consiguiente,

mayor que cierto valor crítico. Sin embargo, surgen inestabilidades suplementarias que crecen más lentamente, cuya velocidad de crecimiento y tiende a

$$\left| \frac{\nabla n}{n} \right| \frac{T_e}{(m_i T_i)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{k_{\perp}^2 a_i^2}{2} + \frac{T_i}{T_e} \frac{n}{\nabla n} \frac{\nabla B}{B} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

para $k_{\perp}^2 a_i^2 > 8 m_i/m_e$ con k_{\parallel} finito, aunque pequeño. El autor compara estas predicciones con los resultados experimentales. Considera en particular las condiciones de estabilidad necesarias en los sistemas toroidales cerrados, en que el gradiente del campo magnético cambia de signo a lo largo de una línea de fuerza. Demuestra que la semilongitud L de una región de gradiente desfavorable no debe exceder $\approx (T_i/T_e)(n/\nabla n)$.

1. Introduction

In a comprehensive series of theoretical papers [1,2,3,4,5,6] it has been shown that a low pressure plasma with a density gradient in a very nearly uniform magnetic field is unstable to various drift waves which can arise outside the usual approximate hydrodynamic description. The slight departure of the velocity distribution of the electrons from Maxwellian, which is necessary to produce the drift current, is generally sufficient to incur a universal instability. Moreover, the resultant anomalous diffusion arising from a quasi-linear development of the instability becomes intolerably large [7].

In this paper we shall consider the effect of certain stabilizing magnetic field devices on a contained plasma which involve having either:

- (a) positive field gradients everywhere (as in an open cusp, or a 'minimum B' mirror trap),
- (b) strongly sheared fields (as in a pinch or 'levitron'),
- or (c) alternating field gradient in which the mean gradient is predominantly positive and in which the negative, destabilizing field gradient occurs in only short spans connecting longer, positively stable regions of positive field gradient (as in toroidal, 'mean minimum B' system [8]).

Such ideas are not, of course, novel, but here we are particularly concerned with a contained plasma in which the ion temperature T_i much exceeds the electron temperature T_e . Such a situation occurs naturally with gun and neutral beam injected plasmas and it will be shown that in this condition plasma is more amenable to the stabilizing influences already mentioned. Indeed, stabilization should be possible in practice with $T_i > 0(10)T_e$. (This requirement is even compatible with fusion containment times if $T_i \sim 100$ keV.)

For a description of the plasma we use the Vlasov equation for both ions and electrons, which enables us to take account of such effects as Landau damping (and its inverse leading to instability,) and finite Larmor radius. Collisional effects and therefore resistive instabilities are neglected, but we consider these to be of secondary importance in low density and high temperature plasma where the collision times are long^[9]. For a description of the magnetic field we assume a simple model in which the field lines are to a first approximation straight and parallel in planes with a weak gradient in field strength normal to their direction. The presence of the field gradient is then taken into account through the drifting effect it has on the unperturbed particle motions. The wavelike perturbations which can arise are considered in the phase integral approximation. This is a valid description if the wavelength is short compared to the scale length over which the density of plasma changes or the scale length along the field lines over which the perpendicular gradient changes.

Although this paper is principally concerned with the stabilization of plasma in a closed (e.g. toroidal) containment system it is also possible to use the results to explain instabilities observed experimentally in isolated plasma in an open system (e.g. mirror containment in a simple, unstable mirror geometry). In this case we find it necessary to postulate a polarization of the plasma which permits effective wavelengths considerably in excess of the plasma dimension along the field lines.

2. The Basic Linearized Equations.

In this section we shall derive the dispersion equation for low frequency oscillations of a low pressure plasma having a density gradient confined in a weakly non uniform magnetic field. We follow the usual method of linearizing the Vlasov equation and solving it in conjunction with Maxwell's equations. For simplicity we assume that the magnetic field is nearly uniform and that the field lines are straight in a yz -plane with a weak gradient of field strength in the x -direction. Previously it has often been the custom to simulate the effect of a field gradient on the particles of the plasma with a gravitational field^[2,5]. We shall not follow this custom, but will instead use the unperturbed motions of the particles in a magnetic field gradient.

We consider a distribution function f_{0j} for the equilibrium for each species ($j = i, e$, ions, electrons) in a reference frame in which the equilibrium electric field vanishes. The unperturbed

magnetic field \underline{B}_0 is locally in the z direction, but may rotate slowly as we move in the x direction normal to the plane containing \underline{B}_0 .

Let us choose

$$f_{ij} = n_0 \left(1 - \frac{\epsilon v_y}{\Omega_j}\right) \left(\frac{m_j}{2\pi T_j}\right)^{3/2} \exp - m_j (v_x^2 + v_z^2)/2T_j , \quad (1)$$

where n_0 is the particle density, $\epsilon = - \frac{dn_0}{dx}$ and m_j is the particle mass we define the gyro frequency $\Omega_j \equiv B_0 e_j / m_j$ and $v_j \equiv \sqrt{2T_j/m_j}$ in terms of the temperature T_j . Quantities across the magnetic field are given the suffix \perp , thus $v_\perp^2 = v_x^2 + v_z^2$.

Perturbed quantities, denoted by suffix 1, are assumed to vary as $\exp i(k_x x + \omega t)$, however, when the unperturbed quantities vary slowly in the spatial direction x we use the phase integral approximation $\exp i \int^x k_x dx + i\omega t$. The linearized Vlasov equation is

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla f_{ij} + \frac{e_j (v \times \underline{B}_0)}{m_j} \frac{\partial f_{ij}}{\partial v} = - \frac{e_j}{m_j} (\underline{E}_1 + \underline{v} \times \underline{B}_1) \frac{\partial f_{ij}}{\partial v} . \quad (2)$$

In discussing the stability of a low pressure plasma we are only concerned with so called convective motions which are either quasi-electrostatic, or else bend the field lines without compressing them. For these motions the perturbed electromagnetic quantities are derivable from two scalar quantities, thus $\underline{E}_{1\perp} = - \nabla_\perp \psi$, $\underline{E}_{1z} = - \nabla_z \phi$ and $\underline{B}_1 = \frac{i}{\omega} \text{curl } \underline{E}_1$. Using these substitutions and the relation $\frac{d}{dt} = i(\omega + k_x x)$, equation (2) may be integrated along particle orbits to give

$$f_{ij} = - \frac{e_j}{T_j} \left\{ \psi + S \left(\psi + \frac{k_x v_z}{\omega} [\psi - \phi] \right) \left(\frac{\epsilon k_j T_j}{\omega B_0 e_j} - 1 \right) \right\} \cdot (\pi v_j^2)^{-3/2} \exp - (v_x^2 + v_z^2)/v_j^2 , \quad (3)$$

where

$$S \equiv i\omega \exp - i(k_x x + \omega t) \int_{-\infty}^t dt' \exp i(k_x x(t') + \omega t') . \quad (4)$$

In the definition of s the integration is along unperturbed particle orbits and it is assumed that $\text{Im } \omega < 0$. For $\text{Im } \omega \geq 0$ the analytic continuation is required. The particle orbits are given by

$$\begin{aligned} x' - x &= [\sin \theta - \sin(\theta - \Omega_j t')] v_i / \Omega_j, \\ y' - y &= -[\cos \theta - \cos(\theta - \Omega_j t')] v_i / \Omega_j + V_j t', \end{aligned} \quad (5)$$

where $V_j \equiv \frac{v_i^2}{2\Omega_j} \frac{dB_0}{B_0 dx}$ is the vB_0 drift velocity,

and $z' - z \equiv v_z t'$.

Thus for low frequency oscillations $\omega \ll \Omega_j$,

$$s = \omega \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{J_0(k_z v_z / \Omega_j) J_p(k_z v_z / \Omega_j) \exp ip(\theta - \sigma)}{(\omega + k_z v_z + k_y V_j)}, \quad (6)$$

where $\sigma = \sin^{-1} k_y / k_z$ and $\theta = \sin^{-1} v_y / v_z$.

To obtain a dispersion equation we write Maxwell's equations in the form ($c \equiv 1$)

$$(4\pi\omega)^{-1} k_z k_z^2 (\phi - \psi) = J_{iz} = \sum e_i \int f_{ij} v_z du, \quad (7)$$

and

$$0 = \sum e_i \int f_{ij} du. \quad (8)$$

and then substitute for f_{ij} from equations (3) and (6). In these equations the summation is over both species and in equation (8) it is assumed that the density is high enough for the Debye length to be negligible. For convenience we define the gyro radius

$a_j \equiv v_j / |\Omega_j|$ and magnetic gradient $\mu \equiv \frac{dB_0}{B_0 dx}$. The drift frequency

ω_* for electrons is defined by $\omega_* \equiv -\frac{ekT_e}{B_0 |e|}$. We shall henceforth

assume that $k_z v_e = 0$ and in this section we shall also assume that $k_z v_i / \omega \ll 0$ while $k_y v_j / \omega$ and $k_\perp a_i$ are small compared to unity. The dispersion equation takes on a different form according to whether $\omega/k_z v_e \gtrless 1$. Thus in the approximation $\omega/k_z v_e \gg 1$ we obtain

$$\frac{k_z^2 v_A^2}{k_z^2 v_e^2} = \frac{\left(\omega^2 + \frac{T_i}{T_e} \omega_* \omega - \frac{2(T_i + T_e) \epsilon_0 k_y^2}{m_i k_\perp^2}\right)(1 + A - \frac{\omega_*}{\omega})}{\left(1 - \frac{\omega_*}{\omega}\right)}, \quad (9)$$

where $v_A^2 \equiv B_0^2/4\pi n_0 m_i$ and $A \equiv \frac{k_z^2 a_i^2 v_{Ae}^2 m_i}{2T_i}$. This equation, representing a distorted Alfvén wave, is essentially equivalent to one obtained in [6] except that equation (9) contains the effect of the ∇B_0 drift term. When $k_z = 0$ and $k_y = k_\perp$ it reduces to the equation of Rosenbluth et.al. [2] except that their g term is replaced by the physically more appropriate ∇B_0 term.

The dispersion equation when $\omega \ll k_z v_e$ and electron resonance terms become important and with ∇B_0 terms included is

$$0 = \left(\frac{\omega_*}{\omega} - 1\right) + \left[\frac{\omega^2}{k_z^2 v_A^2} \left(1 - \frac{\omega_*}{\omega}\right) - \frac{k_\perp^2 a_i^2 T_e}{2T_i} \right] \left[\left(1 + \frac{T_i \omega_*}{T_e \omega}\right) \left(1 + \frac{\mu k_y v_i}{\omega k_\perp^2 a_i}\right) \right] \\ + \frac{i\sqrt{\pi} \omega}{k_z v_e} \left(1 - \frac{\omega_*}{\omega}\right) \left[1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 v_A^2} \left(1 + \frac{T_i \omega_*}{T_e \omega}\right) \left(1 + \frac{\mu k_y v_i}{\omega k_\perp^2 a_i}\right) \right]. \quad (10)$$

3. Stability in a Parallel Field

The stability of the distorted waves described by equation (9) has been discussed in reference [2] for the case $k_z = 0$ and in reference [6] for $k_z \neq 0$, but $\mu = 0$. In the latter case let us now consider the modification when $\mu \neq 0$. Equation (9) is basically

a cubic in ω , but when $T_i \gg T_e$ it simplifies to a quadratic in the region $\omega \approx \omega_*$:

$$(A+1) \left(\frac{\omega}{\omega_*} \right)^2 + (\overline{A+1} G - K - 1) \frac{\omega}{\omega_*} + K - G = 0, \quad (11)$$

where $K \equiv \frac{k_z^2 v_A^2 T_e}{\omega_*^2 T_i}$, $G \equiv -2 \frac{\mu}{\epsilon} \frac{T_i}{T_e} / k_z^2 a_i^2$.

When $K = 2A + 1 + (A + 1)G$ we find that

$$\frac{\omega}{\omega_*} = 1 \pm i \left[\frac{(1+G)A}{1+A} \right]^{1/2}, \quad (12)$$

and that unstable waves are possible unless $1 + G < 0$. This result essentially includes that of Mikhailovsky and Rudakov [6] ($G \geq 0$), but now we note the possibility of stabilization if G is sufficiently negative, i.e. in a positive gradient field satisfying

$$1 + \frac{\nabla B_0}{B_0} \frac{n_0}{\nabla n_0} \frac{T_i}{T_e} < 0 \quad (13)$$

There is one additional condition to be satisfied by such waves, namely $K \approx 1$, $\omega \approx \omega_* \gg k_z v_e$, which together requires $\frac{\beta m_i}{m_e} \ll 1$, where

$$\beta \equiv 8\pi n_0 (T_i + T_e) / B_0^2.$$

In the case of an 'unstable' magnetic trap (with $G > 0$), where the above conditions are satisfied and where G and A both exceed unity, the growth rate γ reaches the constant value

$$\gamma \approx (2T_e/\epsilon\mu/m_i)^{1/2} \text{ if } 2\mu/\epsilon \frac{T_i}{T_e} > k_z^2 a_i^2 > \frac{\beta m_i}{m_e}, \quad (14)$$

independent of wavelength across the field and the real part of the frequency coincides with the electron drift frequency. We note that the growth rate is much less than that for pure flutes ($k_z = 0$) when $T_i \gg T_e$, and that the overstable wave drifts with the electron current. In comparison with the low pressure magnetic mirror experiment M.T.S.E. [10] operating in the unstable mode the value of

γ is $3 \cdot 10^5 \text{ sec}^{-1}$. This is in good agreement with that observed in the experiment, as is the angular phase velocity and sense of the rotating wave.

We now discuss the stability of the wave described by (10) for $\omega \ll k_z v_e$, looking particularly at frequencies $\omega \approx \omega_*$. Thus if $\omega = \omega_* (1 + \delta)$ where $|\delta| \ll 1$ we find

$$\delta \left[1 - \left(1 + G \right) \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) / K \right] = - \frac{k_z^2 a_i^2}{2} \left(1 + G \right) \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \left(1 + i \sqrt{\pi} \omega_* \right). \quad (15)$$

Thus the wave will be stable if either $1 + G < 0$, or $1 + G > K > 0$, and unstable otherwise. The conditions under which these approximations apply are that $k_{\perp} a_i < 1$ and $1 \gg \beta > m_e/m_i$, and here the least stable waves satisfy $K \geq 1$, i.e. $\omega/k_z < V_A \sqrt{T_e/T_i}$, and are therefore quasi-electrostatic with growth rate limited to

$$\gamma \approx |\omega_*| \frac{k_z^2 a_i^2}{2} \left(1 + G \right) \left(m_e / \beta m_i \right)^{1/2}.$$

Thus, whatever the phase velocity and density, this 'universal' instability may be stabilized by $1 + G \leq 0$, that is with a sufficiently large positive gradient of magnetic field satisfying (13). The results so far derived only apply when $k_{\perp} a_i < 1$; we shall discuss the case of shorter waves $k_{\perp} a_i > 1$ in section (6).

4. Stability in a Sheared Field.

The qualitative effect of a sheared field, i.e. one whose field direction rotates in a yz plane as x increases, is to increase the apparent value of k_z with x . Therefore we introduce a component k_{\parallel} parallel to the field lines and given by

$$k_{\parallel} = \int_0^x k_y \theta' dx + k_z(0), \quad (16)$$

where θ' is the rate of shear of the field lines in the x -direction. Assuming $k_z(0) = 0$ we replace k_z by $k_{\parallel} = x\theta' k_y$ and k_{\perp}^2 by $(k_y^2 - \frac{d^2}{dx^2})$ in preceding equations. Then equation (9) for the approximations $k_{\perp} a_i$ and $A \ll 1$ and $k_{\parallel} v_e \ll \omega$ becomes

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} - k_z^2 - \frac{2\varepsilon\mu(T_i + T_e) k_y^2 / m_i}{x^2 (k_y v_A \theta')^2 - \omega^2 - \omega \omega_* T_i / T_e} \right\} \psi = 0. \quad (17)$$

When $\omega = 0$ equation (17) is equivalent to Suydam's equation [11] for the simple pinch. It is possible to see [5] from equation (17) that $(\omega^2 + \omega \omega_* \frac{T_i}{T_e})$ can be negative and instabilities arise if

$$-\frac{2\varepsilon\mu(T_i + T_e)}{M_i v_A^2 \theta'^2} > \frac{1}{4} \quad (18)$$

which is equivalent to the violation of Suydam's criterion for pinch stability. However, we are here more concerned with waves which do not satisfy the simple and rather restrictive hydromagnetic approximations. For the instability associated with $\omega > k_{\parallel} v_e, k_{\perp} a_i \ll 1$, which was discussed in section (3), we neglect the G term so obtaining the eigenvalue equation.

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} - k_y^2 - \frac{\delta v_e^2 T_e}{a_i^2 v_A^2 T_e} \left(1 - \frac{\alpha^2 \theta'^2 k_y^2 v_A^2}{\omega_*^2 (1 + T_i/T_e)} \right) \right\} \psi = 0, \quad (19)$$

where $\omega = \omega_* (1 + \delta)$, $|\delta| \ll 1$. This is the harmonic oscillator equation and the condition for bound solutions $\psi \sim e^{-\alpha^2 x^2}$ is as $|x| \rightarrow \infty$ given by

$$\left(\frac{\delta v_e^2 T_i}{v_A^2 T_e} + k_y^2 a_i^2 \right)^2 + \delta \frac{(2p+1)^2 k_y^2 v_e^2 a_i^2 \theta'^2}{\omega_*^2 (1 + T_e/T_i)} = 0, \quad (20)$$

where $(p + \frac{1}{2})a^2 = \frac{-\delta v_e^2 T_i}{a_i^2 v_A^2 T_e} - k_y^2$, and p is an integer.

As may be seen from (20) the roots δ are always real and thus in contrast to the uniform field case even the smallest shear produces stable oscillations. However, in order that the perturbation be bounded within the plasma it is necessary that the shear exceed a certain finite value found by setting $a > \varepsilon$ and

assuming $k_y \gtrsim \varepsilon$, thus $\theta' \sim \frac{\omega_*}{v_A} \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\varepsilon}{k_y} \right)^2$ and a sufficient

condition for a bounded stable perturbation is

$$\frac{\theta'}{\varepsilon} \gtrsim \varepsilon a_i \sqrt{\frac{\beta T_e}{T_i}}. \quad (21)$$

For comparison, the Suydam condition (18) may be written $\frac{\theta'}{\varepsilon} > \sqrt{\frac{m_e}{\varepsilon}}$ in order of magnitude. Condition (21) applies only to a very low pressure plasma since the requirement that $\frac{\omega}{k_{\parallel} v_e} \sim \frac{\omega_* a}{k_y \theta' v_e} \gg 1$ together with (21) requires that $\beta m_i / m_e \ll 1$.

The stabilization of quasi electrostatic waves has been discussed elsewhere^[4] on the basis of the damping due to ion Landau resonance when $k_{\parallel} v_i \approx \omega$. One can expand ε about the point x_0 , where $|\varepsilon|$ is a maximum, $|\varepsilon| \approx \varepsilon(x_0) (1 - \varepsilon^2 \frac{x - x_0}{x_0})^2$ and the well width Δ is given by $\Delta^4 \approx a_i^2 / \varepsilon^2$. The condition for stabilization is that there should be ion Landau damping at $x = \pm \Delta$, viz., $\omega \approx \omega_* \approx \Delta k_y \theta' v_i$. The required shear for stabilization is therefore

$$\frac{\theta'}{\varepsilon} > \frac{T_e}{T_i} (\varepsilon a_i)^{\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

5. Stability in Closed Systems.

We now consider a closed toroidal system in which the field lines may thread successively through regions across which the field gradient alternates in sign, but remains in some average sense positive, i.e. stabilizing^[8]. Naturally overall stability depends upon having comparatively long spans of favourable positive gradient anchoring short spans wherein the gradient is unfavourable. Again we restrict discussion in this section to the case of longish wavelengths across the field satisfying $k_z a_i < 1$, and apply the phase integral approximation this time in the z direction by setting $k_z^2 \rightarrow -d^2/dz^2$. We also relax the assumption $k_z v_i / \omega \leq 0$ and expand in powers of $k_z v_i / \omega$. As indicated earlier, for moderate values of $\beta (> m_e/m_i)$ the most unstable waves are quasi-electrostatic, for which $\omega \ll k_z v_e$ and $\phi \approx \psi$. With these approximations the dispersion equation becomes

$$0 = \frac{k}{T_e} \left[1 - \left(1 - \frac{\omega_*}{\omega} \right) \frac{i\sqrt{\pi}\omega}{k_z v_e} \right] + 1 - \left(1 + \frac{\omega_* T_i}{\omega} \right) (P + iQ) \quad (23)$$

where

$$P+iQ = \frac{2}{\sqrt{\pi} v_i^3} \int_0^{+\infty} v_i dv_i \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \frac{J_0^2(k_z v_i / \Omega_i) \exp(-(v_i^2 + v_z^2)/v_i^2)}{(1 + \frac{k_z v_z}{\omega} + \frac{k_y a_i \mu v_i^2}{2 \omega v_i})} \quad (24)$$

and in terms of the expansions already indicated, $Q = 0$ and

$$P = 1 - \frac{k_x^2 a_i^2}{2} - \frac{\mu v_i k_y a_i}{2 \omega} + \frac{k_z^2 v_i^2}{2 \omega^2} + \dots$$

With $\omega = \omega_* (1 + \delta)$ the eigenvalue equation becomes

$$\left\{ \frac{v_i^2}{\omega_*^2} \frac{d^2}{dz^2} + k_x^2 a_i^2 - \frac{\mu T_i}{\epsilon T_e} + 2\delta \left(1 - i \frac{\sqrt{\pi} \omega_*}{|k_z| v_e} \right) \left(1 + T_e/T_i \right)^{-1} \right\} \psi = 0. \quad (25)$$

We divide δ into real and imaginary parts $\delta_R + i \delta_I$ then multiply equation (25) by $\bar{\psi}$, complex conjugate of ψ . Taking the imaginary part, after integrating by parts, gives

$$\omega_* \delta_I = \sqrt{\pi} \frac{\omega_*^2}{|k_z| v_e} \delta_R. \quad (26)$$

The real part $|\delta_R|$ is therefore $\gg |\delta_I|$ and equation (25) can be solved neglecting terms in δ_I .

We shall assume that in a region of unfavourable gradient ($\mu/\epsilon < 0$) the gradient is in the form of a parabolic well, $\mu = -\mu_0(1 - z^2/L^2)$, i.e. it is favourable again when $|z| > L$. Again the equation is that of an harmonic oscillator and the condition for bound solutions yields $\psi \sim e^{-\alpha^2 z^2}$ where

$$p + \frac{1}{2} = \left(k_x^2 a_i^2 + \frac{\mu_0 T_i}{\epsilon T_e} + 2\delta_R / (1 + T_e/T_i) \right) \frac{\omega_*^2}{\alpha^2 v_i^2}$$

and

$$\alpha^4 = 4 \frac{\mu_0}{\epsilon} \frac{T_i}{T_e} \frac{\omega_*^2}{L^2 v_i^2}, \quad p = 0, 1, \dots \quad (27)$$

The condition for stability ($\omega_* \delta_i > 0$) can therefore be derived from equations (26) and (27) as

$$\frac{(1+\epsilon/T_i)v_i}{|\omega_x|L} \left(\frac{\mu_0 T_i}{\epsilon T_e} \right)^{1/2} \geq k_{\perp}^2 a_i^2 + \frac{\mu_0 T_i}{\epsilon T_e}. \quad (28)$$

A rough criterion, assuming $\frac{\mu_0}{\epsilon} \frac{T_i}{T_e} \approx 1$, $k_{\perp} a_i < 1$ is therefore

$\epsilon L \frac{T_e}{T_i} < 1$. In the long spans of favourable gradient we may assume

$\mu \approx \mu_0$ is constant so that stability is achieved throughout if

$\frac{\mu_0}{\epsilon} \frac{T_i}{T_e} \approx 1$ and the unfavourable spans are shorter than $L \approx \frac{T_i}{\epsilon T_e}$.

6. Short Wave Oscillations ($k_{\perp} a_i \gg 1$)

Finally let us consider the case $k_{\perp} a_i \gg 1 \gg k_{\perp} a_e$, where only electrostatic waves are important. In evaluating the ion integral (24) we use the asymptotic form of J_0 and retain only the mean value in the integrand. We then evaluate the integral in two limits, $\mu = 0$ and $k_z = 0$. With $\mu = 0$, and $\xi \equiv \omega/k_z v_i$,

$$P+iQ = \left[2\xi e^{-\xi^2} \int_0^{\xi} e^{t^2} dt + i\sqrt{\pi} \xi e^{-\xi^2} \right] / \sqrt{\pi} k_{\perp} a_i. \quad (29)$$

At marginal stability the dispersion equation gives

$$\frac{T_i}{T_e} + 1 - P \left(1 + \frac{\omega T_i}{\omega T_e} \right) = 0 = \frac{\sqrt{\pi} \omega T_i}{k_z v_i T_e} \left(1 - \frac{\omega_x}{\omega} \right) + Q \left(1 + \frac{\omega_* T_i}{\omega T_e} \right). \quad (30)$$

Restricting discussion to the case $T_i \gg T_e$ we have approximately,

$$1 = \frac{\omega_* P}{\omega} \quad \text{and} \quad \frac{\sqrt{\pi} \omega}{k_z v_i} = Q.$$

Thus one obtains in terms of the parameter ξ

$$\sqrt{\pi} k_{\perp} a_i \frac{v_i}{v_e} = e^{-\xi^2},$$

$$\sqrt{\pi} k_z T_i / \epsilon T_e \sin \sigma = 2 e^{-\xi^2} \int_0^{\xi} e^{t^2} dt, \quad (k_y = k_{\perp} \sin \sigma) \quad (31)$$

and

giving the stability boundary of k_z against k_y, k_\perp . Thus when the magnetic field gradient is zero or small and negative, the drift wave is nevertheless stable if $k_z/\epsilon \geq T_e/T_i$, which is satisfied in a short span of length $L < T_i/\epsilon T_e$.

We now consider the case where the field gradient is positive and stabilizing while

$$\frac{k_z v_i}{\omega} \approx 0$$

as in the long spans. In this limit the ion integral is

$$P+iQ = -\frac{2h^2}{\pi k_\perp a_i} \int_0^\infty du e^{-u^2}/(u^2-h^2), \quad (32)$$

where $h^2 \equiv -\frac{2\omega}{\mu k_y a_i v_i}$ and $u \equiv v_\perp/v_i$. The integral is defined for

$\text{Im } h > 0$ (which is consistent with $2\pi > \arg h^2 > 0$). The result is

$$P+iQ = [2he^{-h^2} \int_0^{h^2} e^{t^2} dt - i\sqrt{\pi} h e^{-h^2}] / \sqrt{\pi} k_\perp a_i \quad (33)$$

As before, for $T_i \gg T_e$, marginal stability is given by the relations $\epsilon/\mu > 0$,

$$\sqrt{\pi} \mu k_\perp^2 a_i^2 v_i \sin \sigma / 2k_z v_e = h^{-1} e^{-h^2} \quad \text{and}$$

$$\sqrt{\pi} \mu k_\perp a_i T_i / \epsilon T_e = 2h^{-1} e^{-h^2} \int_0^{h^2} e^{t^2} dt.$$

For $h \approx 1$ we have $k_\perp a_i \approx \frac{\epsilon T_e}{\mu T_i}$. For $h > 1$ we see that $k_z \propto e^{h^2}$ and for $h < 1$ that $k_z \propto h$ with $k_\perp a_i$ varying only slowly with h . Thus

the stability boundary is roughly $k_\perp a_i \approx \frac{\epsilon T_e}{\mu T_i}$ for all $0 < k_z < \infty$.

The significance of this is that for $\frac{\mu T_i}{\epsilon T_e} \geq 1$ all values of $k_\perp a_i > 1$ may be stabilized for all k_z .

7. Conclusion

Drift instabilities, which arise in a plasma density gradient across a uniform magnetic field, are modified by having a transverse field gradient. For example, we have considered the stability in closed toroidal systems in which $\nabla n \nabla B$ alternates in sign along a field line but is predominantly favourable to stability. Dual stability conditions for all wavelengths can be summarised thus. In regions of favourable gradient $\nabla n \nabla B < 0$ it is required that

$1 + \frac{T_i}{T_e} \frac{\nabla B}{B} \frac{n}{\nabla n} < 0$, while in an unfavourable region $\nabla n \nabla B > 0$ the field lines should span only a short length $L < \frac{n}{\nabla n} \frac{T_i}{T_e}$.

The possibility of a practical design to satisfy these conditions would require $T_i \gg T_e$, by a factor of ten at least. At the other extreme T_i must not be so low that resistive instabilities become significant. The stability condition with $\nabla n \nabla B < 0$ may be no easier to satisfy practically than that for sheared field stabilization (22)

since one may assume $\theta \sim \mu$ and $(ea_i)^{\frac{1}{2}} \sim 1$. In a simple mirror machine with $\nabla n \nabla B > 0$ the predicted instability with $\nabla n \nabla B > 0$ is shown to agree with experiment.

References

- [1] Rudakov, L.I. and Sagdeev, R.Z. Nuclear Fusion Supp., No.2, 481, (1962).
- [2] Rosenbluth, M.N., Rostoker, N., and Krall, N.A., Nuclear Fusion Supp. No.1 143 (1962).
- [3] Kadomtsev, B.B. and Timofeev, A.V., DAN. SSSR, 146 581, (1962). Sov. Phys. Doklady 7, 826, (1963).
- [4] Galeev, A.A., ZETF, SSSR 44, 1920, (1963) Sov. Phys. JETP, 17, (6), 1292 (1963).
- [5] Mikhailovskaya, L.V. and Mikhailovsky, A.B., Nuclear Fusion 3, 113, (1963).
- [6] Mikhailovsky, A.B. and Rudakov, L.I., ZETF, 44, 912, (1963); Sov. Phys. JETP 17, (3), 621, (1963).
- [7] Galeev, A.A. and Rudakov, L.I., Sov. Phys. JETP, 18, (2), 444, (1964).
- [8] Furth, H.P. and Rosenbluth, M.N. Phys. Fluids, 7, (5), 764, (1964).
- [9] Jukes, J.D. Phys. Fluids, 7, (9), 1468, (1964).
- [10] Francis, G., Mason, D.W., and Hill, J.W. Nature, 203, 623 (1964).
- [11] Suydam, B. Proc. 2nd Conf. U.N. on Peaceful Uses of Atomic Energy Geneva, 31, 157, (1958).

DISCUSSION

M. ROSENBLUTH: The stability condition, (1), also applies to the resistive mode with favourable curvature discussed by Dr. Coppi*.

B. COPPI: I should like to add to what Dr. Rosenbluth has said. The temperature ratio preferred by Dr. Jukes does not tend to improve the stability condition for the mode that arises from the favourable curvature discussed in our paper*, since it reduces the relative influence of ion-ion collisions.

J. D. JUKES: My paper neglects all collisional effects, assuming in particular that T_i is very large, so that $\nu_{ii} \rightarrow 0$.

* These proceedings (CN-21/105).

B. BONNEVIER: According to your condition (1) the stability is better with $T_i/T_e \gg 1$ for one sign of the magnetic field gradient and better with $T_i/T_e \ll 1$ for the reverse sign of this gradient. What is the physical reason for this discontinuous jump in the temperature requirement for stability, and how does the system behave at infinite curvature (straight field lines)?

J. D. JUKES: The inequality (1) is a condition required for stability. If $\vec{\nabla}B \cdot \vec{\nabla}n > 0$ this condition cannot be satisfied for any value of T_i/T_e . Likewise $\vec{\nabla}B \equiv 0$ gives instability.

КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ВО ВНЕШНEM ВЫСОКОЧАСТОТНОM ЭЛЕКТРИЧЕСКОM ПОЛЕ

Ю. М. АЛИЕВ, Л. М. ГОРБУНОВ, В. П. СИЛИН и Х. УОТСОН (АНГЛИЯ)
ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. П. Н. ЛЕБЕДЕВА АН СССР, МОСКВА
СССР

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

OSCILLATIONS AND STABILITY OF PLASMA IN AN EXTERNAL HIGH-FREQUENCY ELECTRIC FIELD.

A theory is developed for the oscillations and stability of plasma in a strong external HF electric field. The kinetic equation with self-congruent reciprocity is linearized for weak deviations from the ground state. Since the latter depends on an external HF field, the linearized equation obtained has coefficients with a periodic time dependence. From this equation and also from Maxwell's equations there is derived a dispersion equation for plasma oscillations that represents the zero value of the infinite order determinant, and that is solved both for external field frequencies considerably exceeding the electron Langmuir frequency and for frequencies that are less. The external HF field changes the oscillation branches in a plasma without an external field, and also leads to a new low-frequency oscillation branch. Movement of particles in the HF field gives spatial dispersion. If the frequency of the field exceeds the electron Langmuir frequency, the plasma oscillations are stable. At frequencies less than this level there occurs a build-up of low-frequency oscillations. Here the maximum of the build-up occurs when the external field frequencies approach the electron Langmuir frequency and is equal to the product of the Langmuir frequency and the one-third power of the electron-ion mass ratio. Away from the resonance, the increment of build-up has the same order of magnitude as the ion Langmuir frequency.

An external magnetic field increases the number of possible natural plasma oscillations and thereby increases the possibility of resonance with the external HF field. Allowance for the thermal motion of the particles enables one to determine the attenuation of the oscillations in question. Expressions for the decrements are derived. The effect of the external HF field on a plasma in which there are beams is also discussed. An HF field has a destabilizing effect on a system of this kind, since on the one hand there can be a build-up of fresh, low-frequency oscillation branches (which are in fact characteristic of plasma in an HF field) and on the other hand the increments are increased and the region of instability is broadened for some waves which could also exist in plasma without an external field. However, an external HF field stabilizes a plasma in which there is relative motion of electrons and ions by narrowing the region of instability and reducing the increments in wave build-up.

OSCILLATIONS ET STABILITÉ D'UN PLASMA SITUÉ DANS UN CHAMP ELECTRIQUE EXTERNE DE HAUTE FREQUENCE. Les auteurs ont mis au point une théorie des oscillations et de la stabilité d'un plasma situé dans un champ électrique externe de haute fréquence particulièrement puissant. L'équation cinétique avec réciprocité auto-consistante a été linéarisée en ce qui concerne les faibles écarts par rapport à l'état fondamental. Comme ce dernier dépend d'un champ externe H. F., l'équation linéarisée ainsi obtenue a des coefficients qui dépendent périodiquement du temps. En partant de cette équation et également des équations de Maxwell, on obtient une équation de dispersion pour les oscillations du plasma, qui représente la valeur zéro du déterminant d'ordre infini et qui peut être résolue à la fois pour les fréquences du champ externe de haute fréquence dépassant de beaucoup la fréquence de Langmuir des électrons et pour les fréquences inférieures à cette dernière. Un champ externe H. F. modifie l'apparence des branches d'oscillations qui existent dans le plasma sans champ externe et entraîne également l'apparition d'une nouvelle branche d'oscillations de basse fréquence. Le mouvement des particules sous l'effet du champ H. F. est la cause de l'apparition d'une dispersion spatiale. Si la fréquence du champ dépasse la fréquence de Langmuir des électrons, les oscillations du plasma sont stables. A des fréquences inférieures à ce niveau il se produit un accroissement des oscillations de basse fréquence. En pareil cas, l'incrément d'accroissement d'oscillation est maximum lorsque la fréquence du champ externe se rapproche de la fréquence de Langmuir des électrons et est égal au produit de la fréquence de Langmuir des électrons et du rapport de la masse des électrons à celle des ions à la puissance un tiers. A l'extérieur de

l'intervalle de résonance, l'incrément d'accroissement d'oscillation est du même ordre de grandeur que la fréquence de Langmuir des ions.

Un champ magnétique externe augmente le nombre des oscillations naturelles du plasma qui peuvent se produire et, par là-même, augmente les possibilités de résonance avec le champ externe H. F. Si l'on tient compte du mouvement thermique des particules, il s'en suit une atténuation des oscillations observées. Les auteurs ont obtenu des expressions pour les décréments. Ils ont examiné également l'influence du champ externe H. F. sur un plasma dans lequel se trouvent des faisceaux. Un champ H. F. a un effet déstabilisateur sur un système de ce genre, car, d'une part, de nouvelles branches d'oscillations de basse fréquence — qui sont justement caractéristiques des plasmas dans un champ de H. F. — peuvent apparaître, et d'autre part, les incréments augmentent et la zone d'instabilité s'élargit pour certaines ondes qui pourraient aussi exister dans un plasma sans champ externe. Toutefois, un champ externe H. F. stabilise un plasma dans lequel il existe un mouvement relatif des électrons et des ions en rétrécissant la zone d'instabilité et en réduisant les incréments d'accroissement.

КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ВО ВНЕШНEM ВЫСОКОЧАСТОТНОM ЭЛЕКТРИЧЕСКОM ПОЛЕ. Развита теория колебаний и устойчивости плазмы, находящейся в сильном внешнем высокочастотном электрическом поле. Кинетическое уравнение с самосогласованным взаимодействием линеаризуется по слабым отклонениям от основного состояния. Поскольку последнее зависит от внешнего высокочастотного поля, то получившееся линеаризованное уравнение имеет коэффициенты, периодически зависящие от времени. Из этого уравнения, а также уравнений Максвелла, получено дисперсионное уравнение для колебаний плазмы, которое представляет собой равенство нулю определителя бесконечного ранга. Это дисперсионное уравнение решается, как для случая частот внешнего высокочастотного поля значитель но превышающих электронную ленгмюровскую частоту, так и для частот меньше электронной ленгмюровской. Наличие внешнего высокочастотного поля видоизменяет ветви колебаний, существующие в плазме без внешнего поля, а также приводит к появлению новой низкочастотной ветви колебаний. Движение частиц под влиянием высокочастотного поля является причиной появления пространственной дисперсии.

Если частота высокочастотного поля превышает электронную ленгмюровскую, то колебания плазмы устойчивы. При частотах меньше электронной ленгмюровской имеет место раскачка низкочастотных колебаний. При этом максимальный инкремент раскачки возникает при приближении частоты внешнего поля к ленгмюровской электронной частоте и равен произведению ленгмюровской частоты электронов на отношение масс электрона и иона в степени одна треть. Вдали от резонанса инкремент раскачки имеет порядок величины ленгмюровской частоты ионов.

Присутствие внешнего магнитного поля увеличивает число возможных собственных колебаний плазмы, и, тем самым, расширяет возможности для резонанса с внешним высокочастотным полем. Учет теплового движения частиц приводит к затуханию рассмотренных колебаний. Получены выражения для декрементов. Рассмотрено также влияние внешнего высокочастотного поля на плазму, в которой имеются пучки. Высокочастотное поле оказывает дестабилизирующее влияние на такую систему, поскольку в ней с одной стороны могут раскачиваться новые ветви низкочастотных колебаний, характерные именно для плазмы в высокочастотном поле, а с другой стороны увеличиваются инкременты и расширяется область неустойчивости для некоторых волн, которые могли существовать в плазме и без внешнего поля. Однако, плазму, в которой имеется относительное движение электронов и ионов внешнее высокочастотное поле стабилизируют, сужая область неустойчивости и уменьшая инкременты раскачки волн.

OSCILACIONES Y ESTABILIDAD DE UN PLASMA SITUADO EN UN CAMPO ELECTRICO EXTERNO DE ALTA FRECUENCIA. Los autores han desarrollado una teoría de las oscilaciones y estabilidad de un plasma situado en un campo eléctrico externo de alta frecuencia y elevada intensidad. La ecuación cinética de reciprocidad autocongruente se hace lineal para pequeñas desviaciones con respecto al estado básico. Como este último depende de un campo externo de alta frecuencia, la ecuación lineal obtenida tiene coeficientes que son función periódica del tiempo. A partir de esta ecuación, así como de la ecuación de Maxwell, se ha obtenido una ecuación de dispersión para las oscilaciones del plasma, que representa el valor cero del determinante de orden infinito. Esta ecuación de dispersión puede resolverse tanto para las frecuencias de un campo externo de alta frecuencia que exceden considerablemente la frecuencia electrónica de Langmuir como para las frecuencias inferiores a esta última. Un campo externo de alta frecuencia modifica las ramas de las oscilaciones existentes en un plasma sin campo externo, y da lugar también a la aparición de una nueva rama de oscilaciones de alta frecuencia. El movimiento de las partículas bajo la influencia de un campo de alta frecuencia origina

una dispersión espacial. Si la frecuencia del campo de alta frecuencia es superior a la frecuencia electrónica de Langmuir las oscilaciones del plasma son estables. A frecuencias inferiores tiene lugar un desplazamiento brusco de las oscilaciones de baja frecuencia. En este caso, el incremento máximo del desplazamiento se produce cuando la frecuencia del campo externo se acerca a la frecuencia electrónica de Langmuir y es igual al producto de la frecuencia electrónica de Langmuir por un tercio de la razón masa del electrón a masa del ion. Fuera de la región de resonancia, el incremento del desplazamiento es del mismo orden de magnitud que la frecuencia iónica de Langmuir.

Un campo magnético externo aumenta el número de oscilaciones posibles del plasma y aumenta por tanto la posibilidad de que se produzca una resonancia con el campo externo de alta frecuencia. Si se tiene en cuenta el movimiento térmico de las partículas se llega a una atenuación de las oscilaciones observadas. Los autores han obtenido las expresiones para los decrementos. En la memoria se estudia también la influencia ejercida por el campo externo de alta frecuencia sobre un plasma que posee haces. El campo de alta frecuencia ejerce una influencia inestabilizadora en un sistema de este tipo, en primer lugar porque pueden producirse nuevas ramas de oscilaciones de baja frecuencia -que en realidad son características de un plasma en un campo de alta frecuencia- y en segundo lugar porque aumenta los incrementos y ensancha la región de inestabilidad para ciertas ondas que pueden existir también en un plasma sin campo externo. De todas formas, un campo externo de alta frecuencia estabiliza un plasma en el que existe un movimiento relativo de electrones e iones, estrechando la región de inestabilidad y disminuyendo los incrementos del desplazamiento de las ondas.

I. Введение и краткое резюме

В экспериментах по радиационному ускорению плазмы I приходится сталкиваться с такой ситуацией, в которой внешнее электрическое поле определяет качественную картину движения электронов. Как легко понять, это осуществляется тогда, когда скорость осцилляций электронов во внешнем поле $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega_0 t$ превышает тепловую скорость. Последнее имеет место при выполнении неравенства

$$\frac{E_0^2}{4\pi} > \left(\frac{\omega_0}{\omega_{ce}}\right)^2 N_e T_e \quad (I.I)$$

где T_e - температура электронов, N_e - число электронов в I см³, а $\omega_{ce} = (4\pi e^2 N_e / m)^{1/2}$ - ленгмюровская частота электронов. Очевидно, что при выполнении неравенства (I.I) спектры колебаний плазмы могут существенно зависеть от внешнего электрического поля. Особенно простой теория колебаний плазмы во внешнем электрическом поле оказывается в условиях, когда можно полностью пренебречь тепловым движением частиц. Ниже мы изложим некоторые результаты именно такого гидродинамического рассмотрения холодной плазмы.

Всюду ниже внешнее поле будет считаться пространственно однородным. Это означает, что изучаемые нами длины волн колебаний плазмы малы в сравнении с характерными размерами неоднородности внешнего электрического поля. В частности, если например, частота внешнего поля меньше электронной ленгмюровской, то длины волн рассматриваемых ниже колебаний плазмы должны быть меньше глубины скин-слоя (C/ω_{ce}), где C - скорость света.

Ограничимся рассмотрением потенциальных колебаний. Ниже показано, что благодаря наличию внешнего высокочастотного электрического поля и соответствующего ему относительного движения электронов и ионов в плазме, возникает новая ветвь колебаний. При этом если частота внешнего поля существенно превышает электронную ленгмюровскую, то такая новая ветвь соответствует не нарастающим во времени волнам. Напротив, при меньших частотах внешнего поля в плазме оказываются возможными нарастающие во времени волны. Иными словами, плазма оказывается неустойчивой. Кроме изучения такой новой неустойчивости плазмы, связанной с параметрическим резонансом, ниже рассмотрено влияние внешнего высокочастотного электрического поля на изучавшиеся ранее токовую и пучковую неустойчивости.

2. Высокочастотный предел

Физическая картина оказывается особенно простой в условиях, когда частота внешнего поля много больше электронной ленгмюровской ω_e^2 . Тогда для плазмы без внешнего магнитного поля и направленных движений, не связанных с высокочастотным полем, получаются следующие две формулы, описывающие собственные частоты колебаний

$$\omega^2 = \omega_{le}^2 + \omega_i^2 J_0^2(a) \quad (2.1)$$

$$\omega^2 = \omega_i^2 [1 - J_0^2(a)] \quad (2.2)$$

Здесь $\omega_{le} = (4\pi e^2 N_i / m_i)^{1/2}$ — ленгмюровская частота ионов, J_0 — функция Бесселя нулевого индекса, $a = eE_0 k / m\omega^2$. Формула (2.1) описывает электронные ленгмюровские колебания плазмы. Очевидно, что влияние внешнего поля на такие колебания мало. Совершенно противоположное положение имеет место в случае спектра (2.2). Действительно в пределе исчезающего электрического поля правая часть формулы (2.2) обращается в нуль. При малых, но конечных значениях электрического поля, когда амплитуда осцилляций электрона во внешнем поле мала по сравнению с длиной волны колебаний ($a \ll 1$), формула (2.2) принимает вид:

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{\omega_{le}^2 e^2 (E_0 k)}{m^2 \omega_0^4} \equiv (k \bar{w}_s)^2 \quad (2.3)$$

Очевидно, что формула (2.3) указывает на возможность распространения звуковых волн в плазме, находящейся в сильном высокочастотном электрическом поле. При этом физическая картина явления во многом подобна имеющей место в неизотермической плазме

с большим отношением электронной и ионной температур. В нашем случае роль электронной температуры играет энергия осцилляций электронов во внешнем поле. В пределе малых длин волн колебаний, когда амплитуда осцилляций электрона во внешнем поле значительно превышает длину волны ($a \gg 1$), из формулы (2.2) следует

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \quad (2.4)$$

Можно говорить, что ионы колеблются практически независимо от электронов.

При наличии двух сортов ионов в пределе $a \gg 1$ имеем вместо формулы (2.4)

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left\{ \omega_{Li,1}^2 + \omega_{Li,2}^2 \pm \sqrt{(\omega_{Li,1}^2 + \omega_{Li,2}^2)^2 - 4\omega_{Li,1}^2 \omega_{Li,2}^2 [1 - \gamma_o^2(a_{ii})]} \right\} \quad (2.5)$$

где индексы 1 и 2 относятся к первому и второму сортам ионов и

$$a_{ii} = \left(\frac{e_{i,1}}{m_{i,1}} - \frac{e_{i,2}}{m_{i,2}} \right) \frac{\vec{K} \vec{E}_o}{\omega_o^2}$$

Если амплитуды относительных колебаний ионов во внешнем поле оказывается больше длины волны $a_{ii} \gg 1$, то из формулы (2.5) получаем

$$\omega^2 = \omega_{Li,1}^2, \quad \omega^2 = \omega_{Li,2}^2 \quad (2.6)$$

Следовательно, в этом предельном случае каждый сорт ионов колебается независимо.

Обсудим теперь влияние высокочастотного электрического поля на изучавшиеся ранее неустойчивости. В случае плазмы с током, когда электроны движутся относительно ионов со скоростью \vec{U} , дисперсионное уравнение потенциальных колебаний плазмы имеет вид :

$$1 = \frac{\omega_e^2}{(\omega - \vec{K} \vec{U})^2} + \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_e^2 \omega_{Li}^2}{\omega^2 (\omega - \vec{K} \vec{U})^2} [1 - \gamma_o^2(a)] \quad (2.7)$$

В пределе $|\omega| \ll |\vec{K} \vec{U}|$ отсюда, очевидно, следует

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \frac{(\vec{K} \vec{U})^2 - \omega_e^2 [1 - \gamma_o^2(a)]}{(\vec{K} \vec{U})^2 - \omega_e^2} \quad (2.8)$$

Спектр (2.8) соответствует нарастающим решениям лишь при выполнении условия

$$\omega_e^2 > (\vec{K} \vec{U})^2 > \omega_{Li}^2 (1 - \gamma_o^2(a)) \quad (2.9)$$

Таким образом, с увеличением напряженности электрического поля уменьшается область неустойчивости (2.9). Однако максимальный

инкремент токовой неустойчивости лежит в области $(KU)^2 \approx \omega_{ce}^2$, где формула (2.8) неприменима. При этом для инкремента получаем следующее выражение:

$$\gamma = \omega_{ce} \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{\omega_{ci}^2}{2\omega_{ce}^2} \mathcal{I}_0^2(a) \right]^{1/3} \quad (2.10)$$

Следовательно, максимальный инкремент токовой неустойчивости существенно уменьшается в условиях, когда амплитуда осцилляций электрона оказывается значительно больше U/ω_{ce} . Аналогичное рассмотрение колебаний во взаимопроникающих нейтральных потоках плазмы показывает, что в этом случае внешнее высокочастотное электрическое поле не оказывает стабилизирующего влияния. Более того, возникает новая неустойчивость, связанная с раскачкой колебаний (2.2).

3. Параметрический резонанс

Обратимся теперь к рассмотрению колебаний и устойчивости плазмы в условиях, когда частота внешнего электрического поля по порядку величины сравнима с электронной ленгмюровской ω_0 . Следуя обычной методике изучения собственных колебаний системы, описываемой уравнениями Хилла, легко убедиться, что вдали от резонанса на обертоне внешней частоты, т.е. при отклонении от равенства

$$n\omega_0 = \pm \omega_{ce}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.1)$$

на величину порядка ω_{ce} , можно говорить о высокочастотном и низкочастотном спектрах колебаний. При этом для низкочастотного спектра имеет место следующее соотношение:

$$\omega^2 = \omega_{ci}^2 \left\{ 1 - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{ce}^2 \mathcal{I}_e^2(a)}{\omega_{ce}^2 - (l\omega_0)^2} \right\} \equiv \omega_{ci}^2 \left\{ 1 - \frac{\pi \omega_{ce}/\omega_0}{\sin(\pi \omega_{ce}/\omega_0)} \mathcal{I}_0(a) \mathcal{I}_0(a) \right\} \quad (3.2)$$

В пределе $\omega_0 \gg \omega_{ce}$ эта формула переходит в (2.2). Очевидно, что при приближении частоты внешнего поля к ленгмюровской согласно формуле (3.2) в плазме возникают нарастающие волны.

В частности, для длин волн, больших амплитуды осцилляций электрона во внешнем поле, формула (3.2) принимает вид

$$\omega^2 = \frac{a^2}{2} \frac{\omega_{ci}^2 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_{ce}^2} \quad (3.3)$$

Высокочастотный спектр вдали от резонанса на обертоне внешней частоты соответствует не нарастающим колебаниям. При этом вдали от точки демультиплексационного резонанса $(n+1/2)\omega_0 = \pm \omega_{ce}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) собственные частоты высокочастотных колеба-

ний определяются соотношением

$$\omega = \omega_{le} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} J_e^2(a) \frac{\omega_i^2}{(\omega_{le} - \omega_0)^2} \right\} \quad (3.4)$$

В окрестности демультиликационного резонанса получаем

$$\omega = \omega_{le} \left\{ 1 + \frac{\omega_i^2}{\omega_{le}^2} (\Delta + \sqrt{\left[\Delta - \frac{1}{2} (n+1/2) \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} J_e^2(a) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} (n+1/2) \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} J_e(a) J_{e+2n+1}(a) \right]^2}} \right\} \quad (3.5)$$

где Δ - величина, малая по сравнению с $\omega_{le}^2 / \omega_i^2$, определена соотношением $(n+1/2)\omega_0 = \omega_{le} (1 + \Delta \omega_i^2 / \omega_{le}^2)$. В пределе $\Delta \gg 1$ формула (3.5) при знаке " - " переходит в формулу (3.4), а при знаке " + " правая часть (3.5) переходит в $(2n+1)\omega_0 - \omega$, где ω определено формулой (3.4). Для частот внешнего поля, значительно превосходящих ленгмировскую, формула (3.4) приводит к спектру (2, I).

При приближении к резонансу на обертоне внешней частоты, как это уже видно из формул (3.2) и (3.3), возрастают инкременты $\gamma = |Im \omega|$ нарастающих волн. Наибольшими оказываются инкременты для длин волн, сравнимых с амплитудой осцилляций электрона во внешнем поле. При этом имеем :

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{\omega_{le}^2} &= \frac{1}{8} \left(1 - \frac{n^2 \omega_0^2}{\omega_{le}^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\omega_i^2}{\omega_{le}^2} \left[1 - D_n - \frac{1}{2} J_n^2(a) \right] + \\ &+ \left\{ \left[\frac{1}{8} \left(1 - \frac{n^2 \omega_0^2}{\omega_{le}^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\omega_i^2}{\omega_{le}^2} \left(1 - D_n - \frac{1}{2} J_n^2 \right) \right]^2 + \frac{1}{2} \frac{\omega_i^2}{\omega_{le}^2} J_n^2 \left[1 - \frac{n^2 \omega_0^2}{\omega_{le}^2} - \frac{\omega_i^2}{\omega_{le}^2} A_n - \frac{1}{2} B_n \right] \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $A_n = \sum_{\ell \neq 0} \frac{n^2}{\ell^2} J_{n+\ell}^2(a), B_n = - \sum_{\ell \neq 0} \frac{n^2}{\ell^2} J_{n+\ell}(a) J_{n-\ell}(a), D_n = \sum_{\ell \neq \pm n} \frac{n^2 J_e^2(a)}{\ell^2 - \ell^2}$

Легко понять, что согласно формуле (3.6) наибольшие значения инкремент раскачки принимает в области $1 - (n\omega_0/\omega_{le})^2 = \eta [4 \frac{\omega_i^2}{\omega_{le}^2} J_n^2]^{1/3}$
где η - порядок единиц. При этом

$$\frac{\omega^2}{\omega_{le}^2} = -\frac{1}{8} \left[4 \frac{\omega_i^2}{\omega_{le}^2} J_n^2(a) \right]^{2/3} \left\{ -\eta^2 + \sqrt{\eta^4 + 8\eta} \right\} \quad (3.7)$$

При знаке " + " максимальный инкремент раскачки имеет место при $\eta = +1$. При знаке " - " раскачка возможна, если $-2 < \eta < a$ причем

$$\frac{\omega}{\omega_{le}} = \pm \frac{1}{16} \frac{\omega_i^2}{\omega_{le}^2} J_n^2(a)^{1/3} \left\{ \sqrt{8|\eta|} + \eta^2 \mp i \sqrt{8|\eta| - \eta^2} \right\}$$

Соответствующий максимальный инкремент имеет место при $\eta = -2^{-1/3}$. Таким образом, максимальный инкремент раскачки колебаний при параметрическом резонансе по порядку величины равен ленгмировской частоте электронов, умноженной на отношение масс электрона и иона в степени $1/3$.

Качественная картина зависимости инкремента от частоты внешнего поля легко может быть понята, если наряду с формулой (3.7) записать следующие асимптотические формулы, вытекающие из (3.6) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega^2}{\omega_{le}^2} &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{n^2 \omega_0^2}{\omega_{le}^2} \right)^2 \\ \frac{\omega^2}{\omega_{le}^2} &= -2 \frac{\omega_{ci}^2 \gamma_n^2(a)}{\omega_{le}^2 - n^2 \omega_0^2} \end{aligned} \right\} \quad \text{при } 1 \gg 1 - \frac{n^2 \omega_0^2}{\omega_{le}^2} / 3 \gg \frac{\omega_{ci}^2}{\omega_{le}^2} \quad (3.8)$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_{le}^2} = + \frac{\omega_{ci}^2}{\omega_{le}^2} \sqrt{\frac{1}{2} \gamma_n^2 \left[1 - \frac{n^2 \omega_0^2}{\omega_{le}^2} \right]}, \quad 1 - \frac{n^2 \omega_0^2}{\omega_{le}^2} / 3 \ll \frac{\omega_{ci}^2}{\omega_{le}^2} \ll 1 - \frac{n^2 \omega_0^2}{\omega_{le}^2} \quad (3.10)$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_{le}^2} = \frac{1}{2} \frac{\omega_{ci}^2}{\omega_{le}^2} \left\{ 1 - D_n - \frac{1}{2} \gamma_n^2 \pm \sqrt{\left[1 - D_n - \frac{1}{2} \gamma_n^2 \right]^2 - 2 \gamma_n^2 [A_n - (-1)^n B_n]} \right\} \quad (3.11)$$

$$\text{при } 1 - \frac{n^2 \omega_0^2}{\omega_{le}^2} / 3 \ll \frac{\omega_{ci}^2}{\omega_{le}^2}$$

Из выписанных формул следует, что при приближении частоты внешнего поля к электронной ленгмюровской со стороны больших значений плазма становится неустойчивой. Максимальная частота внешнего поля, на которое возникает изучаемая нами раскачка потенциальных колебаний, равна

$$\omega_{le} \left\{ 1 + \left[\frac{1}{4} \frac{\omega_{ci}^2}{\omega_{le}^2} \gamma_1^2(a) \right]^{1/3} \right\} \quad (3.12)$$

Поскольку максимальное значение $\gamma_1(a)$ равно примерно 0,582 и соответствует $a \approx 1,34$, то максимальное значение выражения (3.12) отвечающее порогу неустойчивости, равно

$$\sim \omega_{le} \left\{ 1 + (1,34)^{1/3} \left(\frac{\omega_{ci}}{\omega_{le}} \right)^{2/3} \right\} \quad (3.13)$$

В этой точке начинается раскачка двух ветвей колебаний. С уменьшением частоты внешнего поля инкремент возрастает, достигая при

$$\omega_0 = \omega_{le} \left\{ 1 + \left[\frac{\omega_{ci}^2}{4 \omega_{le}^2} \gamma_1^2(a) \right]^{1/3} \right\} \quad (3.14)$$

максимума

$$\gamma = \omega_{le} \left[\frac{\sqrt{27}}{32} \frac{\omega_{ci}^2}{\omega_{le}^2} \gamma_1^2(a) \right]^{1/3} \quad (3.15)$$

а затем убывает для одной ветви до нуля, а для второй – до величины $\sim \omega_{ci}$ в непосредственной близости к точке параметрического резонанса (см. З.II). При дальнейшем уменьшении частоты инкремент снова возрастает, достигая при

$$\omega_0 = \omega_{ce} \left\{ 1 - \left[\frac{1}{2} \frac{\omega_{ci}^2}{\omega_{ce}^2} \mathcal{T}_1^2(a) \right]^{1/3} \right\} \quad (3.16)$$

максимального значения

$$\gamma = \omega_{ce} \left[\frac{1}{2} \frac{\omega_{ci}^2}{\omega_{ce}^2} \mathcal{T}_1^2(a) \right]^{1/3} \quad (3.17)$$

Затем снова инкремент убывает до значений $\sim \omega_{ci}$ и не меняет порядка величины вплоть до окрестности резонанса на первом обертоне ($2\omega_0 \approx \omega_{ce}$), где повторяется так качественная картина, которая имела место в окрестности $\omega_0 \approx \omega_{ce}$. Естественно, что такая повторяемость имеет место для длин волн колебаний, сравнимых с амплитудой осцилляций электрона во внешнем электрическом поле. Напротив, если длина волны много больше амплитуды осцилляций электрона, то такой повторяемости нет и в области частот внешнего поля, меньших электронной ленгмюровской, раскачка колебаний описывается формулой (3.3). Наконец заметим, что в пределе очень коротких длин волн, много меньших амплитуды осцилляций электрона, инкремент раскачки потенциальных колебаний обращается в нуль, а собственные частоты собственных колебаний оказываются совпадающими с электронной и ионной ленгмюровскими частотами. Иными словами, для таких длин волн, так же как и в высокочастотном пределе, электроны и ионы колеблются асимптотически независимо.

4. Резонансная раскачка внешним высокочастотным полем колебаний в плазме, находящейся в сильном магнитном поле

Наличие сильного внешнего одногородного и постоянного магнитного поля хотя и усложняет картину колебаний плазмы все же сохраняет качественную сторону явления параметрического резонанса. В силу того, что движение частиц теперь существенно зависит от величины магнитного поля, произведение волнового вектора на относительную амплитуду осцилляций электронов и ионов характеризуется величиной α_B , определяющейся формулой :

$$\alpha_B^2 = \left[\left(\frac{e}{m} - \frac{e_i}{m_i} \right) \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B})(\vec{B} \cdot \vec{E}_0)}{B^2 \omega_0^2} + \vec{E}_0 [\vec{B}[\vec{k} \cdot \vec{B}]] \right] \left(\frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega_e^2)} - \frac{e_i \cdot n_i}{m_i(\omega_0^2 - \omega_i^2)} \right)^2 + \left(\frac{e \cdot n_e}{m \omega_0(\omega_0^2 - \omega_e^2)} - \frac{e_i \cdot n_i}{m_i \omega_0(\omega_0^2 - \omega_i^2)} \right)^2 \frac{[\vec{k} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{E}_0)]^2}{B^2} \quad (4.1)$$

Здесь $n_e = eB/mc$, $n_i = e_i B/m_i c$ — гироскопические частоты электронов и ионов соответственно. В пределе коротких длин волн ($\alpha_B \gg 1$) электроны и ионы колеблются практически независимо. Соответствующие спектры колебаний имеют вид :

$$\omega_{e\pm}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \Omega_e^2 + \omega_{ie}^2 \pm \sqrt{(\Omega_e^2 + \omega_{ie}^2)^2 - 4\Omega_e^2 \omega_{ie}^2 \cos^2 \theta} \right\} \quad (4.2)$$

$$\omega_{i\pm}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \Omega_i^2 + \omega_{ei}^2 \pm \sqrt{(\Omega_i^2 + \omega_{ei}^2)^2 - 4\Omega_i^2 \omega_{ei}^2 \cos^2 \theta} \right\} \quad (4.3)$$

где θ - угол между векторами $\vec{\kappa}$ и \vec{B} . Вдали от резонанса обертонаов внешней частоты с частотой электронных колебаний (4.2), так же как и в случае плазмы без внешнего магнитного поля, можно говорить о высокочастотной и низкочастотной ветвях колебаний. Фактически происходит удвоение таких ветвей так же как согласно (4.2) в замагниченной плазме возникают две ветви электронных колебаний. Высокочастотная ветвь вдали от $(\pi\omega_0)^2 \approx \omega_{e\pm}^2$ не приводит к неустойчивости, поскольку в этом случае внешнее электрическое поле дает лишь малые поправки к спектрам (4.2). Напротив низкочастотные ветви существенно зависят от электрического поля. Именно, находим ($\theta \neq \pi/2$)

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left\{ \Omega_i^2 + \omega_{ie}^2 \alpha(\omega_0, \vec{\kappa}) \pm \sqrt{(\Omega_i^2 + \omega_{ie}^2 \alpha(\omega_0, \vec{\kappa}))^2 - 4\Omega_i^2 \omega_{ie}^2 \alpha(\omega_0, \vec{\kappa}) \cos^2 \theta} \right\} \quad (4.4)$$

$$\text{где } \alpha(\omega_0, \vec{\kappa}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n^2 (\alpha_B) n^2 \omega_0^2 (n^2 \omega_0^2 - \Omega_e^2)}{n^4 \omega_0^4 - n^2 \omega_0^2 (\Omega_e^2 + \omega_{ie}^2) + \Omega_e^2 \omega_{ie}^2 \cos^2 \theta} \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 \omega_0^2 (n^2 \omega_0^2 - \Omega_e^2) \gamma_n^2}{(n^2 \omega_0^2 - \Omega_e^2)(n^2 \omega_0^2 - \omega_{ie}^2)} \quad (4.5)$$

Формула (4.4) соответствует раскачке колебаний при знаке минус и $\alpha(\omega_0, \vec{\kappa}) < 0$. Для длин волн, значительно превышающих амплитуду осцилляции частиц под действием внешнего высокочастотного поля, формула (4.5) принимает следующий простой вид :

$$\alpha(\omega_0, \vec{\kappa}) = \frac{\alpha_B^2 \omega_0^2 (\omega_0^2 - \Omega_e^2)}{2(\omega_0^4 - \omega_0^2 (\Omega_e^2 + \omega_{ie}^2) + \Omega_e^2 \omega_{ie}^2 \cos^2 \theta)} \quad (4.6)$$

В этом случае легко понять, что если частота внешнего поля меньше гирроскопической частоты электронов, то раскачка колебаний возможна при $\omega_0 < \omega_{ie}$. В противоположном случае ($\omega_0^2 > \Omega_e^2$) порог режима колебаний определяется неравенством

$$\omega_0^2 < \omega_{ie}^2 + \Omega_e^2 \quad (4.7)$$

При этом на пороге неустойчивости нарастающими оказываются волны почти поперечные направлению постоянного магнитного поля. Из формулы (4.7) в частности следует, что если электронная гирроскопическая частота значительно превышает ленгмюровскую, то в малой окрестности резонанса внешних частот с Ω_e со стороны больших значений ω_0 возникает раскачка колебаний.

При приближении обертона внешней частоты к одной из частот (4.2) инкременты неустойчивости возрастают. Как и в случае плазмы без магнитного поля инкременты оказываются наибольшими

для длин волн сравнимых с амплитудой относительных осцилляций частиц во внешнем высокочастотном поле. В окрестности резонанса обертона внешней частоты с колебаниями (4.2) инкременты оказываются наибольшими в области :

$$\frac{\omega_{e\pm}^2}{(n\omega_0)^2} - 1 = \left| \frac{1}{4} \frac{\gamma_n^2 (\alpha_B) \omega_i^2 \omega_{ie}^2 [(n\omega_0)^2 - \Omega_e^2 \cos^2 \theta]^{1/3}}{(n\omega_0)^4 [(n\omega_0)^2 - \omega_{e\mp}^2]} \right|^2 \quad (4.8)$$

где γ - действительное число порядка единицы. При этом

$$\frac{\omega^2}{(n\omega_0)^2} = \frac{1}{8} \left| \frac{1}{4} \frac{\gamma_n^2 \omega_i^2 \omega_{ie}^2 [(n\omega_0)^2 - \Omega_e^2 \cos^2 \theta]^{1/3}}{(n\omega_0)^4 [(n\omega_0)^2 - \omega_{e\mp}^2]} \right|^2 \left\{ \gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 + 8\gamma} \right\} \quad (4.9)$$

Ясно, что области значений γ , в которых возникает раскачка колебаний, а также значения γ соответствующие максимуму инкременту оказываются такими же как и в случае плазмы без магнитного поля. Заметим, что формула (4.9) так же как и последующие, получена в предположении $\omega^2 \gg \Omega_i^2$. В случае выполнения противоположного неравенства соответствующие формулы отличаются от выписываемых нами заменой ленгмюровской частоты ионов на

$$\omega_i \cos \theta$$

Со стороны больших значений ω_0 порог неустойчивости возникает при частоте

$$\sqrt{\omega_{ie}^2 + \Omega_e^2} \left\{ 1 + (1,34)^{1/3} \frac{\omega_i^{2/3} \omega_{ie}^{2/3}}{(\Omega_e^2 + \omega_{ie}^2)^{2/3}} \right\} \quad (4.10)$$

При этом начинают раскачиваться колебания с волновым вектором поперек магнитного поля. Две ветви нарастающих колебаний с волновыми векторами вдоль магнитного поля возникают при частотах внешнего поля близких соответственно гирокопической и ленгмюровской частотам электронов.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

Некоторые эффекты, связанные с тепловым движением
частиц при $\omega_0 \gg \omega_{ie}$.

Существенно негидродинамическим эффектом в плазме являются ионно-звуковые колебания, которые возможны в условиях, когда

температура электронов значительно превышает температуру ионов. Нетрудно выявить влияние внешнего высокочастотного электрического поля на ионно-звуковые колебания, фазовая скорость которых велика по сравнению с тепловой скоростью ионов и в то же время много меньше тепловой скорости электронов. Именно в этом случае при $\omega_0 \gg \omega_{ie}$ получаем:

$$\omega^2 = \omega_{ie}^2 \left\{ 1 - \frac{\gamma_o^2(a)}{1 + (K\tau_{de})^2} \right\} + 3K^2 v_{ri}^2 \quad (\text{П.1})$$

с декрементом затухания

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega^4}{K^3} \left\{ \frac{1}{v_{ri}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2K^2 v_{ri}^2}} + \frac{\omega_{ie}^2 \omega_{ie}^2 \gamma_o^2(a)}{\omega^4 v_{re}^3 [1 + (K\tau_{de})^2]} \right\} \quad (\text{П.2})$$

где $v_{ra} = (T_a/m_e)^{1/2}$ тепловая скорость a - сорта частиц

τ_{de} - дебаевский радиус электронов.

Для длин волн, больших дебаевского радиуса электронов из (П.1) получаем

$$\omega^2 = \omega_{ie}^2 (1 - \gamma^2) + K^2 [v_s^2 \gamma_o^2 + 3v_{ri}^2], v_s^2 = \frac{e_i/T_e}{m_i} \quad (\text{П.3})$$

Влияние теплового движения существенно для проблемы устойчивости нейтральных пучков. Пусть \vec{u} - направленная скорость пучка относительно плазмы; $v_{ra,2}, v_{ra,1}$ - тепловые скорости частиц соответственно в пучке и в плазме. При выполнении неравенств $Kv_{re,1} \gg \omega \gg Kv_{ri,1}, Kv_{re,2} \gg \omega \gg Kv_{ri,2}$ и для того случая когда плазма и пучок состоят из одинаковых частиц решение дисперсионного уравнения для колебаний имеет вид

$$\omega = \frac{K\vec{u}}{2} \pm \sqrt{A} \omega_{ie} \sqrt{1 + \left(\frac{K\vec{u}}{2\omega_{ie}\sqrt{A}} \right)^2} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{K\vec{u}}{\sqrt{A} \omega_{ie}} \right)^2} \quad (\text{П.4})$$

где

$$A = \left[1 + (K\tau_{de})^{-2} (1 - \gamma_o^2(a)) \right] \left[1 + (K\tau_{de})^{-2} \right]^{-1} > 0$$

$$\tau_{de}^{-2} = \tau_{de,1}^{-2} + \tau_{de,2}^{-2}$$

Неустойчивым колебаниям соответствует слагаемое со знаком минус под радикалом в формуле (П.4) при выполнении неравенства

$$|K\vec{u}| > 2\sqrt{A} \omega_{ie}.$$

Поскольку величина A возрастает по мере увеличения амплитуды внешнего поля, из этого условия следует, что высокочастотное электрическое поле расширяет область неустойчивости волн с фазовыми скоростями, большими по сравнению с тепловой скоростью ионов и малыми по сравнению с тепловой скоростью электронов.

Литература

1. В.И.Векслер, И.Ф.Геккер, Э.Я.Гольц, Г.А.Делоне, Б.П.Кононов, О.В.Кудреватова, Г.С.Лукьянчиков, М.С.Рабинович, М.С.Савченко, К.А.Сарксян, К.Ф.Сергейчев, В.А.Силин, Л.Э.Цопп, М.Л.Левин, Ф.З.Муратов " Радиационное ускорение плазмы". Доклад на Международной конференции по ускорителям, Дубна, август 1963 г.
2. Ю.М.Алиев, В.П.Силин, ЖЭТФ, 48, № 3 (1965)
3. В.П.Силин, ЖЭТФ, 48, № 6 (1965)
4. Л.М.Горбунов, В.П.Силин " Ядерный синтез" (в печати).

DISCUSSION

T. CONSOLI: You referred to the possibility of applying the theory you have just presented to the study of instabilities which may occur with the acceleration of a plasma by HF fields. You also mentioned that such studies are in progress at the P. N. Lebedev Physical Institute. Could you give us some more details concerning these studies?

V. S. SILIN: The results of these investigations, which have been going on for many years, were reported at the International Conference on High-Energy Accelerators and Instrumentation held in Dubna, 21-27 August 1963. If I am not mistaken, the RF field was of the order of 3 kV/cm with a frequency, ω_0 , about 2×10^{11} c/s. The initial plasma density attained values of the order of 10^{13} cm⁻³. The energy of the accelerated ions was several keV, but particles possessing higher energies were also observed.

H. LASHINSKY: If one wishes to uncouple electrons from the ions in a plasma in order to suppress an undesired inherent instability, is it possible to find electric fields of appropriate frequency and amplitude such that new instabilities do not arise?

V. P. SILIN: The instabilities considered by us do not occur for fields of those strengths and frequencies for which the electron oscillation amplitude in the externally imposed field is less than the Debye radius. This is the case both for potential oscillation and for the build-up of non-potential oscillations whose wave vector is almost perpendicular to the externally imposed electric field. The growth rate of the non-potential oscillations over a wide range of frequencies is constant and equal to the ratio of the speed of electrons in oscillation to twice the speed of light multiplied by the ion Langmuir frequency.



НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

А. ГАЙЛИТИС, Л. М. ГОРБУНОВ, Л. М. КОВРИЖНЫХ,
В. В. ПУСТОВАЛОВ, В. П. СИЛИН и В. Н. ЦЫТОВИЧ
ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. П. Н. ЛЕВЕДЕВА АН СССР, МОСКВА
СССР

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

NON-LINEAR PLASMA WAVE INTERACTION. 1. By solving the kinetic equation in the "self-consistent field" approximation, the authors obtained a non-linear material equation for a plasma and then used this equation to write the equation for non-linear electro-dynamics. In the event of underdamping, where the waves are almost monochromatic, an equation was obtained which describes the variation of amplitude of these waves. By averaging this equation over the wave phases, which are assumed to be random, we obtain an equation which describes the evolution of electromagnetic field noises in the plasma when account is taken of the non-linear interaction between waves. Particular attention is paid to the case of isotropic, homogeneous plasma. 2. Non-linear interaction of two Langmuir waves with the formation of another Langmuir wave can only occur as the result of induced scattering of the waves on particles. The authors investigated the case where wave scattering on electron predominates and also the case where scattering on ions plays the greater part, and in both cases clarified the role played by the transverse field in the interaction of plasma particles. They also investigated the case where linear damping of the waves is insignificant in comparison with the non-linear interaction. They discuss the question of the conservation of energy and the number of gamma quanta in these processes involving non-linear interaction of Langmuir waves. 3. Study of the non-linear interaction of high-frequency longitudinal waves in plasma with a slow beam shows that in this case energy from the particles can be transformed into wave energy with ensuing non-linear instability. 4. The non-linear interaction of a Langmuir and a transverse wave is considered and the contribution which this process makes to energy changes in longitudinal and transverse waves discussed. 5. The authors also investigate the process of non-linear interaction of two transverse waves, resulting in the formation of another transverse wave. 6. They discuss possible decay and combination processes involving the participation of three and of four Langmuir and transverse waves. The latter process is of particular interest in cases where decay conditions are not fulfilled in three waves. 7. In a non-isothermal plasma, when the temperature of the electrons exceeds the temperature of the ions in the plasma, yet another branch of oscillations is possible, namely ionic sound. The authors have investigated the non-linear interaction of ionic sound waves resulting both from induced scattering on particles and from combination and decay with Langmuir and transverse waves, paying particular attention to processes involving the participation of four waves.

INTERACTION NON LINÉAIRE DES ONDES DANS LE PLASMA: 1. En résolvant l'équation cinétique dans l'approximation du «champ auto-consistant», les auteurs ont obtenu une équation matérielle non linéaire pour le plasma, qu'ils ont utilisée en vue d'établir l'équation pour l'électrodynamique non linéaire. Dans le cas d'ondes sous-amorties et presque monochromatiques, ils ont obtenu une équation qui décrit les variations d'amplitude de ces ondes. En intégrant cette équation sur les phases d'ondes que l'on suppose aléatoires, ils ont obtenue une équation qui décrit l'évolution des bruits du champ électromagnétique dans le plasma lorsqu'il est tenu compte de l'interaction non linéaire entre les ondes. Les auteurs ont accordé une attention particulière au cas d'un plasma homogène isotrope. 2. L'interaction non linéaire de deux ondes de Langmuir avec formation d'une autre onde de Langmuir ne peut se produire que par suite d'une dispersion induite des ondes sur les particules. Les auteurs ont étudié le cas où leur dispersion sur les électrons prédomine et le cas où leur dispersion sur les ions est plus importante. Ils ont expliqué le rôle du champ transverse dans l'interaction de particules du plasma pour les processus de dispersion considérés. Ils ont étudié les conditions dans lesquelles l'amortissement linéaire des ondes est insignifiant par comparaison avec l'interaction non linéaire. Ils discutent la question de la conservation de l'énergie et du nombre de quanta γ dans ces processus d'interaction non linéaire d'ondes de Langmuir. 3. Une étude de l'interaction non linéaire d'ondes longitudinales de haute fréquence du plasma avec un faisceau lent a montré que, dans ce cas, l'énergie des particules peut se trans-

former en énergie d'ondes ce qui crée une instabilité non linéaire. 4. Les auteurs ont examiné l'interaction non linéaire d'une onde de Langmuir et d'une onde transverse. Ils discutent l'influence de ce processus sur les variations d'énergie dans les ondes longitudinales et transverses. 5. Les auteurs étudient le processus d'interaction non linéaire de deux ondes transverses, qui a pour résultat la formation d'une nouvelle onde transverse. 6. Ils examinent également les processus possibles de décroissance et de combinaison avec participation de trois et quatre ondes de Langmuir et aussi d'ondes transverses. Ce dernier processus est particulièrement intéressant dans les cas où les conditions de décroissance ne se trouvent pas réunies pour trois ondes. 7. Dans un plasma non isotherme où la température des électrons dépasse la température des ions une autre branche d'oscillations est possible, à savoir le son ionique. Les auteurs ont fait des recherches sur l'interaction non linéaire d'ondes de son ionique, dues à une dispersion induite sur les particules et au procès de combinaison et de décroissance, avec des ondes de Langmuir et des ondes transverses. Ils ont examiné en particulier les processus caractérisés par la participation de quatre ondes.

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАЙМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В ПЛАЗМЕ. 1. Путем решения кинетического уравнения в приближении самоогласованного поля получено нелинейное материальное уравнение для плазмы, которое использовано для записи уравнения нелинейной электродинамики. В случае слабозатухающих, почти монохроматических волн получено уравнение, описывающее изменение амплитуды этих волн. Усредняя это уравнение по фазам волн, которые предполагаются случайными, находим уравнение, описывающее эволюцию шумов электромагнитного поля в плазме при учете нелинейного взаимодействия между волнами. Основное внимание удалено исследованию изотропной и однородной плазмы. 2. Нелинейное взаимодействие двух ленгмюровских волн с образованием снова ленгмюровской волны возможно только благодаря индуцированному рассеянию волн на частицах. Исследованы как случаи, когда преобладает рассеяние волн на электронах, так и случаи, когда важнее рассеяние на ионах. Выявлена роль поперечного поля при взаимодействии частиц плазмы для рассмотренных процессов рассеяния. Рассмотрены условия, когда линейное затухание волн несущественно по сравнению с нелинейным взаимодействием. Обсуждается вопрос о сохранении энергии и числа квантов в рассмотренных процессах нелинейного взаимодействия ленгмюровских волн. 3. Исследовано нелинейное взаимодействие высокочастотных продольных волн в плазме с медленным пучком. Показано, что в этом случае энергия от частиц может переходить в энергию волн и возникает нелинейная неустойчивость. 4. Рассмотрено нелинейное взаимодействие ленгмюровской и поперечной волн. Обсуждается вклад этого процесса в изменение энергии как продольных, так и поперечных волн. 5. Исследован процесс нелинейного взаимодействия двух поперечных волн, в результате которого вновь образуется поперечная волна. 6. Рассмотрены возможные процессы распада и слияния как с участием трех, так и четырех ленгмюровских и поперечных волн. Последний процесс особенно интересен в тех случаях, когда распадные условия для трех волн не выполняются. 7. В неизотермической плазме, когда температура электронов превышает температуру ионов в плазме, возможна еще одна ветвь колебаний — ионный звук. Исследовано нелинейное взаимодействие волн ионного звука как за счет индуцированного рассеяния на частицах, так и за счет слияния распада с ленгмюровскими и поперечными волнами. В частности, рассмотрены процессы с участием четырех волн.

INTERACCION NO LINEAL DE LAS ONDAS EN UN PLASMA. 1. Resolviendo la ecuación cinética en la aproximación de un campo autoconsistente los autores han obtenido la ecuación material no lineal para un plasma y la han utilizado para formular la ecuación electrodinámica no lineal. En el caso de ondas poco atenuadas y casi monocromáticas obtuvieron una ecuación que describe su variación de amplitud. Promediando esta ecuación sobre las fases de las ondas, que se consideran aleatorias, hallaron una ecuación que describe la evolución de los ruidos del campo eléctrico magnético en el plasma cuando se tiene en cuenta la interacción no lineal de las ondas. Prestaron especial atención al caso de un plasma isótropo y homogéneo. 2. La interacción no lineal de dos ondas de Langmuir y la formación de otra onda de Langmuir sólo es posible como resultado de la dispersión inducida de las ondas en las partículas. Los autores investigaron el caso en que predomina la dispersión de las ondas en los electrones y también el caso en que es más importante la dispersión en los iones y en ambos casos examinaron el papel que desempeña el campo transversal en la interacción de las partículas del plasma. Estudiaron también el caso en que la atenuación lineal de las ondas es insignificante en comparación con la interacción no lineal. Por último, investigaron el problema de la conservación de la energía y el número de cuantos en los procesos que entrañan una interacción no lineal de las ondas de Langmuir. 3. El estudio de la interacción no lineal de ondas longitudinales de alta frecuencia en un plasma con un haz lento muestra que en este caso la energía de las partículas puede transformarse en energía ondulatoria dando lugar a una inestabilidad no lineal. 4. En la memoria se estudia la interacción no lineal de una onda de Langmuir y

otra transversal. Se investiga la contribución de este proceso a la variación energética de las ondas longitudinales y transversales. 5. Se estudia también el proceso de interacción no lineal de dos ondas transversales que da lugar a la formación de una nueva onda transversal. 6. Los autores examinan los posibles procesos de desintegración y fusión que entrañan la participación de tres o cuatro ondas de Langmuir y de ondas transversales. Este último proceso es de particular interés cuando no se cumplen las condiciones de desintegración en tres ondas. 7. En un plasma no isotérmico, cuando la temperatura electrónica es superior a la iónica en el plasma, es posible todavía otra rama de oscilaciones: el sonido iónico. Los autores han investigado la interacción no lineal de las ondas de sonido iónico resultante de la dispersión inducida en las partículas y de la fusión y desintegración con ondas de Langmuir y transversales, prestando particular atención a los procesos en que participan cuatro ondas.

Введение

В настоящей работе излагаются некоторые результаты, полученные авторами относительно нелинейного взаимодействия волн в однородной, изотропной, полностью ионизированной разреженной плазме.

I. Общие соотношения

I. Взаимодействие волн в плазме будем описывать на основе уравнений нелинейной электродинамики, в которых нелинейность связана с нелинейным материальным уравнением [1]. Последнее для разреженной плазмы легко получить с помощью решения кинетического уравнения самосогласованного приближения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + e (\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{B}]) \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0 \quad /I.1/$$

где e, \vec{v}, \vec{p} — заряд, скорость и импульс частицы /индекс, указывающий сорт частиц для упрощения обозначений опущен/; в изотропной плазме \vec{E}, \vec{B} /напряженности соответственно электрического и магнитного полей, возникающие при распространении в плазме волны, которые связаны между собой уравнением

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad /I.2/$$

Разлагая поля и функцию распределения по координатам и времени в интеграл Фурье и, используя уравнение /I.2/, получим из /I.1/ уравнение для Фурье-компоненты функции распределения

$$f(\omega^{(n)}, \vec{k}^{(n)}, \vec{p}) = -ie g_+^{(n)} \int d\vec{k}^{(m)} d\omega^{(m)} E_{jm}(\omega^{(m)} - \omega^{(n)}, \vec{k}^{(m)} - \vec{k}^{(n)}) f_{jm}(\omega^{(m)}, \vec{k}^{(m)}, \vec{p}) \quad /I.3/$$

где

$$g_+(\omega^{(n)}, \vec{k}^{(n)}, \vec{v}) \equiv g_+^{(n)} = \frac{1}{\omega^{(n)} - \vec{k}^{(n)} \vec{v} + i0} \quad /I.4/$$

I/ Некоторые случаи нелинейного взаимодействия волн в замагниченной плазме на основе уравнений нелинейной электродинамики рассмотрены в работе [2].

$$\int_{j(n)}^r (\omega^{(n)}, \vec{\kappa}^{(n)}, \vec{v}) = \frac{1}{\omega^{(n)} - \omega^{(m)} + i0} \left[\delta_{ij(m)} (\omega^{(n)} - \omega^{(m)} - \vec{\kappa}^{(n)} \cdot \vec{v} + \vec{\kappa}^{(m)} \cdot \vec{v}) + (\vec{\kappa}^{(n)} - \vec{\kappa}^{(m)})_i V_{j(m)} \right] \frac{\partial}{\partial p_i} \quad /I.5/$$

Итерационная процедура позволяет записать решение уравнения /I.3/ в виде ряда по степеням поля:

$$f(t, \vec{v}, \vec{p}) = f_0(t, \vec{v}, \vec{p}) + \sum_{n=1}^{\infty} (-ie)^n \int d\omega^{(n)} d\vec{\kappa}^{(n)} e^{-i(\omega^{(n)} t + \vec{\kappa}^{(n)} \cdot \vec{v})} d\omega^{(n)} d\vec{\kappa}^{(n)} \quad /I.6/$$

$$\times g_+^{(n)} \int_{j(n)}^r g_+^{(n)} \int_{j(2)}^r \dots g_+^{(n-1)} \int_{j(n)}^r f_0(\omega^{(n)}, \vec{\kappa}^{(n)}, \vec{p}) E_{j(n)}(\omega^{(n)} - \omega^{(m)}, \vec{\kappa}^{(n)} - \vec{\kappa}^{(m)}) \dots E_{j(m)}(\omega^{(n)} - \omega^{(m)}, \vec{\kappa}^{(n)} - \vec{\kappa}^{(m)})$$

где $f_0(t, \vec{v}, \vec{p})$ — функция распределения основного, невозмущенного состояния плазмы.

Найдя с помощью формулы /I.6/ плотность тока $\vec{j} = \sum e_a \int d\vec{p}_a f_a \vec{v}_a$ /сумма берется по сортам частиц/, запишем уравнение для поля в виде:

$$\frac{e^2 k^2}{\omega^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) E_j(\omega, \vec{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \int d\omega^{(n)} d\vec{\kappa}^{(n)} \dots d\omega^{(n)} d\vec{\kappa}^{(n)} \epsilon_{ij(m)j(m)}(\omega, \vec{\kappa}, \omega^{(n)}, \vec{\kappa}^{(n)}) \times \quad /I.7/$$

$$\times E_{j(m)}(\omega - \omega^{(n)}, \vec{\kappa} - \vec{\kappa}^{(n)}) \dots E_{j(m)}(\omega^{(n)} - \omega^{(m)}, \vec{\kappa}^{(n)} - \vec{\kappa}^{(m)})$$

где принято, что в состоянии с f_0 в плазме нет объемных зарядов и токов, а также использовано обозначение

$$\epsilon_{ij(m)j(m)}(\omega, \vec{\kappa}, \omega^{(n)}, \vec{\kappa}^{(n)}, \dots, \omega^{(n)}, \vec{\kappa}^{(n)}) = \delta_{mm} \delta_{ij(n)} \delta(\omega^{(n)}) \delta(\vec{\kappa}^{(n)}) - \quad /I.8/$$

$$- \sum_{\alpha} 4\pi (-ie_{\alpha})^{n+1} \int d\vec{p}_{\alpha} \frac{v_{\alpha}}{\omega} g_+(\omega, \vec{\kappa}, \vec{v}) \int_{j(n)}^r g_+^{(n)} \int_{j(m)}^r f_{0\alpha}(\omega^{(n)}, \vec{\kappa}^{(n)}, \vec{p})$$

2. Ниже будем интересоваться таким случаем, когда зависимостью f_0 от координат и времени можно пренебречь. Оправданием такого приближения является то, что в рассмотренных ниже задачах характерные времена нелинейной релаксации колебаний малы по сравнению с временами релаксации распределения частиц, которые можно считать такими же как и в отсутствии волн. В задаче нелинейного взаимодействия ленгмюровских волн, например, это связано с тем, что наличие волн существенно меняет релаксацию быстрых надтепловых частиц и несущественно для медленных. Учитя сделанное замечание, получим:

$$\epsilon_{ij(m)j(m)}(\omega, \vec{\kappa}, \omega^{(n)}, \vec{\kappa}^{(n)}, \dots, \omega^{(n)}, \vec{\kappa}^{(n)}) = \delta(\omega^{(n)}) \delta(\vec{\kappa}^{(n)}) \epsilon_{ij(m)j(m)}(\omega, \vec{\kappa}, \omega^{(n)}, \vec{\kappa}^{(n)}, \dots, \omega^{(n)}, \vec{\kappa}^{(n)})$$

Следует также отметить, что функция $g_+(\omega, \vec{\kappa}, \vec{v})$, согласно формуле /I.4/, оказывается бесконечной при равных нулю частоте и волновом векторе. Такие значения этих величин соответствуют однородному и статическому состоянию плазмы /или, более обще, медленно меняющемуся/. Считая, что описание медленного изменения плазмы дается функцией f_0 , исключим в интегралах /I.6/ и /I.8/ точки, соответствующие одновременным нулевым значениям частот и волновых чисел, являющихся аргументами функций g_+ . Иными словами, будем

считать, что лишь $\omega^{(n)}$ и $\vec{k}^{(n)}$ могут принимать одновременно нулевые значения, но не $\omega^{(i)}$ и $\vec{k}^{(i)}$ при $i \neq n$.

3. Рассмотрим почти монохроматические волны и будем считать, что нелинейность слабо меняет спектры собственных колебаний электромагнитного поля в плазме. В этом случае из уравнений /I.7/ легко получить следующее уравнение, определяющее изменение амплитуд слабозатухающих почти монохроматических волн

$$\frac{d}{dt} [E_i^*(\omega, \vec{k}) E_j(\omega, \vec{k})] \left[\frac{\gamma(\omega) \epsilon_{ij}^H(\omega, \vec{k})}{\omega^2} + \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \right] + \operatorname{div} \vec{S} = \\ = i\omega \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int d\omega^{(n)} d\vec{k}^{(n)} \dots d\omega^{(n-1)} d\vec{k}^{(n-1)} \epsilon_{ij(m\dots j(n))}(\omega, \vec{k}, \omega^{(n)}, \vec{k}^{(n)}, \dots, \omega^{(n-1)}, \vec{k}^{(n-1)}) \right. \\ \left. \times E_i^*(\omega, \vec{k}) E_{j(n)}(\omega - \omega^{(n)}, \vec{k} - \vec{k}^{(n)}) \dots E_{j(n-1)}(\omega^{(n-2)}, \omega^{(n-1)}, \vec{k}^{(n-2)}, \vec{k}^{(n-1)}) E_{j(m)}(\omega^{(n-1)}, \vec{k}^{(n-1)}) + \text{к.с.} \right\} \quad /I.9/$$

где ϵ_{ij}^H — эрмитовская часть тензора диэлектрической проницаемости^[3], а \vec{S} — вектор плотности потока энергии поля в среде^[4,5].

Уравнение /I.9/ представляет собой уравнение сохранения энергии, фактически соответствует обычно используемым в нелинейной оптике укороченным уравнениям поля^[6,7].

4. В дальнейшем будем интересоваться эволюцией волн только с беспорядочными фазами^{2/} и уравнение /I.9/ усредним по фазам или статистическому ансамблю. Ограничимся описанием процессов, для которых в уравнении /I.9/ достаточно удержать члены вплоть до четвертой степени поля и проведем усреднение согласно формуле

$$\langle E_i(\omega, \vec{k}) E_j^*(\omega, \vec{k}') \rangle = \delta(\omega - \omega') \delta(\vec{k} - \vec{k}') \langle E_i E_j \rangle_{\omega, \vec{k}}$$

При пренебрежении корреляцией между амплитудами различных волн, что соответствует пренебрежению нелинейными эффектами, среднее от произведения четырех амплитуд поля можно представить в виде суммы произведений парных корреляторов. В таком же приближении среднее от произведения трех амплитуд поля обращается в нуль. Однако, учет первой нелинейной поправки к амплитуде поля, получаемый из уравнения /I.7/, приводит к тому, что произведение трех амплитуд поля сводится к произведению четырех амплитуд. Уравнение /I.9/ после усреднения для процессов низшего порядка по нелинейности приводится к виду:

2/ В работах^[8-14] развивался другой метод, позволяющий также получить кинетические уравнения для волн с хаотическими фазами.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} (E_i E_j)_{\omega, \vec{k}} \left\{ \frac{\partial (\omega \mathcal{E}_{ij}^*(\omega, \vec{k}))}{\partial \omega} + \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \right\} = \\
 & = i [\mathcal{E}_{ij}(\omega, \vec{k}) - \mathcal{E}_{ji}^*(\omega, \vec{k})] (E_i E_j)_{\omega, \vec{k}} - 2 J_m \left\{ (E_i E_j)_{\omega, \vec{k}} \right\} d\omega d\vec{k}' (E_i E_j)_{\omega, \vec{k}'} \times \\
 & \times \left[V_{ijlm}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') - S_{ijl}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') A_{rp}(\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}') S_{pmr}(\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}', \omega, \vec{k}) \right] / \text{I.10} \\
 & + J_m \left\{ d\omega d\vec{k}' \left\{ A_{ip}^*(\omega, \vec{k}) S_{ijl}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') S_{pmr}^*(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

где

$$A_{ij}(\omega, \vec{k}) = \left[\mathcal{E}_{ij}(\omega, \vec{k}) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \right]^{-1} / \text{I.II}$$

$$V_{ijlm}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') = \mathcal{E}_{ijlm}(\omega, \vec{k}, \omega + \omega', \vec{k} + \vec{k}', \omega', \vec{k}') + \mathcal{E}_{ijml}(\omega, \vec{k}, \omega + \omega', \vec{k} + \vec{k}', \omega, \vec{k}) / \text{I.I2}$$

$$S_{ijl}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') = \mathcal{E}_{ijl}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') + \mathcal{E}_{ilj}(\omega, \vec{k}, \omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}') / \text{I.I3}$$

При применении уравнения /I.10/ для описания различных типов волн в плазме следует учитывать, что индекс „i“ содержит информацию и о поляризации поля в волне. Тогда для изотропной плазмы, например, из уравнения /I.10/ можно получить два уравнения, позволяющие рассмотреть изменение во времени флюктуаций как продольного, так и поперечного поля.

Следует отметить, что решение кинетического уравнения /I.6/ соответствует приближению адиабатического включения поля в бесконечно удаленном прошлом ^{3/}. В работах [16, 17] показано, что такое решение не позволяет построить полной статистической теории поля, но такого решения, как это видно, оказывается достаточным для описания старших по нелинейности процессов. А именно, уравнение /I.10/ описывает, например, индуцированное рассеяние волн на частицах, но не описывает простого рассеяния ^{4/}.

^{3/} В работе [15] при получении решения кинетического уравнения в виде ряда по степеням поля учтено и начальное возмущение функции распределения.

^{4/} В этом отношении способ получения нелинейного уравнения из решения цепочки уравнений для коррелятивных функций, развитый в работах [18, 19], имеет преимущество, ибо оно позволяет учесть последовательно и линейные эффекты.

§2. Нелинейное взаимодействие ленгмюровских волн

I. В однородной и изотропной плазме тензор диэлектрической проницаемости имеет вид [3]:

$$\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{\kappa_i \kappa_j}{\kappa^2} \right) \epsilon^{tr}(\omega, \kappa) + \frac{\kappa_i \kappa_j}{\kappa^2} \epsilon^\ell(\omega, \kappa)$$

где ϵ^{tr} , ϵ^ℓ – соответственно поперечная и продольная диэлектрические проницаемости. В этом разделе будем интересоваться взаимодействием только продольных волн, когда $(E_i E_j)_{\omega, \vec{k}} = (E_\ell^2)_{\omega, \vec{k}} (k_i k_j / \kappa^2)$. Согласно /I.10/ получаем [1]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (E_\ell^2)_{\omega, \vec{k}} \frac{\partial \epsilon'^\ell(\omega, \kappa)}{\partial \omega} = & -2 \epsilon''^\ell(\omega, \kappa) (E_\ell^2)_{\omega, \vec{k}} + \\ & + 2 (E_\ell^2)_{\omega, \vec{k}} \left\{ d\omega' d\vec{k}' (E_\ell^2)_{\omega, \vec{k}'} \frac{\kappa_i \kappa_j \kappa'_i \kappa'_j}{(\kappa \kappa')^2} \operatorname{Im} \left[\int d\omega'' d\vec{k}'' \delta(\omega - \omega' - \omega'') \delta(\vec{k} - \vec{k}' - \vec{k}'') \times \right. \right. \\ & \times \frac{1}{\epsilon^\ell(\omega, \kappa)} S_{ij}(\omega, \vec{k}, \omega, \vec{k}') S_{qsr}(\omega, \vec{k}', \omega, \vec{k}) \frac{\kappa''_p \kappa''_q}{\kappa'^2} - V_{jrs}(\omega, \vec{k}, \omega, \vec{k}') \Big] + \\ & + \pi \operatorname{sgn} \epsilon''^\ell(\omega, \kappa) \delta \left[\epsilon'^\ell(\omega, \kappa) \right] \left\{ d\omega' d\vec{k}' d\omega'' d\vec{k}'' \delta(\omega - \omega' - \omega'') \delta(\vec{k} - \vec{k}' - \vec{k}'') \times \right. \\ & \times \left| \frac{\kappa_i \kappa'_i \kappa''_i}{\kappa \kappa' \kappa''} S_{irj}(\omega, \vec{k}, \omega, \vec{k}') \right|^2 (E_\ell^2)_{\omega, \vec{k}'} (E_\ell^2)_{\omega, \vec{k}''} + 2 \int d\omega' d\vec{k}' d\omega'' d\vec{k}'' \times \\ & \times \delta(\omega - \omega' - \omega'') \delta(\vec{k} - \vec{k}' - \vec{k}'') (E_\ell^2)_{\omega, \vec{k}} (E_\ell^2)_{\omega, \vec{k}'} \operatorname{Im} \left[\frac{\delta_{sr} - \kappa''_s \kappa''_r / \kappa'^2}{\epsilon^{tr}(\omega, \kappa) - c^2 \kappa'^2 / \omega'^2} \frac{\kappa_i \kappa'_i \kappa''_i}{(\kappa \kappa')^2} \times \right. \\ & \left. \left. \times S_{ism}(\omega, \vec{k}, \omega, \vec{k}') S_{irj}(\omega, \vec{k}', \omega, \vec{k}) \right] \right\} \end{aligned} \quad /2.1/$$

Здесь ϵ'^ℓ и ϵ''^ℓ – действительная и мнимая части ϵ^ℓ 5/.

2. Уравнение /2.1/ позволяет рассмотреть различные процессы нелинейного взаимодействия всех возможных в изотропной плазме типов продольных волн 6/. Однако, нас оно будет интересовать только применительно к взаимодействию ленгмюровских волн, закон дисперсии для которых имеет вид:

$$\omega = \omega_{le} \left(1 + \frac{3}{2} \kappa^2 z_{le}^2 \right), \quad \kappa z_{le} \ll 1 \quad /2.2/$$

где $\omega_{le}^2 = 4\pi Ne^2/m$; e , m , T_{le} , N_e – соответственно заряд, масса, температура и плотность числа электронов; $z_{le}^2 = \frac{T_{le}}{m} \omega_{le}^{-2}$.

Процессы распада /и слияния/ с участием трех ленгмюровских волн происходят не могут. Это связано с тем, что для этих процессов

5/ Без последнего слагаемого уравнение /2.1/ соответствует уравнению, полученному в [19] и [20] для не зависящей от времени энергии шумов и также без последнего слагаемого уравнение /2.1/ переходит в уравнение работы [21].

6/ Различные процессы нелинейного взаимодействия электромагнитных волн в плазме с участием волн ионного звука рассмотрены в работах [22 – 26], [12].

нельзя удовлетворить законам сохранения энергии и импульса. Поэтому в уравнении /2.1/ соответствующие таким процессам слагаемые должны быть отброшены. В частности, должно быть отброшено предпоследнее слагаемое в правой части уравнения ^{7/}.

Начнем рассмотрение нелинейного взаимодействия ленгмюровских волн с первого нелинейного слагаемого в правой части уравнения /2.1/, которое описывает индуцированное рассеяние волн на частицах при учете только кулоновского взаимодействия между частицами. Введем плотность энергии продольных волн

$$W^{\ell}(\vec{k}) = (2\pi)^3 \int_0^{\infty} d\omega \frac{(E_{\ell}^2) \omega \vec{k}}{4\pi} \frac{\partial [\omega \epsilon^{\ell}(\omega, k)]}{\partial \omega}$$

Ограничивааясь наибольшими членами по степеням $(k r_{2\alpha})^2 \ll 1$ и считая функции распределения частиц максвелловскими, получим из /2.1/ уравнение для изменения плотности энергии ленгмюровских волн из-за рассматриваемого процесса

$$\delta \left[\frac{\partial W^{\ell}(\vec{k})}{\partial t} \right]_{\ell} = \int d\vec{k}' Q_{ee}^{\ell}(\vec{k}, \vec{k}') W^{\ell}(\vec{k}) W^{\ell}(\vec{k}') \quad /2.3/$$

где

$$Q_{ee}^{\ell}(\vec{k}, \vec{k}') = -\frac{1}{2(2\pi)^3 N_e T_e} \frac{\omega_{ie}}{(\vec{k} \cdot \vec{k}')^2} \frac{(k'' r_{2\alpha})^2}{|1 + \epsilon_i + \epsilon_e|^2} \left\{ \epsilon_e'' \left[\frac{4 r_{2\alpha}^2 [\vec{k} \cdot \vec{k}']^2}{k''^2} \right. \right. \\ \times \left. \left. \left(2(1 + \epsilon_i') \epsilon_e' + |\epsilon_e|^2 \right) + |1 + \epsilon_i|^2 \right] + \epsilon_i'' |\epsilon_e|^2 \right\} \quad /2.4/$$

$$\epsilon_{\alpha} \equiv \epsilon_{\alpha}(\omega'', k'') = (k'' r_{2\alpha})^{-2} \left(1 - J \left(\frac{\omega''}{k'' v_{T_{\alpha}}} \right) \right), \quad J(p) = p e^{-p^2/2} \int_{+\infty}^{v_{T_{\alpha}}/k''} e^{-x^2/2} dx \quad /2.5/$$

$$\omega'' = \omega - \omega' = \frac{3}{2} r_{2\alpha} v_{T_{\alpha}} (k^2 - k'^2), \quad k'' = |\vec{k} - \vec{k}'|, \quad v_{T_{\alpha}} = \sqrt{T_{\alpha}/m_{\alpha}}$$

Нижние индексы у функции Q указывают, что эта величина описывает взаимодействие ленгмюровских волн с ленгмюровскими; а верхний индекс, также как и индекс при квадратной скобке в формуле /2.3/ указывает на то, что учитывается только кулоновское взаимодействие частиц.

Следствием антисимметричности функции Q относительно замены \vec{k} на \vec{k}' и \vec{k}' на \vec{k} является то обстоятельство, что сохраняется величина

$$W_o = \int d\vec{k} W^{\ell}(\vec{k}) = \text{Const} \quad /2.6/$$

Иными словами, в рассматриваемом приближении индуцированное рассеяние волн на частицах не меняет полной энергии шумов. Поэтому уменьшение

^{7/} Продессы распада /и слияния/ с участием четырех волн рассмотрены в работах [27], [28].

энергии в одной области длин волн должно сопровождаться увеличением энергии с другими длинами волн.

Чтобы ответить на вопрос о том, каким образом происходит этот переход энергии, рассмотрим нелинейное взаимодействие двух бесконечно узких пакетов. Для этого возьмем $W(\vec{k})$ в виде [26]

$$W(\vec{k}, t) = W_1(t) \delta(\vec{k} - \vec{k}_1) + W_2(t) \delta(\vec{k} - \vec{k}_2) \quad /2.7/$$

Подставив формулу /2.7/ в /2.3/, получим систему уравнений для изменения W_1 и W_2 , решение которой имеет вид

$$\frac{W_1(t)}{W_2(t)} = \frac{W_1(t_0)}{W_2(t_0)} \exp \left\{ -\alpha_{12} W_0(t-t_0) \right\} \quad /2.8/$$

где $W_0 = W_1(t_0) + W_2(t_0) = W_1(t) + W_2(t)$, $\alpha_{12} = Q_{ee}^e(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$.

Поскольку $\alpha_{12} > 0$ при $k_1 > k_2$, то ясно, что энергия переходит от коротких волн к более длинным [8], причем характеристикой такого перераспределения энергии может служить величина

$$\tau = (\alpha_{12} W_0)^{-1} \quad /2.9/$$

Выражение для $Q_{ee}^e(\vec{k}, \vec{k}')$ /2.4/ можно существенно упростить в ряде предельных случаев. Величина $(\omega_e^2/k''v_e) \ll 1$; поэтому $\epsilon_e' \ll \epsilon_e'' \approx (k''z_{de})^{-2} \gg 1$. Для ионов же величина $(\omega_i^2/k''v_i)$ может быть как велика, так и мала по сравнению с единицей. Рассмотрим сначала такой случай, когда $(\omega_i^2/k''v_i) \rightarrow 0$; тогда в формуле /2.4/ наибольшим в фигурных скобках является последнее слагаемое, содержащее ϵ_i'' и для $Q_{ee}^e(\vec{k}, \vec{k}')$ получаем [26] :

$$Q_{ee}^e(\vec{k}, \vec{k}') = -\frac{3}{8(2\pi)^3 N_e T_e} \frac{\omega_{ie}}{z_{de}} \frac{v_t}{v_i} \left[\frac{z_{de}/z_{de}}{1 + (z_{de}/z_{de})^2} \right]^2 \frac{(k^2 - k'^2)}{|k - k'|} \frac{(\vec{k} \vec{k}')^2}{k k'} \quad /2.10/$$

в этом случае принято говорить, что нелинейное взаимодействие ленгмюровских волн определяется процессом индуцированного рассеяния на ионах, который исследовался в работе [13].

Если же, наоборот, $(\omega_i^2/k''v_i) \rightarrow \infty$, то слагаемое, содержащее ϵ_i'' в формуле /2.4/ может быть отброшено по сравнению со слагаемым, пропорциональным ϵ_e'' . Из формулы /2.4/ в этом предельном случае получаем:

$$Q_{ee}^e(\vec{k}, \vec{k}') = -\frac{3}{8(2\pi)^3 N_e T_e} \frac{\omega_{ie}}{z_{de}} \frac{(k^2 - k'^2)(\vec{k} \vec{k}')^2}{|k - k'| \frac{k^2}{k k'}} \left[1 + (k''z_{de})^2 \frac{\omega_{ie}^2}{\omega''^2} \right]^{-2} \quad /2.11/$$

$$\left\{ 4 z_{de}^2 \frac{[\vec{k} \vec{k}']^2}{k''^2} \left[1 + 2(k''z_{de})^2 \frac{\omega_{ie}^2}{\omega''^2} \right] + (k''z_{de})^4 \left[1 + \frac{\omega_{ie}^2}{\omega''^2} \right]^2 \right\}$$

8/ Полученный вывод о переходе энергии от коротких волн к более длинным соответствует утверждению, сделанному в работе [29], где обсуждалось взаимодействие ленгмюровских волн в одномерной модели.

Для тех значений \vec{k} и \vec{k}' , для которых $|\omega''| \gg \omega_e$ и $|[\vec{k}\vec{k}']| \gg k'^2 r_{de}$ из этой формулы получаем ядро нелинейного уравнения, которое было исследовано в работе [26] и в работах [12, 22, 30].

$$Q_{ee}^{\theta}(\vec{k}, \vec{k}') = -\frac{3}{2(2\pi)^5 N_e T_e} \frac{\omega_e}{r_{de}} z_{de}^3 \frac{(k^2 - k'^2)}{|k - k'|^3} [\vec{k}\vec{k}']^2 \left(\frac{\vec{k}\vec{k}'}{kk'} \right)^2 \quad /2.12/$$

Возможны при $(\omega''/k'' v_{Te}) \rightarrow \infty$ и такие условия, когда $(k'^2 r_{de}) \ll (\omega''/\omega_e) \ll 1$ и $\omega''^2 \ll \omega_e^2 r_{de} (k'^3 / |[\vec{k}\vec{k}']|)$; тогда формула /2.12/ принимает вид:

$$Q_{ee}^{\theta}(\vec{k}, \vec{k}') = -\frac{1}{6(2\pi)^5 N_e T_e} \frac{\omega_e}{\omega_e^2} \frac{\omega_e^2}{r_{de}} z_{de}^3 \frac{|k - k'|^3}{(k^2 - k'^2)} \left(\frac{\vec{k}\vec{k}'}{kk'} \right)^2 \quad /2.13/$$

Это выражение было получено в работе [12] и исследовалось в [22] и [31].

До сих пор речь шла об описании нелинейного взаимодействия волн в наиболее низком приближении по степени малого параметра $(kr_{de})^2$. Рассмотрим теперь следующее приближение.

Ограничимся рассмотрением такого случая, когда в первом приближении было справедливо уравнение /2.3/ с ядром /2.12/. Можно показать [26], что учет следующего порядка по $(kr_{de})^2$ приводит к тому, что в ядре уравнения для нелинейного взаимодействия волн /2.3/ появляется дополнительный член, который следует добавить к выражению /2.12/, а именно

$$\delta Q_{ee}^{\theta}(\vec{k}, \vec{k}') = -\frac{3}{2(2\pi)^5 N_e T_e} \frac{\omega_e}{r_{de}} z_{de}^3 \frac{(k^2 - k'^2)}{|k - k'|} \left\{ \frac{3}{4} z_{de}^2 (k^2 - k'^2) \left(\frac{\vec{k}\vec{k}'}{kk'} \right)^2 \frac{[\vec{k}\vec{k}']^2}{|k - k'|^2} + \frac{z_{de}^4}{4} \frac{[k\vec{k}']^4 + 9(\vec{k}\vec{k}')^4}{k^2 k'^2} \right\} \quad /2.14/$$

Симметричная относительно \vec{k} и \vec{k}' часть формулы /2.13/ определяет изменение энергии волн, в то время как взаимодействие волн с параллельными /и/ взаимноперпендикулярными/ волновыми векторами определяется антисимметричной частью ^{9/}. Если в уравнении для изменения плотности энергии шумов ограничиться лишь нелинейным взаимодействием волн /2.3/ и в качестве ядра уравнения использовать сумму слагаемых /2.12/ и /2.14/, то кинетическое уравнение снова обладает интегралом движения.

Однако, теперь сохраняющейся величиной оказывается не полная энергия волн. Нетрудно убедиться, что с принятой нами точностью разложения по степеням квадрата отношения дебаевского радиуса к длине волны можно говорить о сохранении следующего интеграла [26]

$$\int d\vec{k} \frac{W(\vec{k}, t)}{\omega(\vec{k})} = \text{const} \quad /2.15/$$

^{9/} Уравнение, аналогичное уравнению /2.3/ с ядром /2.11/ для одномерной модели, но содержащее члены и более высокой степени по параметру $(kr_{de})^2$, получено в работе [31].

На квантовом языке такой закон сохранения означает неизменность числа $n(\vec{k}, t)$ квантов ($W(\vec{k}, t) = n(\vec{k}, t) \hbar \omega(\vec{k})$).

В задаче о нелинейном взаимодействии двух бесконечно узких волновых пакетов снова возникает решение, отвечающее спектральному преобразованию практически с тем же характерным временем, которое определяется формулами /2.12/ и /2.9/. Поэтому снова со временем интенсивность коротких волн стремится к нулю, а интенсивность длинных волн — к конечному пределу. Однако, благодаря тому, что согласно /2.15/ сохраняется число квантов, с увеличением длины волны, уменьшается их энергия и в задаче взаимодействия двух волн теряемая ими энергия асимптотически стремится к значению

$$\Delta W = \hbar (\omega(\vec{k}_1) - \omega(\vec{k}_2)) n(\vec{k}_1, t_0) \cong \frac{3}{2} (k_1^2 - k_2^2) z_{de}^2 W_1(t_0)$$

Отсюда очевидно, что нелинейное затухание ленгмюровских волн является слабым, поскольку доля энергии, передаваемая волнами частицам для рассматриваемого случая длин волн, больших по сравнению с дебаевским радиусом, мала.

3. Переходим к рассмотрению последнего слагаемого в уравнение /2.1/, которое описывает влияние поперечного поля при взаимодействии частиц на рассеяние продольных волн. Первый эффект, содержащийся в этом слагаемом, состоит в слиянии двух продольных волн в поперечную волну. Соответствующий вклад возникает благодаря возможности обращения в нуль знаменателя

$$\varepsilon^{t_2}(\omega'', \mathbf{k}'') = (c^2 k''^2 / \omega''^2) \quad /2.16/$$

Слияние двух ленгмюровских волн с частотами порядка ω_e приводит к возникновению поперечной волны с частотой $2\omega_e$ и с волновым вектором, по абсолютной величине равным $\sqrt{3}(\omega_e/c)$. Все частоты волн, участвующих в таком процессе, велики по сравнению с тепловой скоростью электронов, деленной на длину волны колебаний. Это обстоятельство позволяет для тензора S , определяемого формулой /I.13/, получить простое выражение [1]

$$S_{ij}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') = \frac{i}{\omega \omega' \omega''} \frac{4\pi N e \ell^3}{m^2} \left\{ \delta_{ij} \frac{\kappa'_i}{\omega'} + \delta_{ij} \frac{\kappa_i}{\omega} + \delta_{ij} \frac{\kappa''_i}{\omega''} \right\}$$

и найти скорость убывания энергии ленгмюровских волн, благодаря их слиянию с ленгмюровскими волнами и превращению в поперечные волны, которая определяется выражением:

$$\delta \left[\frac{\partial W^{\ell}(\vec{k})}{\partial t} \right]_{ca} = - \frac{1}{12 (2\pi)^2 N_e z_{de}^3} \frac{\omega_e}{T_e} \frac{W^{\ell}(\vec{k})}{\nu_e^2} z_{de}^2 \left\{ \alpha \vec{k}' W^{\ell}(\vec{k}') \frac{[\vec{k} \vec{k}']^2}{(kk')^2} \delta \left[j - \frac{c(\vec{k} \cdot \vec{k}')^2}{\omega_e^2} \right] \right\} /2.17/$$

Если плотность энергии ленгмюровских волн с длинами порядка c/ω_e зависит только от модуля волнового вектора, то характерное время убывания энергии продольных волн за счет образования поперечных, согласно формуле /2.17/, имеет следующий порядок величины

$$\tau_{ca} \sim 10^3 \frac{N_e r_{de}^3}{\omega_e} \frac{T_e}{W^e} \left(\frac{c}{v_t} \right)^5 \quad /2.18/$$

Заметим, что такое же время характеризует слияние продольных колебаний в волновых пакетах с большими волновыми векторами, но с шириной $\sim (\omega_e/c)$.

Чтобы выяснить, какое значение для изменения интенсивности ленгмюровских волн имеет рассмотренный процесс, сравним выражение /2.18/ с соответствующим временем спектрального перераспределения энергии волн с длинами (c/ω_e) , которое обусловлено рассеянием на ионах. Из формул /2.9/ и /2.10/ получаем порядок величины времени спектральной перекачки [1]

$$\tau \sim 10^2 \frac{N_e r_{de}^3}{\omega_e} \frac{T_e}{W^e} \left(\frac{c}{v_t} \right)^4 \frac{v_t}{v_{te}} \quad /2.19/$$

Это время, очевидно, много меньше времени слияния, определяемого формулой /2.18/. При релаксации ленгмюровских колебаний только малая доля их энергии за счет слияния перейдет в поперечные волны, а основная часть энергии перейдет в длинноволновые колебания. Доля такой энергии характеризует отношение времени спектральной перекачки, обусловленной рассеянием на ионах, к времени слияния. Такое отношение, согласно формулам /2.18/, /2.19/ равно (v_t/c) . Однако, поскольку плотность энергии продольных волн может значительно превысить плотность энергии равновесного шума, поперечное излучение, образующееся за счет слияния продольных волн, может быть весьма велико.

4. Помимо рассмотренного эффекта слияния, также благодаря последнему слагаемому в правой части уравнения /2.1/, возникает еще один вид нелинейного взаимодействия. Это взаимодействие возникает от тех областей значений ω и k , для которых выражение /2.16/ отлично от нуля. Речь идет о вкладе в индуцированное рассеяние продольных волн взаимодействия частиц благодаря непотенциальному полю. В работе [1] о таком рассеянии говорилось, как о рассеянии через промежуточную поперечную волну. Соответствующий этому процессу вклад в скорость изменения энергии ленгмюровских волн имеет вид [1] 10/

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial W^e(\vec{k})}{\partial t} \right]_{10} = & - \frac{1}{6(2\pi)^3/2} \frac{\omega_e}{N_e r_{de}^3} \frac{W^e(\vec{k})}{T_e} r_{de}^2 \int d\vec{k}' W^e(\vec{k}') \frac{[\vec{k}\vec{k}']^2 |\vec{k} - \vec{k}'|}{(kk')^2 (k^2 - k'^2)} \left[1 - 4 \frac{c^2 \vec{k} \vec{k}'}{\omega_e^2} \right] \cdot \\ & \cdot \left\{ \frac{4}{9} \frac{c^4 (\vec{k} - \vec{k}')^4}{v_t^4 (k^2 - k'^2)^2} + 2 \frac{c^2}{v_t^2} + \frac{\pi}{2} r_{de}^{-2} (\vec{k} - \vec{k}')^2 \right\}^{-1} \end{aligned} \quad /2.20/$$

10/ Можно показать, что в рассматриваемом трехмерном случае рассеяния через промежуточную поперечную волну члены, соответствующие учету ионов при рассеянии на электронах в (m/M) раз, а члены соответствующие рассеянию на ионах в $V_{tem}/T_e M$ раз меньше рассмотренного выражения /2.20/. В одномерном случае оба указанных эффекта исследовались в работе [31].

Из уравнения /2.20/ следует, что для длин волн меньше (c/ω_{le}) всегда определяющую роль в изменении интенсивности волны играет рассеяние на частицах при учете только кулоновского взаимодействия частиц, которое описывается уравнением /2.3/, /2.4/. В случае же длин волн, превышающих (c/ω_{le}), в кинетическом уравнении для волн может быть существенно и слагаемое /2.20/. Возможны даже такие условия, когда это слагаемое имеет главное значение в изменении интенсивности ленгмюровских волн [I, 31].

В заключение этого параграфа заметим, что на первый взгляд может показаться, что релятивистские поправки к кулоновскому рассеянию могли бы оказаться того же порядка величины, что и эффекты, связанные с поперечной промежуточной волной. Однако, можно показать [32], что релятивистские добавки к кулоновскому рассеянию всегда остаются поправками, в то время как рассеяние, связанное с учетом поперечного поля при взаимодействии частиц, может стать основным для спектрального перераспределения ленгмюровских волн.

§3. Нелинейное взаимодействие ленгмюровских волн в плазме с пучком

Обратимся теперь к рассмотрению нелинейного взаимодействия продольных волн в системе двух взаимопроникающих электронных плазм. Для электронов используем функцию распределения

$$f(\vec{p}) = \frac{N_1}{(2\pi m T_1)^{3/2}} e^{-\frac{(\vec{p} - m\vec{U}_1)^2}{2mT_1}} + \frac{N_2}{(2\pi m T_2)^{3/2}} e^{-\frac{(\vec{p} - m\vec{U}_2)^2}{2mT_2}} \quad /3.1/$$

Считая направленные скорости электронов малыми по сравнению с тепловыми скоростями, а фазовые скорости колебаний соответственно большими, запишем следующее соотношение, определяющее связь частоты волн с волновым вектором

$$\omega = \omega_{le} + \vec{k} \vec{U} + \frac{3}{2} (T/m\omega_{le}) k^2 \quad /3.2/$$

где $\vec{U} = (N_1/N) \vec{U}_1 + (N_2/N) \vec{U}_2$, $T = (N_1/N) T_1 + (N_2/N) T_2$, $N_1 + N_2 = N$

Также, как и в рассмотренном выше случае ленгмюровских волн, распадные условия для волн с законом дисперсии /3.2/ выполнены быть не могут и предпоследнее слагаемое в уравнении /2.1/ следует отбросить. Кроме этого, имея в виду рассмотреть взаимодействие волн с длинами меньше (c/ω_{le}), не будем учитывать влияние поперечного поля на взаимодействие частиц и рассмотрим в правой части уравнения /2.1/ только первый нелинейный член.

С помощью выражений для функции распределения /3.1/ и закона дисперсии /3.2/ в пределе, когда рассеяние на ионах не существенно ($|\omega - \omega'| \gg |\vec{k} - \vec{k}'| v_{T_i}$) и выполнено условие $|\omega - \omega'| \gg \omega_{le}$, получим

следующее уравнение, описывающее нелинейное взаимодействие волн и являющееся аналогом уравнения /2.3/ с ядром /2.12/

$$\frac{\partial W^l(\vec{r})}{\partial t} = - \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \frac{W^l(\vec{r})}{N^3 m \omega_{le}} \int d\vec{k}' W^l(\vec{k}') \frac{[\vec{k} \vec{k}']^2}{|\vec{k} - \vec{k}'|^3} \left(\frac{\vec{k} \vec{k}'}{k k'} \right)^2 \times \\ \times \left\{ N_1 N_2 \left(\frac{1}{v_{T_1}} - \frac{1}{v_{T_2}} \right) (\vec{k} - \vec{k}' \cdot \vec{U}_2 - \vec{U}_1) + \frac{3}{2} \frac{(k^2 - k'^2)}{\omega_{le}} \frac{NT}{m} \left(\frac{N_1}{v_{T_1}} + \frac{N_2}{v_{T_2}} \right) \right\} \quad /3.3/$$

где $v_{T_j} = \sqrt{T_j/m}$ — тепловая скорость.

В уравнении /3.3/ выписаны только наибольшие члены по степеням отношения направленных скоростей электронов к тепловым скоростям и отношению тепловых скоростей к фазовым скоростям волн. В этом приближении энергия волн сохраняется.

Наиболее существенное отличие уравнения /3.3/ от уравнений /2.3/, /2.12/ проявляется в условиях, когда направленная скорость электронов существенно превышает отношение квадрата тепловой скорости частиц к фазовой скорости волн. Тогда можно пренебречь последним слагаемым в фигурной скобке правой части уравнения /3.3/. При этом, например, для задачи нелинейного взаимодействия двух волн возможен переход энергии от больших частот к меньшим [26].

Представляет интерес рассмотрение более точного уравнения, чем уравнение /3.3/. Считая направленную скорость частиц много меньше тепловой и в то же время много больше отношения квадрата тепловой скорости частиц к фазовой скорости волны, можно уточнить уравнение /3.3/, получив поправку, приводящую к нарушению сохранения энергии колебаний. Такая поправка соответствует возникновению в подинтегральном выражении правой части формулы /3.3/ множителя

$$1 + \frac{1}{2} (\vec{k} - \vec{k}' \cdot \vec{U}) \quad /3.4/$$

С учетом такой поправки сохраняющейся величиной оказывается уже не энергия волн, а интеграл /2.15/. Иными словами, можно говорить о сохранении числа квантов. При этом имеет место следующее выражение

$$\Delta W = (\omega_1 - \omega_2) W_1(t_0) / \omega_1 \approx W_1(t_0) (\vec{k}_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{U}) / \omega_{le} \quad /3.5/$$

для разности значений энергии двух волн в начальный момент времени и в бесконечный момент, когда волна с волновым вектором \vec{k}_2 затухает и остается лишь волна с волновым вектором \vec{k}_1 .

Рассмотрим изменение энергии волн /3.5/ применительно к примеру покоющейся плазмы и пучка ($\vec{U}_1 = 0$, $\vec{U}_2 \neq 0$). В этом случае, когда температура покоющейся плазмы ниже температуры пучка и перекачка энергии идет от больших частот к меньшим, согласно /3.5/ имеет место уменьшение энергии волн. Напротив, если температура покоющейся плазмы выше температуры пучка и перекачка идет от меньших частот к большим, энергия волн нарастает. Таким образом, в последнем случае реализуется не только перекачка энергии по спектру, но и увеличение энергии волн, т.е. имеет место нелинейная раскачка колебаний плазмы.

Рассмотренный здесь пример нелинейной раскачки волн медленным пучком соответствует принципиальной возможности такой раскачки при рассеянии волн, указанной в [33]. В этом примере проявляется существенное отличие нелинейной раскачки волн от линейной. Именно, если в линейной теории не возникает каких-либо ограничений на амплитуду /или энергию/ нарастающих волн, то в рассмотренном нами примере нелинейной раскачки энергия волн возрастает на конечную величину.

§4. Нелинейное взаимодействие ленгмюровских и поперечных волн

I. При рассмотрении взаимодействия продольных и поперечных неполяризованных волн для коррелятора поля следует использовать выражение

$$(E_i E_j)_{\omega, \vec{k}} = \frac{k_i k_j}{k^2} (E_\ell^2)_{\omega, \vec{k}} + \frac{1}{2} (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}) (E_{tr}^2)_{\omega, \vec{k}} \quad /4.1/$$

При этом уравнения, определяющие изменения энергии продольных и поперечных шумов, получаемые из общей формулы /I.10/, имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (E_\ell^2)_{\omega, \vec{k}} \frac{\partial \mathcal{E}'^{tr}(\omega, \kappa)}{\partial \omega} &= - (E_\ell^2)_{\omega, \vec{k}} \int d\omega' d\vec{k}' (E_{tr}^2)_{\omega', \vec{k}'} \frac{k_i k_r}{k^2} J_m V_{ijrs}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') \times \\ &\times \left(\delta_{js} - \frac{k'_j k'_s}{k'^2} \right) + (E_\ell^2)_{\omega, \vec{k}} J_m \int d\omega' d\vec{k}' d\omega'' d\vec{k}'' \delta(\omega - \omega' - \omega'') \delta(\vec{k} - \vec{k}' - \vec{k}'') \frac{k_i k_r}{k^2} \times \\ &\times \left(\delta_{mn} - \frac{k'_m k'_n}{k'^2} \right) (E_{tr}^2)_{\omega', \vec{k}'} S_{ism}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') S_{rny}(\omega'', \vec{k}'', \omega, \vec{k}) \times \\ &\times \left\{ \frac{K_s'' K_r''}{K''^2} \frac{1}{\mathcal{E}'^{tr}(\omega'', \kappa'')} + \frac{\delta_{sr} - K_s'' K_r''/K''^2}{\mathcal{E}'^{tr}(\omega'', \kappa'') - C^2 k'^2/\omega''^2} \right\} + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \mathcal{E}''^{tr}(\omega, \kappa) \delta \left[\mathcal{E}'^{tr}(\omega, \kappa) \right] \times \\ &\times \int d\omega' d\vec{k}' d\omega'' d\vec{k}'' \delta(\omega - \omega' - \omega'') \delta(\vec{k} - \vec{k}' - \vec{k}'') \left\{ \frac{k_i k_j' k_n k_m'}{(KK')^2} \left(\delta_{sr} - \frac{K_s'' K_r''}{K''^2} \right) (E_\ell^2)_{\omega', \vec{k}'} (E_{tr}^2)_{\omega'', \vec{k}''} + \right. \\ &+ \frac{k_i k_r'' K_n K_s''}{(KK')^2} \left(\delta_{jn} - \frac{k'_j k'_n}{k'^2} \right) (E_{tr}^2)_{\omega', \vec{k}'} (E_\ell^2)_{\omega'', \vec{k}''} + \frac{1}{2} \frac{k_i k_n}{k^2} \left(\delta_{jm} - \frac{k'_j k'_m}{k'^2} \right) \left(\delta_{sr} - \frac{K_s'' K_r''}{K''^2} \right) \times \\ &\times (E_{tr}^2)_{\omega', \vec{k}'} (E_{tr}^2)_{\omega'', \vec{k}''} \left. \right\} S_{irj}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') S_{nsm}^*(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') \quad /4.2/ \\ \frac{d}{dt} (E_{tr}^2)_{\omega, \vec{k}} \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{\partial(\omega \mathcal{E}'^{tr}(\omega, \kappa))}{\partial \omega} + \frac{C^2 k^2}{\omega^2} \right\} &= -2 \mathcal{E}''^{tr}(\omega, \kappa) (E_{tr}^2)_{\omega, \vec{k}} - (E_{tr}^2)_{\omega, \vec{k}} \times \\ &\times J_m \int d\omega' d\vec{k}' V_{ijrs}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') \left(\delta_{is} - \frac{k_i k_r}{k^2} \right) \frac{k_i' k_s'}{k'^2} (E_\ell^2)_{\omega', \vec{k}'} + (E_{tr}^2)_{\omega, \vec{k}} J_m \int d\omega' d\vec{k}' d\omega'' d\vec{k}'' \quad /4.3/ \\ &\times \delta(\omega - \omega' - \omega'') \delta(\vec{k} - \vec{k}' - \vec{k}'') \left\{ \frac{K_s'' K_r''}{K''^2} \frac{1}{\mathcal{E}'^{tr}(\omega'', \kappa'')} + \frac{\delta_{sr} - K_s'' K_r''/K''^2}{\mathcal{E}'^{tr}(\omega'', \kappa'') - C^2 k'^2/\omega''^2} \right\} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) S_{ism}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') \times \\ &\times S_{rny}(\omega'', \vec{k}'', \omega, \vec{k}) \frac{k_m' k_n'}{k'^2} (E_\ell^2)_{\omega', \vec{k}'} + \pi \operatorname{sgn} \mathcal{E}''^{tr}(\omega, \kappa) \delta \left[\mathcal{E}'^{tr}(\omega, \kappa) - \frac{C^2 k^2}{\omega^2} \right] \times \\ &\times \int d\omega' d\vec{k}' d\omega'' d\vec{k}'' \delta(\omega - \omega' - \omega'') \delta(\vec{k} - \vec{k}' - \vec{k}'') \left(\delta_{in} - \frac{k_i k_n}{k^2} \right) S_{irj}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') S_{nsm}^*(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') \times \\ &\times \left\{ \frac{k_i' k_m' k_r'' K_s''}{(K' K')^2} (E_\ell^2)_{\omega', \vec{k}'} (E_\ell^2)_{\omega'', \vec{k}''} + \frac{1}{2} \frac{k_i' k_m'}{k'^2} \left(\delta_{sr} - \frac{K_s'' K_r''}{K''^2} \right) (E_\ell^2)_{\omega', \vec{k}'} (E_{tr}^2)_{\omega'', \vec{k}''} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \frac{k_r'' K_s''}{k'^2} \left(\delta_{jm} - \frac{k'_j k'_m}{k'^2} \right) (E_\ell^2)_{\omega'', \vec{k}''} (E_{tr}^2)_{\omega', \vec{k}'} \right\} \end{aligned}$$

В условиях, когда необходимо учитывать линейное затухание продольных волн, а также нелинейное взаимодействие продольных волн с продольными, уравнение /4.2/ дополняется правой частью уравнения /2.1/. В настоящем параграфе нас будет интересовать лишь нелинейное взаимодействие продольных волн с поперечными. Поэтому мы ограничимся рассмотрением уравнений /4.2/ и /4.3/.

2. Рассмотрим сначала процесс индуцированного рассеяния волн на частицах. При этом учтем то обстоятельство, что наиболее существенным этот процесс является при рассмотрении нелинейного взаимодействия волн с близкими частотами, при условии, что фазовые скорости этих волн велики по сравнению с тепловыми скоростями частиц. Применимтельно к взаимодействию ленгмюровских волн с поперечными волнами, которым мы будем ниже интересоваться, это означает, что рассматриваются поперечные волны с длинами, большими по сравнению с (c/ω_m).

Начнем рассмотрение с индуцированного рассеяния, когда учтено только кулоновское взаимодействие частиц плазмы. Введем плотность энергии поперечных волн

$$W^{tr}(\vec{k}) = (2\pi)^3 \int_0^\infty d\omega \frac{(E_{tr}^2)_{\omega, \vec{k}}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\omega \left(\varepsilon^{tr}(\omega, \vec{k}) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right) \right] \quad /4.4/$$

и будем считать функции распределения частиц максвелловскими. В первом приближении по малой величине отношения разности частот взаимодействующих волн к их частоте из уравнений /4.2/ и /4.3/ получаем

$$\delta \left[\frac{\partial W^t(\vec{k})}{\partial t} \right]_e = \int d\vec{k}' Q_{tt}^t(\vec{k}, \vec{k}') W^t(\vec{k}) W^{tr}(\vec{k}') \quad /4.5/$$

$$\delta \left[\frac{\partial W^{tr}(\vec{k})}{\partial t} \right]_e = \int d\vec{k}' Q_{tr}^t(\vec{k}, \vec{k}') W^t(\vec{k}) W^{tr}(\vec{k}') \quad /4.6/$$

где

$$Q_{tt}^t(\vec{k}, \vec{k}') = - \frac{1}{4(2\pi)^3} \frac{\omega_e}{Ne T_e} \frac{(\kappa'' r_{20})^2}{|1 + \varepsilon_i + \varepsilon_e|^2} \left\{ \varepsilon_e'' \left[\frac{r_{20}^2}{\kappa'^2} \left(\frac{[\vec{k}\vec{k}']^2}{(kk')^2} \right. \right. \right. \quad /4.7/$$

$$\left. \left. \left. + (k^2 k'^2 - 4(\vec{k}\vec{k}')^2 + 2k'^2(\vec{k}\vec{k}')) + 2 \frac{(\vec{k}\vec{k}')^2}{\kappa^2} k'^2 \right) \left(2(1 + \varepsilon_i) \varepsilon_e' + |\varepsilon_e'|^2 \right) + \frac{[\vec{k}\vec{k}']^2}{(kk')^2} |1 + \varepsilon_i|^2 \right] \right\} + \\ + \frac{[\vec{k}\vec{k}']^2}{(kk')^2} \varepsilon_e'' |\varepsilon_e'|^2 \}$$

$$Q_{tr}^t(\vec{k}, \vec{k}') = - Q_{tt}^t(\vec{k}, \vec{k}') \quad /4.8/$$

Функции ε_a определены формулой /2.5/, в которой

$$\omega'' = \frac{1}{2} (3(kr_{20})^2 - \lambda_0^2 k'^2), \quad \kappa' = |\vec{k} - \vec{k}'|, \quad \lambda_0 = \frac{c}{\omega_e} \quad /4.9/$$

Из уравнений /4.5/ и /4.6/ следует, что в рассмотренном приближении полная энергия продольных и поперечных волн сохраняется и происходит перекачка энергии от одних волн к другим. На примере взаимодействия бесконечно узких пакетов продольных и поперечных волн /как это сделано в §2 для продольных волн/ можно показать, что энер-

гия переходит от волн с большими частотами к волнам с меньшими частотами.

Формула /4.7/ упрощается в ряде предельных случаев. Так при выполнении неравенства $|\omega''| \ll k''v_t$ наибольшим является последнее слагаемое в фигурной скобке. В этом случае принято говорить, что нелинейное взаимодействие связано с индуцированным рассеянием волн на ионах и, как следует из /4.7/, описывается уравнениями /4.5/, /4.6/, в которых следует использовать выражение

$$Q_{tt}^{\ell}(\vec{k}, \vec{k}') = \frac{1}{16(2\pi)^5/2} \frac{\omega_{te}}{N_e T_e z_{de}^3} \frac{v_{te}}{v_t} \frac{(3k^2 z_{de}^2 - \lambda_o^2 k'^2)}{|k - k'|} \frac{[\vec{k} \vec{k}']^2}{(kk')^2} \left[\frac{z_{de}/z_{de}}{1 + (z_{de}/z_{de})^2} \right]^2 / 4.10/$$

При рассеянии на электронах возможны такие условия, когда члены с ϵ_i можно отбросить. Возникающее при этом из формулы /4.7/ ядро уравнений /4.5/ и /4.6/ найдено в работе [I], а также в случае, когда длина поперечной волны значительно больше длины продольной волны, в работе [30].

Если же наоборот слагаемое, содержащее $|1 + \epsilon_i|^2$ является небольшим, то возникающие из /4.7/ выражения соответствуют тем уравнениям, описывающим нелинейное взаимодействие волн, которые исследовались в работах [10, 22, 31].

В отличие от рассмотренного в §2 взаимодействия одних ленгмюровских волн, при взаимодействии ленгмюровских и поперечных волн возможно выполнение условия $|\omega''| \gg k''v_t$. Очевидно, что при этом рассеяние на ионах пренебрежимо мало и определяющее значение имеет рассеяние на электронах. Соответствующие выражения для ядра уравнений /4.5/ и /4.6/ легко получить из формулы /4.7/. Для некоторых случаев получающиеся при этом уравнения получены в [1].

3. До сих пор при рассмотрении рассеяния волн на частицах считалось, что взаимодействие между частицами происходит по кулоновскому закону. В действительности это предположение не всегда оправдано. Учет поперечного поля при взаимодействии частиц содержится в членах уравнений /4.2/ и /4.3/, которые имеют знаменатель /2.16/. В индуцированное рассеяние дают вклад те области ω'' и k'' , где этот знаменатель отличен от нуля. При этом соответствующая скорость изменения энергии продольных волн при $|\omega''| \ll k''v_t$ описывается выражением [I] II/

$$\delta \left[\frac{\partial W^{\ell}(\vec{k})}{\partial t} \right]_{II} = - \frac{1}{16(2\pi)^5/2} \frac{\omega_{te}}{N_e z_{de}^3} \frac{W^{\ell}(\vec{k})}{T_e} z_{de}^3 \int \frac{d\vec{k}'}{(kk')^2} \frac{(3k^2 z_{de}^2 - \lambda_o^2 k'^2)}{|k - k'|} W^{tt'}(\vec{k}') \cdot /4.11/ \\ \times \frac{k'^2 (k \cdot k - k')^2 + (k - k')^2 (\vec{k} \vec{k}')^2}{\lambda_o^4 (k - k')^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{v_t} \right)^2 \left[1 + \frac{k}{4} \lambda_o^2 (k - k')^2 \right] (3k^2 z_{de}^2 - \lambda_o^2 k'^2)^2}$$

II/ Нелинейные уравнения при $|\omega''| \gg k''v_t$ получены в работе [I].

При получении формулы /4.10/ учтено было только рассеяние на электронах. Можно показать, что рассеяние на ионах нужно учитывать только в сильно неизотермической плазме, когда $(T_e/T_i) \gg (M/m)$. Этот случай здесь не рассматривается.

Необходимо подчеркнуть, что скорость изменения энергии продольных волн $\delta [\frac{\partial W^e(\vec{k})}{\partial t}]_{tr}$ мала по сравнению с $\delta [\frac{\partial W^e(\vec{k})}{\partial t}]_e$ в тех случаях, когда происходит рассеяние на ионах. Только, если рассеянием на ионах можно пренебречь, рассеяние через промежуточную поперечную волну может быть существенно. При этом в зависимости от соотношений между длинами продольной и поперечной волн более существенно либо рассеяние, описываемое формулой /4.11/, либо кулоновское рассеяние, определяемое формулами /4.5/ и /4.7/ [I, 31].

4. Помимо процессов индуцированного рассеяния волн на частицах, нелинейное взаимодействие продольных и поперечных волн может возникать и из-за процессов слияния и распада. Именно, рассматриваемые длинноволновые поперечные волны, сливаясь с ленгмюровскими волнами, могут давать поперечную волну с частотой $2\omega_e$ [12]. Вклад такого процесса в скорость убывания энергии ленгмюровских волн, как это следует из уравнения /4.2/, имеет вид [I]

$$\delta \left[\frac{\partial W^e(\vec{k})}{\partial t} \right]_{ca} \cong - \frac{1}{8(2\pi)^2} \frac{\omega_{le}}{N_e z_{de}^3} \frac{W^e(\vec{k})}{T_e} z_{de}^5 \delta \left(3 - \frac{c^2 k^2}{\omega_e^2} \right) \int d\vec{k}' W^{tr}(\vec{k}') \left(k'^2 + \frac{(\vec{k}\vec{k}')^2}{k'^2} \right) /4.12/$$

Аналогично для скорости убывания энергии поперечных волн получаем

$$\delta \left[\frac{\partial W^{tr}}{\partial t} \right]_{ca} \cong - \frac{1}{8(2\pi)^2} \frac{\omega_{le}}{N_e z_{de}^3} \frac{W^{tr}(\vec{k})}{T_e} z_{de}^5 \int d\vec{k}' W^e(\vec{k}') \delta \left(3 - \frac{c^2 k'^2}{\omega_e^2} \right) \left(k'^2 + \frac{(\vec{k}\vec{k}')^2}{k'^2} \right) /4.13/$$

Здесь использовано то, что длина волны поперечного колебания, участвующего в слиянии, значительно больше c/ω_e и с соответствующей точностью можно сказать, что длина волны продольного колебания в формулах /4.12/ и /4.13/ равна $(c/\sqrt{3}\omega_{le})$.

§5. Нелинейное взаимодействие поперечных волн

I. Нелинейное взаимодействие поперечных неполяризованных волн, как это следует из формулы /I.10/, описывается следующим уравнением [I]

[12] Исследование процессов слияния/и распада/ продольных и поперечных волн произвольной длины содержится в работах [9, 10, 12, 22].

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} (E_{tr}^2)_{\omega, \vec{k}} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\varepsilon^{tr'}(\omega, k) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right] = - (E_{tr}^2)_{\omega, \vec{k}} \frac{1}{2} \int d\omega' d\vec{k}' (E_{tr}^2)_{\omega', \vec{k}'} \times \\
 & \times J_m V_{ijrs}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') (\delta_{ir} - \frac{k_i k_r}{k^2}) (\delta_{js} - \frac{k_j' k_s'}{k'^2}) + \frac{1}{2} (E_{tr}^2)_{\omega, \vec{k}} \times \\
 & \times J_m \int d\omega' d\vec{k}' d\omega'' d\vec{k}'' \delta(\omega - \omega' - \omega'') \delta(\vec{k} - \vec{k}' - \vec{k}'') \left\{ \frac{k_s'' k_r''}{k''^2} \frac{1}{\varepsilon''(\omega'', k'')} + \frac{\delta_{sr} - k_s'' k_r'' / k''^2}{\varepsilon''(\omega'', k'') - c^2 k''^2 / \omega''^2} \right\} \times \\
 & \times (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}) S_{ism}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') S_{inj}(\omega'', \vec{k}'', \omega, \vec{k}) (\delta_{mn} - \frac{k'_m k'_n}{k'^2}) (E_{tr}^2)_{\omega', \vec{k}'} + /5.1/ \\
 & + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \varepsilon^{tr'}(\omega, k) \delta \left[\varepsilon^{tr'}(\omega, k) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right] \int d\omega' d\vec{k}' d\omega'' d\vec{k}'' \delta(\omega - \omega' - \omega'') \delta(\vec{k} - \vec{k}' - \vec{k}'') \times \\
 & \times (\delta_{in} - \frac{k_i k_n}{k^2}) S_{irj}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') S_{nsim}^*(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') (\delta_{jm} - \frac{k'_j k'_m}{k'^2}) (\delta_{sr} - \frac{k_s'' k_r''}{k''^2}) \times \\
 & \times (E_{tr}^2)_{\omega, \vec{k}} (E_{tr}^2)_{\omega'', \vec{k}''}
 \end{aligned}$$

Из закона дисперсии для поперечных волн $\omega^2 = \omega_{le}^2 + k^2 c^2$ следует, что для них невозможны процессы слияния /и распада/ с участием трех волн. Единственным процессом взаимодействия поперечных волн в рассматриваемом приближении является индуцированное рассеяние волн на частицах ^{13/}. Начнем изучение этого процесса с тех слагаемых в уравнении /5.1/, в которых учитывается только кулоновское взаимодействие частиц плазмы. Будем интересоваться таким случаем, когда разность частот взаимодействующих волн мала по сравнению с самими частотами. Функцию распределения частиц примем максвелловской. Тогда из уравнения /5.1/ получаем

$$\delta \left[\frac{\partial W^{tr}(\vec{k})}{\partial t} \right]_e = \int d\vec{k}' Q_{tt}^\ell(\vec{k}, \vec{k}') W^{tr}(\vec{k}) W^{tr}(\vec{k}') \quad /5.2/$$

где

$$\begin{aligned}
 Q_{tt}^\ell(\vec{k}, \vec{k}') = & -\frac{1}{8(2\pi)^3 N_e T_e} \frac{\omega_{le}}{\omega^3} \frac{(k'' z_{de})^2}{|1 + \varepsilon_e + \varepsilon_i|^2} \left\{ \varepsilon_e \left[2 \frac{[\vec{k} \vec{k}']^2}{(kk')^2} \cdot \frac{v_{te}^2}{\omega^2} \right. \right. \\
 & \times (k'^2 + k^2 - \vec{k} \vec{k}') \left(2(1 + \varepsilon_i') \varepsilon_i' + |\varepsilon_e|^2 + |\varepsilon_i'|^2 \right) + \left(1 + \frac{(\vec{k} \vec{k}')^2}{(kk')^2} \right) |1 + \varepsilon_i|^2 + \left. \left. \left(1 + \frac{(\vec{k} \vec{k}')^2}{(kk')^2} \right) \varepsilon_i' |\varepsilon_e|^2 \right] \right\} \quad /5.3/
 \end{aligned}$$

Функции ε_α определены формулой /2.5/, в которой

$$\omega'' = \omega - \omega' = \sqrt{\omega_{le}^2 + k^2 c^2} - \sqrt{\omega_{le}^2 + k'^2 c^2}$$

Рассмотрим сначала взаимодействие поперечных волн с длиной волны больше c/ω_{le} и будем считать, что выполнены неравенства $|\omega''| \ll k'' v_t \ll k'' v_e$. Тогда в формуле /5.3/ наибольшим является

^{13/} Заметим, что рассеяние поперечных волн исследовалось также в ряде работ, например [34-36]; кроме того, обсуждение этого вопроса содержится в монографиях [37], [38].

последнее слагаемое в фигурной скобке, которое описывает рассеяние волн на ионах, и можно записать [1]

$$Q_{tt}^l(\vec{k}, \vec{k}') = -\frac{1}{32(2\pi)^{5/2}} \frac{\omega_{te}}{N_e z_{de}^3 T_e} \left(\frac{c}{V_{te}} \right)^2 \frac{z_{de}^6}{V_{te}^2} \frac{4}{(KK')^2} \frac{(K^2 - K'^2)}{|K - K'|} \left[\frac{z_{de}/z_{de}}{1 + (z_{de}/z_{de})^2} \right]^2 / 5.4/$$

Если же попрежнему $|\omega''| \ll K'' V_{te}$, но $|\omega''| \gg K'' V_{te}$ и кроме этого поляризация ионов при рассеянии на электронах не существенна, то из формулы 15.3/ получаем

$$Q_{tt}^l(\vec{k}, \vec{k}') = -\frac{1}{16(2\pi)^{5/2}} \frac{\omega_{te}}{N_e T_e} \left(\frac{c}{V_{te}} \right)^2 z_{de}^3 \frac{[\vec{k}\vec{k}']^2 (K^2 - K'^2)}{(KK')^2 |K - K'| (K^2 + K'^2 - \vec{k}\vec{k}')} / 5.5/$$

Легко упростить выражение 15.3/ и для того случая, когда наибольшим является член, содержащий $|1 + \varepsilon_i|^2$. Здесь однако, этот результат мы не проводим.

Для коротких поперечных волн ($\lambda \ll \frac{c}{\omega_{te}}$) приведем в качестве иллюстрации выражение для Q_{tt}^l только в случае, когда наиболее важным является рассеяние волн на ионах. Тогда из 15.3/ следует:

$$Q_{tt}^l(\vec{k}, \vec{k}') = -\frac{1}{16(2\pi)^{5/2}} \frac{\kappa c}{N_e z_{de}^4 T_e} \left(\frac{V_{te}}{c} \right)^3 \frac{(K - K')}{|K - K'|} \frac{1}{K^2 K'^2} \left(1 + \frac{(\vec{k}\vec{k}')^2}{(KK')^2} \right) \left[\frac{z_{de}/z_{de}}{1 + (z_{de}/z_{de})^2} \right]^2 / 5.6/$$

При получении этой формулы было наложено еще ограничение $K''^2 z_{de}^2 \ll 1$.

Учет поперечного поля при взаимодействии частиц рассмотрим на примере волн с длинами много больше $\frac{c}{\omega_{te}}$. Как и в случаях, которые рассмотрены в §2 и §4, наиболее важным является рассеяние волн на электронах. Соответствующее этому процессу изменение энергии поперечных волн при $|\omega''| \ll K'' V_{te}$ имеет вид [1]

$$\delta \left[\frac{\partial W^{tt}(\vec{k})}{\partial t} \right] = -\frac{1}{4(2\pi)^{5/2}} \frac{\omega_{te}}{N_e z_{de}^3} \frac{W^{tt}(\vec{k})}{T_e} z_{de}^4 \left(\frac{\omega_{te}}{c} \right)^2 \int d\vec{k}' W^{tt}(\vec{k}') \frac{[\vec{k}\vec{k}']^2 (K^2 + K'^2 - \vec{k}\vec{k}')}{(KK')^2 |K - K'| (K^2 - K'^2)} / 5.7/$$

$$\times \left\{ 4 \frac{(\vec{k} - \vec{k}')^4}{(K^2 - K'^2)^2} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{c}{V_{te}} \right)^2 \left(\frac{\omega_{te}^2}{c^2} \right) (\vec{k} - \vec{k}')^{-2} \right\}^{-1}$$

3. До сих пор в рассмотренных случаях нелинейного взаимодействия поперечных волн полагалось, что $|\omega''| = |\omega - \omega'| \ll |K - K'| V_{te}$. Рассмотрим обратный случай $\omega \sim \omega' \gg \omega'' \gg |K - K'| V_{te}$ и длины волн будем считать большими ($\lambda > c/\omega_{te}$). При этом рассеяние волн на ионах также всегда пренебрежимо мало, поскольку характеризующие его времена содержат экспоненту, показатель которой велик. Что касается рассеяния на электронах, то соответствующие выражения можно легко получить из 15.1/ и они имеют вид:

$$\delta \left[\frac{\partial W^{tt}(\vec{k})}{\partial t} \right] = -\frac{1}{16(2\pi)^{5/2}} \frac{\omega_{te}}{N_e z_{de}^3} \frac{W^{tt}(\vec{k})}{T_e} z_{de}^6 \left(\frac{c}{V_{te}} \right)^2 \int d\vec{k}' W^{tt}(\vec{k}') \frac{[\vec{k}\vec{k}']^2 (K^2 - K'^2)}{(KK')^2 |K - K'|} \times / 5.8/$$

$$\times (K^2 + K'^2 - \vec{k}\vec{k}') \left[1 + 8 \left(\frac{V_{te}}{c} \right)^4 \frac{(\vec{k} - \vec{k}')^2}{z_{de}^2 (K^2 - K'^2)^2} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{8} \left(\frac{c}{V_{te}} \right)^2 \frac{z_{de}^2}{(\vec{k} - \vec{k}')^2} \right\}$$

Второе слагаемое в квадратных скобках 15.8/ возникает от учета рассеяния через поперечную волну и всегда пренебрежимо мало по сравнению с единицей. Поэтому в рассматриваемом случае основную роль игра-

ет рассеяние на электронах с учетом только кулоновского взаимодействия между частицами. Характерное время спектральной перекачки имеет величину:

$$\tau \sim 10^3 \frac{N_e z_e^3}{\omega_e} \frac{T_e}{W^{tr}} \left(\frac{V_{re}}{c} \right)^2 \frac{1}{z_e^6 k^5 \Delta K} \exp \left\{ \frac{1}{8} \left(\frac{c}{V_{re}} \right) z_e^2 (\Delta K)^2 \right\}$$

это время экспоненциально велико ($\Delta K = k - k'$).

В заключение следует обратить внимание на следующее обстоятельство. Уравнения /2.1/, /4.2/ и /5.1/ содержат слагаемые, знак которых зависит от знака мнимой части диэлектрической проницаемости. Если функция распределения частиц в плазме такова, что знак мнимой части ϵ' или ϵ^{tr} отрицателен, то возможна новая нелинейная кинетическая неустойчивость. Эта неустойчивость при достаточно большой амплитуде колебаний может оказаться более существенной, чем линейная неустойчивость, которая тоже имеет место в этом случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.М.Горбунов, В.В.Пустовалов, В.П.Силин, ЖЭТФ 47, 1437 /1964/
2. А.П.Кропоткин, В.В.Пустовалов, Препринт ФИАН А-26, 1965.
3. В.П.Силин, А.А.Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмолюбильных сред, Атомиздат, 1961.
4. М.Е.Герценштейн, ЖЭТФ, 26, 680 /1954/.
5. Б.Н.Гершман, В.Л.Гинзбург, Радиофизика 5, 31 /1962/
6. С.А.Ахманов, Р.В.Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, ВИНИТИ, 1964.
7. В.И.Карпман, ЖЭТФ 44, 1309 /1963/
8. Л.М.Коврижных, В.Н.Цытович ЖЭТФ 46 2213 /1964/
9. Л.М.Коврижных, В.Н.Цытович, ЖЭТФ 47 1454 /1964/
10. Л.М.Коврижных, В.Н.Цытович, ДАН 158 1306 /1964/
11. А.К.Гайлитис, В.Н.Цытович, препринт ФИАН А-32 /1964/
12. Л.М.Коврижных, *Reporte interne, EUR-CEA-FC-258, Fontenay aux Roses, France, 1964*
13. А.К.Гайлитис, В.Н.Цытович, ЖЭТФ 46 № 5 /1964/
14. В.Н.Цытович, А.Б.Шварцбург, препринт ФИАН, А-21 /1965/
15. Л.М.Альтшуль, В.И.Карпман, препринт СО АН СССР, 1965
16. Ю.Л.Климонтович, В.П.Силин, ЖЭТФ 42, 286 /1962/
17. Ю.Л.Климонтович, В.П.Силин, ДАН 145 764 /1962/
18. В.П.Силин, Изв. В.Ш., Физика, № I, 21, 1965
19. В.П.Силин, ПМТФ, № I, 32, 1964/
20. Б.Б.Кадомцев, "Вопросы теории плазмы", т. IУ, Атомиздат 1964
21. В.И.Петвиашвили, ДАН 153 1295 /1963/
22. Л.М.Коврижных ЖЭТФ 48 № 4 /1964/
23. В.А.Липеровский, В.Н.Цытович ПМТФ /в печати/, 1965
24. В.А.Липеровский, В.Н.Цытович, ЖТФ /в печати/, 1965

25. Г.И. Сурамлишвили, ДАН 153 317 /1963/
26. Л.М. Горбунов, В.П. Силин, ЖЭТФ 47 № 7, 1964
27. Л.М. Коврижных ЖЭТФ 48, вып. 7 /1965/
28. А.А. Веденов, "Вопросы теории плазмы" т.Ш, Атомиздат, 1964
29. W.E. Drummond, D. Pines, *Nucl. Fusion, Suppl. p. 3, 1049, 1962*
30. А.К. Гайлитис, В.Н. Цытович, препринт ФИАН, А-26, 1964
31. В.Н. Цытович, препринт ФИАН А-79, 1964
32. Л.М. Горбунов, диссертация ФИАН, 1964.
33. В.П. Силин, ЖЭТФ 45, 816 /1963/
34. А.И. Ахиезер, И.А. Ахиезер, А.Г. Ситенко, ЖЭТФ 41 690 /1961/
35. M. Rosenbluth, N. Rostoker, *Phys of Fluids*, 5, 776, 1962.
36. Н.В. Шолохов, Радиофизика 7 452 /1964/
37. А.И. Ахиезер и др. "Коллективные колебания в плазме"
Атомиздат, 1964.
38. В.Д. Шафранов, Сб. "Вопросы теории плазмы",
Атомиздат 1964, т.3.

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

А.П. КРОПОТКИН и В.В. ПУСТОВАЛОВ
ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. П.Н. ЛЕБЕДЕВА АН СССР, МОСКВА
СССР

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

NON-LINEAR INTERACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN A MAGNETO-ACTIVE PLASMA. 1. With a view to constructing a theory of induced scattering of electromagnetic waves on the particles of a magneto-active plasma, recourse was had to the general method of deriving equations describing the non-linear interaction of waves as used previously by Gorbunov, Pustovalov and Silin [2] for the case of an isotropic plasma. By this means similar equations can also be written for a magnetoactive plasma. The plasma ground state distribution function used for this purpose is regarded as constant in time and space. This means disregarding the effect of oscillations on the distribution of the particles, and in a number of cases this is fully justified; at the same time the equations describing wave interaction can be written in closed form. The spectra of the interacting waves are regarded as linear, that is independent of their energy. 2. The authors have studied the induced scattering of electromagnetic waves on particles of an unbounded homogeneous magnetoactive plasma. Such interaction plays the greatest part, as far as the problem is treated non-linearly, in cases where the expansion spectrum of the interacting waves do not satisfy the decay conditions. In such a case, in obtaining the starting equations terms up to and including those of the third order must be taken into account for the purpose of expanding the current density in powers of the field. Particular attention was paid to wave interaction in a cold plasma, and also to the interaction of longitudinal waves in non-isothermal and other plasmas with arbitrary electron and ion temperatures. 3. For the case of a cold plasma, general expressions were derived for the tensors determining the matrix elements of interaction, and by means of these expressions equations were obtained describing the evolution in time of the expansion of oscillation energy for various relationships between the frequencies and directions of propagation of the interacting waves and the parameters of the plasma. On the basis of these equations the authors formed certain estimates of the relaxation times characterizing this particular type of interactions. 4. In studying the interaction of longitudinal waves, it is sufficient, in order to write the appropriate equations, to know the expressions for two scalar magnitudes, namely the convolutions of the tensors constituted by the matrix elements of interaction with the tensors constituted by the wave vector components of the interacting waves. The authors found explicit expressions for these magnitudes and so obtained equations describing the induced scattering on particles of waves belonging to the various transparency regions that exist in magnetoactive plasma. By making a number of specific assumptions regarding the initial energy distribution and the frequency ratios of the interacting waves, they obtain estimates of the interaction times. 5. Thanks to their symmetry properties, the explicit form of the kernels of integro-differential equations for the energies of interacting waves makes it possible to judge whether wave energy is being conserved in the particular approximation under consideration. The situation in this respect is in many ways similar to the case of an isotropic plasma. 6. The equations for non-linear interaction of electromagnetic waves in a magnetoactive plasma have been used to calculate the cross-sections for the induced scattering of these waves on the plasma particles. The results were not averaged with respect to wave polarization.

INTERACTION NON LINÉAIRE DES ONDES ELECTROMAGNÉTIQUES DANS UN PLASMA MAGNETOACTIF.

1. Pour mettre au point une théorie de la diffusion induite des ondes électromagnétiques sur les particules d'un plasma magnétoactif, les auteurs ont eu recours à la méthode générale utilisée précédemment par Gorbounov, Poustovalov et Siline [2] en vue d'obtenir des équations décrivant l'interaction non linéaire d'ondes pour un plasma isotrope. Cette méthode permet également d'établir des équations analogues pour un plasma magnétoactif. Les auteurs considèrent la fonction de distribution du plasma à l'état fondamental, utilisée à cet effet, comme constante dans le temps et dans l'espace; en d'autres termes ils négligent l'influence des oscillations sur la distribution des particules, ce qui, dans un grand nombre de cas est parfaitement justifié; en même temps, il est possible d'écrire les équations décrivant l'interaction des ondes sous forme fermée. Les spectres

des ondes en interaction sont considérés comme linéaires, c'est-à-dire indépendants de leur énergie. 2. Les auteurs ont étudié la diffusion induite des ondes électromagnétiques sur les particules d'un plasma magnétoactif homogène illimité. Cette interaction joue le plus grand rôle, dans la mesure où le problème est traité en non linéarité, dans les cas où les spectres d'ondes en interaction ne satisfont pas aux conditions de décroissance. En pareil cas, pour établir les équations de départ il faut dans le développement en série de la densité du courant selon les puissances du champ, tenir compte des termes jusqu'au troisième ordre inclus. Les auteurs ont accordé une attention particulière à l'interaction des ondes dans un plasma froid, ainsi qu'à l'interaction des ondes longitudinales dans des plasmas dont les électrons et les ions ont des températures arbitraires y compris dans un plasma non isotherme. 3. Dans le cas d'un plasma froid, les auteurs ont trouvé des expressions générales pour les tenseurs, qui déterminent les éléments matriciels de l'interaction et, à l'aide de ces expressions, ils ont obtenu des équations décrivant l'évolution dans le temps de la distribution de l'énergie des oscillations pour diverses relations entre les fréquences et les directions de propagation des ondes en interaction, d'une part, et les paramètres du plasma, d'autre part. En se fondant sur ces équations, ils ont procédé à plusieurs évaluations des temps de relaxation caractéristiques de ce type donné d'interactions. 4. Dans l'étude de l'interaction d'ondes longitudinales, il suffit, pour établir les équations correspondantes, de connaître les expressions pour deux grandeurs scalaires, à savoir les convolutions des tenseurs déterminant les éléments matriciels de l'interaction et les tenseurs constitués par les composantes des vecteurs d'onde des ondes en interaction. Les auteurs ont trouvé des expressions explicites pour ces grandeurs et ont pu ainsi obtenir des équations décrivant la diffusion induite sur les particules d'ondes appartenant aux diverses zones de transparence du plasma magnétoactif. En faisant certaines hypothèses concrètes au sujet de la distribution spectrale de l'énergie et des rapports de fréquence des ondes en interaction, ils ont obtenu des évaluations des temps caractéristiques de l'interaction. 5. La forme explicite des noyaux des équations intégradiéférentielles pour les énergies d'ondes en interaction permet, grâce à leurs propriétés de symétrie, de juger si une énergie d'onde est conservée ou non dans une approximation particulière. A ce sujet, la situation est analogue à bien des égards à celle qui se présente dans le cas d'un plasma isotrope. 6. Les auteurs ont utilisés les équations d'interaction non linéaire des ondes électromagnétiques dans un plasma magnétoactif en vue de calculer les sections efficaces pour la diffusion induite de ces ondes sur les particules du plasma. Ils n'ont pas procédé dans ce cas à l'intégration pour la polarisation des ondes.

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ. 1. Для построения теории индуцированного рассеяния электромагнитных волн на частицах магнитоактивной плазмы использован общий метод получения уравнений, описывающих нелинейное взаимодействие волн, примененный ранее для случая изотропной плазмы в работе Л.М. Горбунова, В.В. Пустовалова, В.П. Силина. Этот метод позволяет написать аналогичные уравнения и для магнитоактивной плазмы. Используемая при этом функция распределения основного состояния плазмы считается постоянной во времени и пространстве. При таком подходе влиянием колебаний на распределение частиц пренебрегается, что в ряде случаев вполне оправдано; в то же время уравнения, описывающие взаимодействие волн, удается написать в замкнутой форме. Спектры взаимодействующих волн считаются линейными, т.е. независящими от энергий. 2. Изучено индуцированное рассеяние электромагнитных волн на частицах безграничной однородной магнитоактивной плазмы. Такое взаимодействие является старшим по нелинейности в тех случаях, когда спектры взаимодействующих волн не удовлетворяют распадным условиям. Тогда при получении исходных уравнений в разложении плотности тока по степеням поля приходится учитывать члены до третьего порядка включительно. Особое внимание уделено взаимодействию волн в холодной плазме, а также взаимодействию продольных волн в плазме с произвольными температурами электронов и ионов, в том числе и неизотермической. 3. Для случая холодной плазмы найдены общие выражения для тензоров, определяющих матричные элементы взаимодействия, и с их помощью получены уравнения, описывающие эволюцию во времени спектрального распределения энергии колебаний при различных соотношениях между частотами и направлениями распространения взаимодействующих волн и параметрами плазмы. На основании этих уравнений получены некоторые оценки характерных времен релаксации для данного типа взаимодействий. 4. При изучении взаимодействия продольных волн для написания соответствующих уравнений достаточно знать выражения для двух скалярных величин — сверток тензоров, определяющих матричные элементы взаимодействия, с тензорами, составленными из компонент волновых векторов взаимодействующих волн. В работе найдены явные выражения для таких величин и с их помощью получены уравнения, описывающие индуцированное рассеяние на частицах волн, принадлежащих различным областям прозрачности, существующим в магнитоактивной плазме. При некоторых конкретных предположениях относительно начального распределения энергии и соотношений частот взаимодействующих волн получены оценки характерных времен

взаимодействия. 5. Явный вид ядер интегро-дифференциальных уравнений для энергии взаимодействующих волн позволяет с помощью их свойств симметрии судить о сохранении или несохранении энергии волн в рассматриваемом приближении. Ситуация здесь во многом аналогична случаю изотропной плазмы. 6. Из уравнений нелинейного взаимодействия электромагнитных волн в магнитоактивной плазме получены сечения вынужденного рассеяния этих волн на частицах плазмы. При этом усреднение по поляризации волн не производится.

INTERACCION NO LINEAL DE ONDAS ELECTROMAGNETICAS EN UN PLASMA MAGNETOACTIVO.

1. Para elaborar una teoría de la dispersión inducida de ondas electromagnéticas en las partículas de un plasma magnetoactivo, los autores han utilizado el método general de obtención de ecuaciones que describen la interacción no lineal de las ondas, anteriormente empleado para el caso de un plasma isotrópico por Gorbunov, Pustovalov y Silin [2]. Este método permite también escribir las ecuaciones analógicas correspondientes a un plasma magnetoactivo. La función de distribución del estado fundamental del plasma empleada para ese fin se considera constante en el tiempo y en el espacio. Ello significa que se desprecia la influencia que las oscilaciones ejercen sobre la distribución de las partículas, lo que está plenamente justificado en una serie de casos; al mismo tiempo, las ecuaciones correspondientes a la interacción de las ondas pueden escribirse en forma cerrada. Los espectros de las ondas de interacción se consideran lineales, es decir, independientes de su energía. 2. Los autores han estudiado la dispersión inducida de las ondas electromagnéticas en las partículas de un plasma magnetoactivo homogéneo e infinito. Esta interacción desempeña el papel principal si se tiene en cuenta el carácter no lineal del problema cuando los espectros de las ondas que interaccionan no cumplen las condiciones de desintegración. En dicho caso, al obtener las ecuaciones iniciales en el desarrollo de la densidad de la corriente según las potencias del campo, conviene tener en cuenta los términos hasta el tercer orden inclusive. Se ha prestado especial atención a la interacción de las ondas en un plasma frío, así como la interacción de las ondas longitudinales en un plasma con temperaturas electrónicas e iónicas arbitrarias, y en particular en un plasma no isotérmico. 3. Para un plasma frío, los autores hallaron las expresiones generales correspondientes a los tensores que determinan los elementos matriciales de la interacción, y mediante esas expresiones han hallado las ecuaciones que describen la evolución, en función del tiempo, de la distribución espectral de la energía de las oscilaciones para distintas razones entre las frecuencias y las direcciones de propagación de las ondas de interacción y los parámetros del plasma. Basándose en estas ecuaciones los autores han efectuado algunos cálculos relativos a los tiempos característicos de relajación para ese tipo de interacciones. 4. Al estudiar la interacción de las ondas longitudinales es suficiente para formular las correspondientes ecuaciones, conocer las expresiones de dos magnitudes escalares: la convolución de los tensores que determinan los elementos matriciales de interacción, y los tensores constituidos por componentes de los vectores ondulatorios de las ondas de interacción. Los autores han hallado expresiones explícitas para esas magnitudes que han permitido obtener ecuaciones que describen la dispersión inducida en partículas de ondas pertenecientes a las distintas regiones de transparencia existentes en un plasma magnetoactivo. Haciendo algunas suposiciones específicas acerca de la distribución espectral inicial de la energía y la razón de frecuencias de las ondas de interacción los autores han evaluado los tiempos característicos de interacción. 5. Gracias a sus propiedades simétricas, la forma explícita de los núcleos de las ecuaciones integro-diferenciales correspondientes a las energías de las ondas de interacción permite determinar si la energía de las ondas en una aproximación particular se conserva o no. A este respecto, la situación es muy parecida en el caso de un plasma isotrópico. 6. Las ecuaciones para una interacción no lineal de las ondas electromagnéticas en un plasma magnetoactivo han sido empleadas para calcular las secciones de la dispersión inducida de estas ondas en las partículas del plasma. Los resultados no se promediaron con respecto a la polarización de las ondas.

Введение

Линейная электродинамика безграничной однородной магнитоактивной плазмы без учета столкновений изложена во многих работах /см., например, [1] гл. III/. С ростом амплитуды собственные колебания плазмы перестают быть независимыми, начинают взаимодействовать между собой, так что при этом уже нельзя ограничиваться линейным приближением. Естественно строить теорию нелинейного взаимодействия электромагнитных волн на основании тех же уравнений, которые положены в основу

линейной теории: кинетического уравнения самосогласованного приближения и уравнений поля. Нелинейность при этом возникает из нелинейного материального уравнения для плотности тока, после того как решение кинетического уравнения получено в виде ряда по степеням поля. Такая программа была выполнена в [2] для изотропной плазмы и осуществляется в настоящем сообщении /см. также [3]/ для однородной безграничной магнитоактивной плазмы.

Заметим, что нелинейному взаимодействию волн в магнитоактивной плазме посвящено довольно много работ [4, 5]. В методическом отношении наиболее близко к данной стоят работы [5], отличающиеся, однако, тем, что авторы ограничиваются в них рассмотрением стационарного случая.

Содержание нашей работы разбито на 3 части. В первом параграфе изложены основные положения теории нелинейного взаимодействия электромагнитных волн в магнитоактивной плазме. Во втором параграфе изучается индуцированное рассеяние волн в холодной плазме на частицах. Третий параграф посвящен индуцированному рассеянию продольных волн в горячей плазме. В заключение приводится пример сечения рассеяния продольных волн на частицах плазмы, полученного из уравнений нелинейного взаимодействия волн. С помощью общих соотношений первого параграфа можно изучить также процессы комбинационного индуцированного рассеяния волн /см. [3]/; из-за ограниченности объема данной работы эти процессы здесь не излагаются.

§I. Нелинейная электродинамика однородной замагниченной плазмы

Нелинейная электродинамика однородной безграничной плазмы, находящейся в постоянном однородном внешнем магнитном поле \vec{B}_0 , так же, как и линейная /см. [1], гл. III/, основывается на уравнениях Максвелла

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{B} &= \frac{i}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned} \quad /I.1/$$

и кинетическом уравнении самосогласованного приближения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{z}} + \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{B}_0] \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} + e \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{J} \vec{B}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0, \quad /I.2/$$

связанных материальным уравнением

$$j_i \equiv j_i(\vec{z}, t) = e \int d\vec{p} v_i f(\vec{p}, \vec{z}, t) \quad /I.3/$$

для плотности тока \vec{j} . Здесь и далее $\vec{E} = \vec{E}(\vec{z}, t)$, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{z}, t)$ — самосогласованные электрическое и магнитное поле в плазме, $f(\vec{p}, \vec{z}, t)$ — функция распределения частиц плазмы, \vec{p} — импульс частицы, \vec{v} — ее скорость, e — заряд, \vec{z} и t — координата и время, c — скорость света в вакууме. Нулевая правая часть кинетического уравнения

/I.2/ физически соответствует тому, что все рассматриваемые ниже процессы происходят за время, большее, чем времена столкновения частиц, т.е. изучается плазма без учета столкновений. В равенствах /I.2/ и /I.3/ подразумевается суммирование по сортам частиц плазмы, знак суммы и индекс, указывающий сорт частиц, в дальнейшем всюду опускается.

Линейная электродинамика имеет место в том случае, когда плотность тока $\vec{j}(\vec{z}, t)$ является линейным функционалом поля, т.е. если кинетическое уравнение /I.2/ решено в линейном по полю приближении. Для получения уравнений нелинейной электродинамики представим функцию распределения $f(\vec{p}, \vec{z}, t)$ в виде бесконечной суммы слагаемых $f_n(\vec{p}, \vec{z}, t)$

$$f(\vec{p}, \vec{z}, t) = f_0(\vec{p}, \vec{z}, t) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{p}, \vec{z}, t), \quad /I.4/$$

таких, что $f_{n+1} \ll f_n$. Ряд /I.4/ является рядом по степеням электромагнитного поля. С учетом этого разложения из уравнения /I.2/ получаем цепочку зацепляющихся уравнений

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f_n}{\partial \vec{z}} + \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{B}_0] \frac{\partial f_n}{\partial \vec{p}} = -e \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{B}] \right\} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \vec{p}} \quad /I.5/$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

для неравновесных добавок $f_n(\vec{p}, \vec{z}, t)$ и уравнение для функции распределения основного состояния

$$\frac{e}{c} [\vec{v} \vec{B}_0] \frac{\partial f_0}{\partial \vec{p}} = 0. \quad /I.6/$$

Заметим, что выбор уравнения /I.6/ соответствует предположению о независимости функции распределения основного состояния плазмы $f_0(\vec{p}, \vec{z}, t)$ от времени t и координаты \vec{z} . При этом пренебрегается влиянием колебаний плазмы на распределение частиц в основном состоянии /см., например, [2]/.

Высказанные соображения являются простым повторением основных положений методики, изложенной в [2] в применении к изотропной безграничной и однородной плазме. Отличие, по существу, состоит лишь в появлении третьего слагаемого в левых частях уравнений /I.2/ и /I.6/, учитывающего наличие внешнего магнитного поля \vec{B}_0 . Именно это слагаемое и определяет всю специфику нелинейной электродинамики плазмы во внешнем поле.

Решая уравнение /I.5/ методом характеристик /см. [1], стр. 135/, получим рекуррентное соотношение

$$f_n(\vec{p}, \omega, \vec{E}) = -e \int d\omega_i d\vec{k}_i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau + i\vec{k}\vec{E}\vec{R}(\tau, \vec{v})} \times E_j(\omega - \omega_i, \vec{k} - \vec{k}_i) d_{ij}(\omega - \omega_i, \vec{k} - \vec{k}_i, \vec{v}(\tau, \vec{v})) \frac{\partial f_{n-1}(\omega_i, \vec{k}_i, \vec{p}(\tau, \vec{v}))}{\partial p_i(\tau, \vec{v})} \quad /I.7/$$

для Фурье-компонент $f_n(\vec{p}, \omega, \vec{k})$ неравновесных добавок функции распределения

$$f_n(\vec{p}, \vec{\varepsilon}, t) = \int d\omega d\vec{k} e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{\varepsilon}} f_n(\vec{p}, \omega, \vec{k}). \quad /I.8/$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование и используются обозначения

$$\vec{v}(\tau, \vec{v}) = \vec{h}(\vec{h}\vec{v}) + [\vec{v}\vec{h}] \sin \Omega \tau + [\vec{h}[\vec{v}\vec{h}]] \cos \Omega \tau, \quad /I.9/$$

$\vec{v}(0, \vec{v}) \equiv \vec{v}$, $\Omega = \frac{eB_0 c}{\epsilon(\rho)}$ — гирокорицкая частота частицы с энергией $\epsilon(\rho)$, \vec{k} — единичный вектор в направлении внешнего магнитного поля: $\vec{h} = \vec{B}_0/B_0$, $\vec{p}(\tau, \vec{v}) = \frac{\epsilon(\rho)}{c^2} \vec{v}(\tau, \vec{v})$.

$$\delta R(\tau, \vec{v}) = \int_0^\tau \vec{v}(\tau', \vec{v}) d\tau', \quad /I.10/$$

$$d_{ij}(\omega, \vec{k}, \vec{v}(\tau, \vec{v})) = \frac{k_i v_j(\tau, \vec{v}) + \delta_{ij}(\omega - \vec{k}\vec{v}(\tau, \vec{v}))}{\omega} \quad /I.11/$$

Правая часть /I.7/ зависит только от электрического поля, т.к. Фурье-компоненты магнитного поля $\vec{B}(\omega, \vec{k})$ исключена из выражения для силы Лоренца

$$e \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{B}] \right\} \quad /I.12/$$

с помощью первого из уравнений Максвелла /I.1/

$$\frac{c}{\omega} [\vec{k} \vec{E}] = \vec{B}(\omega, \vec{k}). \quad /I.13/$$

Итерируя равенство /I.7/ n раз (начиная с $n=1$), получим выражение для $f_n(\vec{p}, \omega, \vec{k})$ через функцию распределения основного состояния

$$f_n(\vec{p}, \omega, \vec{k}) = (-e)^n \int d\omega_n d\vec{k}_n \dots d\omega_1 d\vec{k}_1 \int d\tau_n \dots \int d\tau_1 \times \\ \times g_0 \Gamma_{j_1} g_1 \dots \Gamma_{j_n} f_0(\omega_n, \vec{k}_n, \vec{p}(\sum_{k=0}^{n-1} \tau_k, \vec{v})) E_{j_1}(\omega - \omega_n, \vec{k} - \vec{k}_1) \dots E_{j_n}(\omega_{n-1} - \omega_n, \vec{k}_{n-1} - \vec{k}_n), \quad /I.14/$$

где

$$g_0 \equiv \exp \{-i\omega \tau_0 + i\vec{k} \delta R(\tau_0, \vec{v})\} \quad /I.15/$$

$$g_n \equiv \exp \{-i\omega_n \tau_n + i\vec{k}_n [\delta R(\sum_{k=0}^{n-1} \tau_k, \vec{v}) - \delta R(\sum_{k=0}^{n-2} \tau_k, \vec{v})]\} \quad /I.16/$$

$$\Gamma_{j_n} = d_{ij_n}(\omega_{n-1} - \omega_n, \vec{k}_{n-1} - \vec{k}_n, \vec{v}(\sum_{k=0}^{n-1} \tau_k, \vec{v})) \frac{\partial}{\partial p_i(\sum_{k=0}^{n-1} \tau_k, \vec{v})}. \quad /I.17/$$

Равенства /I.4/, /I.6/, /I.14/-/I.17/ полностью определяют функцию распределения частиц $f(\vec{p}, \vec{\varepsilon}, t)$ в неравновесной магнитоактивной однородной плазме, а значит, и плотность тока /I.3/. Система уравне-

ний /I.1/-/I.3/ в общем случае нелинейной электродинамики принимает вид

$$\frac{C^2 k^2}{\omega^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) E_j(\omega, \vec{k}) = \sum_{n=1}^{\infty} \int d\omega_1 d\vec{k}_1 \dots d\omega_n d\vec{k}_n \times \\ \times \epsilon_{i_1 \dots i_n j_n}(\omega, \vec{k}, \omega_1, \vec{k}_1, \dots \omega_n, \vec{k}_n) E_{j_n}(\omega - \omega_1, \vec{k} - \vec{k}_1) \dots E_{j_1}(\omega_n - \omega_1, \vec{k}_n - \vec{k}_1) /I.18/$$

где

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n j_n}(\omega, \vec{k}, \omega_1, \vec{k}_1, \dots \omega_n, \vec{k}_n) = \delta_{nn} \delta_{ij} \delta(\omega_1) \delta(\vec{k}_1) - /I.19/ \\ - i \frac{4\pi e}{\omega} (-e)^{n+1} \int d\vec{p} v_i \int d\tau_1 \dots \int d\tau_n g_0 f_0 \int d\vec{p} f_0(\omega_n, \vec{k}_n, \vec{p} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \vec{r}_k, \vec{v} \right))$$

и связь электрического и магнитного полей дается равенством /I.13/. Тензор $\epsilon_{i_1 \dots i_n j_n}$ является естественным обобщением тензора $\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$ диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы /см. [I], стр. 136, равенство /19.9/ / и при $n=1$ переходит в него с точностью до множителя

$$\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}, \omega_1, \vec{k}_1) = \delta(\omega_1) \delta(\vec{k}_1) \left\{ \delta_{ij} - i \frac{4\pi e^2}{\omega} \int d\vec{p} v_i \int d\tau_1 \exp[i\omega_1 t_1 + i\vec{k}_1 \vec{r}_1] \right. \\ \times d_{ij}(\omega, \vec{k}, \vec{v}(t_1, \vec{v})) \left. \frac{\partial f_0(\vec{p}(t_1, \vec{v}))}{\partial p_e(t_1, \vec{v})} \right\} /I.20/$$

При этом использовано упоминавшееся предположение о независимости функции распределения основного состояния от времени и координат

$$f_0(\vec{p}, \omega, \vec{k}) = \delta(\omega) \delta(\vec{k}) f_0(\vec{p}) /I.21/$$

Переход от уравнения /I.18/ к уравнению для спектральной плотности флуктуаций $(E_j E_i)_{\omega, \vec{k}}$ почти монохроматических волн в плазме с внешним магнитным полем производится усреднением по хаотическим фазам и ничем не отличается от такого перехода в изотропной плазме. Поэтому без дополнительных оговорок выпишем уравнение для спектральной плотности флуктуаций, считая, что плотность тока \vec{j} содержит слагаемые, не выше третьей степени поля \vec{E}

$$\frac{i}{\omega} \frac{d}{dt} (E_j E_i)_{\omega, \vec{k}} \left\{ \frac{\partial \omega \epsilon_{ij}''(\omega, \vec{k})}{\partial \omega} + \frac{C^2 k^2}{\omega^2} (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}) \right\} + \operatorname{div}(\frac{\vec{S}}{\omega})_{\omega, \vec{k}} = \\ = i [\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) - \epsilon_{ji}^*(\omega, \vec{k})] (E_j E_i)_{\omega, \vec{k}} - 2 J_m \left\{ (E_j E_i)_{\omega, \vec{k}} \int d\omega' d\vec{k}' (E_{j'} E_{i'})_{\omega', \vec{k}'} \right\} /I.22/ \\ \times V_{ij_2 j_3 j_4}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') \left\{ + J_m \int d\omega' d\vec{k}' \left\{ A_{i2}^*(\omega, \vec{k}) S_{ij_2 j_3}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') \right. \right. \\ \times S_{ij_2 j_3}^*(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') (E_{j2} E_{j4})_{\omega', \vec{k}'} (E_{j3} E_{j4})_{\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}'} + 2 S_{ij_2 j_3}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') \times \\ \times A_{j_2 2}(\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}') S_{ij_2 j_3}(\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}', \omega, \vec{k}) (E_{j2} E_{j4})_{\omega', \vec{k}'} (E_{j3} E_{j4})_{\omega, \vec{k}} \right\};$$

$$A_{ij}(\omega, \vec{k}) = [\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2})]^{-1},$$

/I.23/

$$V_{ij_2 j_3 j_4}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') = \epsilon_{ij_2 j_3 j_4}(\omega, \vec{k}, \omega + \omega', \vec{k} + \vec{k}', \omega', \vec{k}') +$$

$$+ \epsilon_{ij_2 j_3 j_4}(\omega, \vec{k}, \omega + \omega', \vec{k} + \vec{k}', \omega, \vec{k}),$$

/I.24/

$$S_{ij_2 j_3}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') = \epsilon_{ij_2 j_3}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') + \epsilon_{ij_2 j_3}(\omega, \vec{k}, \omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}')$$

/I.25/

При применении этого уравнения для изучения эволюции флюктуаций электромагнитного поля конкретного собственного колебания магнитоактивной плазмы следует считать, что индекс „*i*“ помнит о поляризации колебания.

Уравнение /I.22/ положено в основу теории нелинейного взаимодействия **электромагнитных волн** в безграничной однородной магнитоактивной плазме. Оно имеет точно такой же внешний вид, как и уравнение /I.8/ в работе [2] для изотропной плазмы с той существенной разницей, что входящие в него тензоры $(E_j E_i)_{\omega, \vec{k}}$, $\epsilon_{ij}(\omega, \vec{k})$, $A_{ij}(\omega, \vec{k})$, $S_{ij_2 j_3}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}')$, $V_{ij_2 j_3 j_4}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}')$ имеют другое, более сложное строение, описанное ниже. В пределе слабого внешнего магнитного поля ($\Omega = 0$) эти тензоры и, в частности, тензоры /I.19/ переходят в соответствующие им эквиваленты в изотропной плазме [2], равенства /I.3/, /I.4/, /I.6/ .

Ниже мы сосредоточим внимание на индуцированном рассеянии собственных колебаний плазмы на ее частицах, опуская комбинационное рассеяние – процессы распадного типа, описываемые двумя последними слагаемыми правой части уравнения /I.22/. При этом уравнение /I.22/ упрощается

$$\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} (E_j E_i)_{\omega, \vec{k}} \left\{ \frac{\partial \omega \epsilon''_{ij}(\omega, \vec{k})}{\partial \omega} + \frac{c^2 k^2}{\omega^2} (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}) \right\} =$$

$$= -2 \operatorname{Im} (E_a E_i)_{\omega, \vec{k}} \int d\omega' d\vec{k}' (E_j E_a)_{\omega', \vec{k}'} \left\{ V_{ij_2 j_3}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') - \right.$$

$$\left. - S_{i_2 i_3}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') A_{sc}(\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}') S_{c b a}(\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}', \omega, \vec{k}) \right\} /I.26/$$

Уравнение /I.26/ описывает только индуцированное рассеяние волн на частицах в том случае, если тензор $A_{ij}(\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}')$, входящий во второе слагаемое его правой части и пропорциональный, согласно /I.23/, $\det^{-1} //\mathcal{E}_{ij}(\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}') - \frac{c^2(\vec{k} - \vec{k}')^2}{(\omega - \omega')^2} (\delta_{ij} - \frac{(k_i - k'_i)(k_j - k'_j)}{(\vec{k} - \vec{k}')^2})//$, не содержит сингулярных членов, соответствующих нулям дисперсионного уравнения

$$|\mathcal{E}_{ij}(\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}') - \frac{c^2(\vec{k} - \vec{k}')^2}{(\omega - \omega')^2} (\delta_{ij} - \frac{(k_i - k'_i)(k_j - k'_j)}{(\vec{k} - \vec{k}')^2})| = 0 \quad /I.27/$$

и описывающих распадные процессы.

Рассмотрим подробнее величины, входящие в уравнение /I.26/ и также в общее уравнение нелинейного взаимодействия /I.22/.

Коррелятор $(E_i E_i)_{\omega, \vec{k}}$ имеет тензорную часть, совпадающую с тензором $A_{ij}(\omega, \vec{k})$, определенным равенством /I.23/. Скалярный множитель коррелятора можно получить из определения плотности энергии данного типа колебания в объеме $d\vec{k}$ пространства волновых векторов \vec{k}

$$W(\vec{k}) = (2\pi)^3 \int d\omega \cdot \frac{(E_i E_i)_{\omega, \vec{k}}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} \{ \omega A_{ij}^{-1}(\omega, \vec{k}) \} \quad /I.28/$$

Тензор $V_{iabj}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}', \vec{k}'')$ определен равенством /I.24/, в котором первое слагаемое $\mathcal{E}_{iabj}(\omega, \vec{k}, \omega + \omega', \vec{k} + \vec{k}', \omega', \vec{k}'')$ имеет, согласно общему определению /I.19/, вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{iabj}(\omega, \vec{k}, \omega + \omega', \vec{k} + \vec{k}', \omega', \vec{k}'') &= -i 4\pi e^4 \int d\vec{p} \frac{v_i}{\omega} \int_{-\infty}^0 d\tau_0 \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_{-\infty}^0 d\tau_2 \times \\ &\times \exp \{-i\omega\tau_0 + i\vec{k}' \delta\vec{R}(\tau_0, \vec{v})\} d_{sa}(\omega', \vec{k}', \vec{v}(\tau_0, \vec{v})) \frac{\partial}{\partial p_s(\tau_0, \vec{v})} \cdot /I.29/ \\ &\times \exp \{-i(\omega + \omega')\tau_1 + i(\vec{k} + \vec{k}', \delta\vec{R}(\tau_0 + \tau_1, \vec{v}) - \delta\vec{R}(\tau_0, \vec{v}))\} d_{ij}(\omega, \vec{k}, \vec{v}(\tau_0 + \tau_1, \vec{v})) \frac{\partial}{\partial p_i(\tau_0 + \tau_1, \vec{v})} \\ &\times \exp \{-i\omega'\tau_2 + i(\vec{k}'', \delta\vec{R}(\tau_0 + \tau_1 + \tau_2, \vec{v}) - \delta\vec{R}(\tau_0 + \tau_1, \vec{v}))\} d_{nb}(\omega'', \vec{k}'', \vec{v}(\tau_0 + \tau_1 + \tau_2, \vec{v})) \frac{\partial f_n(\beta(\tau_0 + \tau_1, \vec{v}))}{\partial p_n(\tau_0 + \tau_1 + \tau_2, \vec{v})}, \end{aligned}$$

а второе — $\mathcal{E}_{iabj}(\omega, \vec{k}, \omega + \omega', \vec{k} + \vec{k}', \omega', \vec{k}'')$ получается из /I.29/ перестановкой индексов $j \rightleftharpoons b$ и аргументов $\omega, \vec{k} \rightleftharpoons \omega', \vec{k}'$ в тензорах $d_{ij}(\omega, \vec{k}, \vec{v}(\tau_0 + \tau_1, \vec{v}))$ и $d_{nb}(\omega', \vec{k}', \vec{v}(\tau_0 + \tau_1 + \tau_2, \vec{v}))$ с одновременной заменой $\exp \{-i\omega\tau_0 + i(\vec{k}' \delta\vec{R}(\tau_0, \vec{v}) - \delta\vec{R}(\tau_0, \vec{v}))\}$ на $\exp \{-i\omega\tau_0 + i(\vec{k}' \delta\vec{R}(\tau_0, \vec{v}) - \delta\vec{R}(\tau_0, \vec{v}))\}$. Тензор $S_{ijs}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}'')$ представляет собой сумму двух трехиндексных \mathcal{E} -тензоров, таких, что, например,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ijs}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}'') &= i 4\pi e^3 \int d\vec{p} \frac{v_i}{\omega} \int_{-\infty}^0 d\tau_0 \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \exp \{-i\omega\tau_0 + i\vec{k}' \delta\vec{R}(\tau_0, \vec{v})\} \cdot \\ &\times d_{nj}(\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}'', \vec{v}(\tau_0, \vec{v})) \frac{\partial}{\partial p_n(\tau_0, \vec{v})} \exp \{-i\omega'\tau_1 + i(\vec{k}' \delta\vec{R}(\tau_0 + \tau_1, \vec{v}) - \delta\vec{R}(\tau_0, \vec{v}))\} /I.30/ \\ &\times d_{ms}(\omega', \vec{k}', \vec{v}(\tau_0 + \tau_1, \vec{v})) \frac{\partial f_m(\beta(\tau_0 + \tau_1, \vec{v}))}{\partial p_m(\tau_0 + \tau_1, \vec{v})}, \end{aligned}$$

а $\epsilon_{isj}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}' - \vec{k})$ получается из /I.30/ перестановкой индексов $s \leftrightarrow j$ и аргументов $\omega', \vec{k}' \rightarrow \omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}'$ в тензорах $\alpha_{ij}(\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}', \vec{v}(t_0, \vec{v}))$ и $\alpha_{ms}(\omega, \vec{k}', \vec{v}(t_0 + t, \vec{v}))$ с одновременной заменой $\exp\{-i\omega't, +i(\vec{k}' \cdot \delta\vec{R}(t_0 + t, \vec{v}) - \delta\vec{R}(t_0, \vec{v}))\}$ на $\exp\{-i(\omega - \omega')t, +i(\vec{k}' \cdot \vec{k})\delta\vec{R}(t_0 + t, \vec{v}) - \delta\vec{R}(t_0, \vec{v})\}$.

Уравнение /I.26/ вместе с равенствами /I.23/-/I.25/, /I.28/-/I.30/ и высказанными выше соображениями о строении тензоров V, S и коррелятора $(E_j E_i)_{\omega, \vec{k}}$ флуктуирующих полей полностью описывает индуцированное рассеяние электромагнитных волн в однородной безграничной магнитоактивной, вообще говоря, релятивистской плазме без учета влияния колебаний на функцию распределения основного состояния $f_0(\vec{p})$.

Прежде чем приступить к разбору конкретных явлений индуцированного рассеяния, сделаем одно существенное замечание о спектрах волн, участвующих в рассеянии. Спектры волн с частотами и волновыми векторами ω, \vec{k} и ω', \vec{k}' определяются линейным дисперсионным уравнением /I.27/, если в нем соответственно произвести замену $\omega - \omega' \rightarrow \omega, \vec{k} - \vec{k}' \rightarrow \vec{k}$ и $\omega - \omega' \rightarrow \omega', \vec{k} - \vec{k}' \rightarrow \vec{k}'$. В этом смысле спектры можно называть линейными. С другой стороны, очевидно, что нелинейное взаимодействие волн изменяет их спектры так, что последние начинают зависеть не только от свойств отдельных частиц плазмы/тепловая скорость $U_T = (\frac{eET}{m})^{1/2}$, лентиоровская частота $\omega_L = (\frac{4\pi Ne^2}{m})^{1/2}$, гироколическая частота $\Omega = \frac{eB_0c}{\epsilon(\vec{p})}$, но также и от энергии взаимодействующих волн. В дальнейшем мы всюду предполагаем спектры линейными, т.е. пренебрегаем нелинейными поправками, которые находятся с помощью уравнения, естественно возникающего из /I.18/ аналогично уравнению /I.26/. Так, например, для продольных волн в магнитоактивной плазме нелинейное дисперсионное уравнение можно записать в виде

$$\frac{\kappa_i \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) k_j}{k^2} + \text{Re} \int d\omega' d\vec{k}' (E_j E_i)_{\omega, \vec{k}} \frac{\kappa_i \kappa_a}{k^2} \{ V_{iaj}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') - \\ - S_{isj}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') A_{sc}(\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}') S_{cba}(\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}', \omega, \vec{k}) \} = 0. \quad /I.31/$$

Здесь второе слагаемое, зависящее от коррелятора $(E_j E_i)_{\omega, \vec{k}}$, и представляет собой нелинейную поправку к спектру продольных волн, определяемому в линейной теории равенством

$$\frac{\kappa_i \epsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) k_j}{k^2} = 0 \quad /I.32/$$

§2. Индуцированное рассеяние электромагнитных волн
в холодной магнитоактивной плазме

Изучение конкретных процессов индуцированного рассеяния естественно начать с наиболее простого случая холодной плазмы /тепловые скорости частиц $v_t = 0$ /, когда тензоры V , S , коррелятор $(E_j E_i)_{\omega, \vec{k}}$ и обратный тензор $A_{ij}(\omega, \vec{k})$ имеют сравнительно простой вид.

Интегрируя по импульсу \vec{p} правую часть равенства /I.30/ дважды по частям и полагая в возникающем при этом выражении $v_t = 0$, получим тензор, не зависящий от температуры T плазмы и содержащий лишь интегралы по τ_0 и τ , ,освобождаясь от которых имеем согласно /I.25/

$$\begin{aligned} S_{ij's}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') &= i \frac{e}{m} \frac{\omega^2}{\omega} \left\{ -\Gamma'_{ij}(\omega) \left[\frac{\vec{k}' \vec{h}'}{\omega'^2} h_s + i \frac{[\vec{k}' \vec{h}']_s}{\omega' R} \right] - \right. \\ &- \Gamma'_{is}(\omega) \left[\frac{\vec{k}' \vec{h}'}{\omega''^2} h_j + i \frac{[\vec{k}' \vec{h}']_j}{\omega'' R} \right] - \frac{h_i h_s}{\omega \omega'} K_n \Gamma'_{nj}(\omega) - \frac{h_i h_j}{\omega \omega'} K_n \Gamma'_{ns}(\omega) + \\ &+ \frac{(\vec{k}' \vec{h}')}{{\omega'}} h_s \Gamma'_{ij}(\omega) + \frac{(\vec{k}' \vec{h}')}{{\omega''}} h_j \Gamma'_{is}(\omega) - \frac{K_n''}{{\omega''}} \Gamma'_{in}(\omega) \Gamma'_{js}(\omega') - \frac{K_n'}{{\omega'}} \Gamma'_{in}(\omega) \Gamma'_{sj}(\omega'') + \\ &+ \frac{K_n}{2R} \left[\frac{a_{ns}}{\omega' + R} \Gamma'_{ij}(\omega + R) - \frac{a_{sn}}{\omega' - R} \Gamma'_{ij}(\omega - R) + \frac{a_{nj}}{\omega'' + R} \Gamma'_{is}(\omega + R) - \frac{a_{in}}{\omega'' - R} \Gamma'_{is}(\omega - R) \right] \\ &- \frac{K_n}{2} \left[\frac{a_{is}}{\omega + R} \frac{\Gamma'_{nj}(\omega + R)}{\omega + R} + \frac{a_{si}}{\omega' - R} \frac{\Gamma'_{nj}(\omega - R)}{\omega - R} + \frac{a_{ij}}{\omega'' + R} \frac{\Gamma'_{ns}(\omega + R)}{\omega + R} + \frac{a_{ji}}{\omega'' - R} \frac{\Gamma'_{ns}(\omega - R)}{\omega - R} \right] \\ &\left. + \frac{\omega}{\omega'} \frac{K_n''}{{\omega''}} \Gamma'_{ij}(\omega) \Gamma'_{ns}(\omega') + \frac{\omega}{\omega''} \frac{K_n'}{{\omega'}} \Gamma'_{is}(\omega) \Gamma'_{nj}(\omega'') \right\}. \end{aligned} \quad /2.1/$$

Здесь и далее используются обозначения

$$\omega'' = \omega - \omega', \quad \vec{k}'' = \vec{k} - \vec{k}',$$

/2.2/

$$a_{ij} = \delta_{ij} - h_i h_j + i e_{ikj} h_k, \quad /2.3/$$

где e_{ikj} — совершенно антисимметричный тензор третьего ранга,

$$\Gamma'_{ij}(\omega) = \frac{h_i h_j}{\omega} + \frac{1}{2} \frac{a_{ij}}{\omega + R} + \frac{1}{2} \frac{a_{ji}}{\omega - R}, \quad \Gamma'_{ij}(\omega) = \frac{\partial \Gamma'_{ij}(\omega)}{\partial \omega} /2.4/$$

В пределе холодной изотропной плазмы ($v_t = 0, R = 0$) тензор /2.1/ упрощается

$$S_{ij's}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') = - \frac{i}{\omega \omega' \omega''} \frac{e}{m} \omega^2 \left\{ \frac{K_n}{\omega} \delta_{js} + \frac{K_n''}{\omega''} \delta_{ij} + \frac{K_n'''}{\omega''} \delta_{is} \right\} /2.1a/$$

что совпадает с равенством /2.8/ работы [2].

Тензор $S_{j'si}(\omega'', \vec{k}'', \omega, \vec{k})$ получается перестановкой индексов $i \rightarrow j$, $j \rightarrow s$, $s \rightarrow i$ и аргументов $\omega \rightarrow \omega''$; $\vec{k} \rightarrow \vec{k}''$, $\omega' \rightarrow \omega$, $\vec{k}' \rightarrow \vec{k}'$ тензора $S_{ij's}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}')$ и удовлетворяет равенству

$$S_{j'si}(\omega'', \vec{k}'', \omega, \vec{k}) = S_{ij's}^*(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}'), \quad /2.5/$$

в справедливости которого легко убедиться, используя симметризованную запись тензора /2.1/:

$$\begin{aligned}
 S_{ij\bar{s}}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') = & -i \frac{e}{m} \omega^e \left\{ \frac{h_i h_j h_{\bar{s}}}{\omega \omega' \omega''} \left[\frac{\vec{K}' \vec{h}}{\omega} + \frac{\vec{K}' \vec{h}}{\omega'} + \frac{\vec{K}'' \vec{h}}{\omega''} \right] + \right. \\
 & + \frac{1}{4\omega} \left(\frac{a_{in}}{\omega+\Omega} + \frac{a_{ni}}{\omega-\Omega} \right) \left[\frac{K_n'}{\omega'} \left(\frac{a_{is}}{\omega'+\Omega} + \frac{a_{si}}{\omega'-\Omega} \right) + \frac{K_n''}{\omega''} \left(\frac{a_{is}}{\omega+\Omega} + \frac{a_{si}}{\omega-\Omega} \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{4\omega''} \left(\frac{a_{nj}}{\omega''+\Omega} + \frac{a_{jn}}{\omega''-\Omega} \right) \left[\frac{K_n}{\omega} \left(\frac{a_{is}}{\omega'+\Omega} + \frac{a_{si}}{\omega'-\Omega} \right) - \frac{K_n'}{\omega'} \left(\frac{a_{is}}{\omega+\Omega} + \frac{a_{si}}{\omega-\Omega} \right) \right] + \quad /2.1a/ \\
 & + \frac{1}{4\omega'} \left(\frac{a_{ns}}{\omega'+\Omega} + \frac{a_{sn}}{\omega'-\Omega} \right) \left[\frac{K_n}{\omega} \left(\frac{a_{ij}}{\omega''+\Omega} + \frac{a_{ji}}{\omega''-\Omega} \right) - \frac{K_n''}{\omega''} \left(\frac{a_{ij}}{\omega+\Omega} + \frac{a_{ji}}{\omega-\Omega} \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{h_i}{\omega^e} \left[\frac{\vec{K}' \vec{h}}{\omega'} \left(\frac{a_{sj}}{\omega''+\Omega} + \frac{a_{js}}{\omega''-\Omega} \right) + \frac{\vec{K}'' \vec{h}}{\omega''} \left(\frac{a_{js}}{\omega'+\Omega} + \frac{a_{sj}}{\omega'-\Omega} \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{h_{\bar{s}}}{\omega''} \left[\frac{\vec{K}' \vec{h}}{\omega} \left(\frac{a_{is}}{\omega'+\Omega} + \frac{a_{si}}{\omega'-\Omega} \right) - \frac{\vec{K}'' \vec{h}}{\omega'} \left(\frac{a_{is}}{\omega+\Omega} + \frac{a_{si}}{\omega-\Omega} \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{h_s}{\omega''} \left[\frac{\vec{K}' \vec{h}}{\omega} \left(\frac{a_{ij}}{\omega''+\Omega} + \frac{a_{ji}}{\omega''-\Omega} \right) - \frac{\vec{K}'' \vec{h}}{\omega''} \left(\frac{a_{ij}}{\omega+\Omega} + \frac{a_{ji}}{\omega-\Omega} \right) \right] + \\
 & \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{\omega \omega' \omega''} \left[K_n \left(\frac{a_{in}}{\omega+\Omega} + \frac{a_{ni}}{\omega-\Omega} \right) h_s h_{\bar{s}} + K_n' \left(\frac{a_{ns}}{\omega'+\Omega} + \frac{a_{sn}}{\omega'-\Omega} \right) h_i h_{\bar{s}} + K_n'' \left(\frac{a_{nj}}{\omega''+\Omega} + \frac{a_{jn}}{\omega''-\Omega} \right) h_i h_j \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Совершенно аналогично тензору $S_{ij\bar{s}}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}')$ из /I.24/, /I.29/ находим выражение для четырехиндексного тензора V

$$\begin{aligned}
 V_{iaj\bar{s}}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') = & -\frac{e^e}{m^e} \frac{\omega^e}{\omega} \left\{ \left[\frac{K_n}{\omega} \Gamma_{j\bar{s}}(\omega) + \frac{K_n'}{\omega'} \Gamma_{j\bar{s}}(\omega) - \right. \right. \\
 & - \left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega'} \right) \left(K_z \Gamma_{z\bar{s}}(\omega) \delta_{nj} + K'_z \Gamma_{z\bar{s}}(\omega) \delta_{n\bar{s}} \right) - (\vec{K} + \vec{K}', \vec{h}) \left(\frac{h_s}{\omega'} \delta_{nj} + \frac{h_{\bar{s}}}{\omega} \delta_{n\bar{s}} \right) \frac{\partial}{\partial \omega} \\
 & - (\vec{K}' \vec{h}) \left(\frac{h_s}{\omega'} \delta_{nj} + \frac{h_{\bar{s}}}{\omega} \delta_{n\bar{s}} \right) \frac{\partial}{\partial \omega} + (\vec{K} + \vec{K}', \vec{h}') \left(\frac{h_s}{\omega'^2} \delta_{nj} + \frac{h_{\bar{s}}}{\omega'^2} \delta_{n\bar{s}} \right) + \\
 & + \frac{i}{\Omega} \left(\frac{[\vec{K} + \vec{K}', \vec{h}]}{\omega'} \delta_{nj} + \frac{[\vec{K} + \vec{K}', \vec{h}]}{\omega} \delta_{n\bar{s}} \right) \left. \right] P_{ian}(\omega, \omega+\omega') - \\
 & - \frac{1}{2\Omega} \left[\frac{a_{z\bar{s}}}{\omega'+\Omega} \delta_{nj} + \frac{a_{zj}}{\omega'-\Omega} \delta_{n\bar{s}} \right] \left[K_z' P_{ian}(\omega, \omega+\omega'+\Omega) + K_z P_{ian}(\omega+\Omega, \omega+\omega'+\Omega) \right] + \\
 & + \frac{1}{2\Omega} \left[\frac{a_{z\bar{s}}}{\omega'-\Omega} \delta_{nj} + \frac{a_{zj}}{\omega'+\Omega} \delta_{n\bar{s}} \right] \left[K_z' P_{ian}(\omega, \omega+\omega'-\Omega) + K_z P_{ian}(\omega-\Omega, \omega+\omega'-\Omega) \right] - \quad /2.6/ \\
 & - \frac{K_z' \delta_{za} - K_z \delta_{sa}}{\omega'} \left[\left(\frac{h_i h_{\bar{s}}}{\omega'} \Gamma_{j\bar{s}}(\omega+\omega') + \frac{h_i h_{\bar{s}}}{\omega} \Gamma_{z\bar{s}}(\omega+\omega') \right) \frac{K_m \Gamma_{ms}(\omega)}{\omega} + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \frac{K_m \Gamma_{ms}(\omega+\Omega)}{\omega+\Omega} \left(a_{z\bar{s}} \frac{\Gamma_{z\bar{s}}(\omega+\omega'+\Omega)}{\omega'+\Omega} + \frac{a_{zj}}{\omega+\Omega} \Gamma_{z\bar{s}}(\omega+\omega'+\Omega) \right) + \\
 & \left. + \frac{1}{2} \frac{K_m \Gamma_{ms}(\omega-\Omega)}{\omega-\Omega} \left(a_{z\bar{s}} \frac{\Gamma_{z\bar{s}}(\omega+\omega'-\Omega)}{\omega'-\Omega} + \frac{a_{zj}}{\omega-\Omega} \Gamma_{z\bar{s}}(\omega+\omega'-\Omega) \right) \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{h_i h_s}{\omega'} Q_{ijs}(\omega, \omega + \omega') + \frac{h_i h_j}{\omega} Q_{isj}(\omega, \omega + \omega') + \\
 & + \frac{a_{ij}}{2(\omega + R)} Q_{ijs}(\omega, \omega + \omega' + R) + \frac{a_{sj}}{2(\omega + R)} Q_{isj}(\omega, \omega + \omega' + R) + \\
 & + \left[\frac{a_{si}}{2(\omega - R)} Q_{ijs}(\omega, \omega + \omega' - R) + \frac{a_{ji}}{2(\omega - R)} Q_{isj}(\omega, \omega + \omega' - R) \right] - \\
 & - \frac{h_i h_s}{\omega'} R_{aj}(\omega, \omega + \omega') - \frac{h_i h_j}{\omega} R_{as}(\omega, \omega + \omega') - \\
 & - \frac{a_{je}}{2(\omega + R)} R_{aj}(\omega + R, \omega + \omega' + R) - \frac{a_{ij}}{2(\omega + R)} R_{as}(\omega + R, \omega + \omega' + R) - \\
 & - \frac{a_{bi}}{2(\omega - R)} R_{aj}(\omega - R, \omega + \omega' - R) - \frac{a_{ji}}{2(\omega - R)} R_{as}(\omega - R, \omega + \omega' - R) \} ; \\
 P_{ian}(\omega, \omega + \omega') & \equiv - \frac{K_s'}{\omega} \Gamma_{is}(\omega) \Gamma_{an}(\omega + \omega') + \frac{K_s'}{\omega'} \Gamma_{sn}(\omega + \omega') \Gamma_{ia}(\omega) - \\
 & - \frac{K_m}{\omega + \omega'} \Gamma_{ma}(\omega) h_i h_n - \frac{a_{in}}{2(\omega + \omega' + R)} \frac{K_m}{\omega + R} \Gamma_{ma}(\omega + R) - \\
 & - \frac{a_{ni}}{2(\omega + \omega' - R)} \frac{K_m}{\omega - R} \Gamma_{ma}(\omega - R) - \frac{K_s'}{\omega + \omega'} \Gamma_{sn}(\omega + \omega') \Gamma_{ia}(\omega) + 12.71 \\
 & + \frac{\vec{K} \vec{h}}{\omega + \omega'} h_n \Gamma_{ia}'(\omega) - \frac{\vec{K} \vec{h}}{(\omega + \omega')^2} h_n \Gamma_{ia}(\omega) - \\
 & - \frac{i}{R} \frac{[\vec{K} \vec{h}]_n}{\omega + \omega'} \Gamma_{ia}(\omega) + \frac{K_m a_{mn}}{2R(\omega + \omega' + R)} \Gamma_{ia}(\omega + R) - \frac{K_m a_{nm}}{2R(\omega + \omega' - R)} \Gamma_{ia}(\omega - R) ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{ijs}(\omega, \omega + \omega') & \equiv \frac{K_m}{\omega} \Gamma_{ms}(\omega) \frac{h_i h_j}{\omega + \omega'} + \frac{K_m}{\omega + R} \Gamma_{ms}(\omega + R) \frac{a_{ij}}{2(\omega + \omega' + R)} + \\
 & + \frac{K_m}{\omega - R} \Gamma_{ms}(\omega - R) \frac{a_{ji}}{2(\omega + \omega' - R)} + \frac{K_m'}{\omega + \omega'} \Gamma_{mj}(\omega + \omega') \Gamma_{is}(\omega) - 12.81 \\
 & - \frac{\vec{K} \vec{h}}{\omega + \omega'} h_j \Gamma_{is}'(\omega) + \frac{\vec{K} \vec{h}}{(\omega + \omega')^2} h_j \Gamma_{is}(\omega) + i \frac{[\vec{K} \vec{h}]_j}{2(\omega + \omega')} \Gamma_{is}(\omega) - \\
 & - K_m \frac{a_{mj}}{2R(\omega + \omega' + R)} \Gamma_{is}(\omega + R) + K_m \frac{a_{jm}}{2R(\omega + \omega' - R)} \Gamma_{is}(\omega - R) .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{aj}(\omega, \omega + \omega') & \equiv \frac{K_m}{\omega} \Gamma_{ma}(\omega) \frac{K_s'}{\omega + \omega'} \Gamma_{sj}(\omega + \omega') - \frac{\vec{K} \vec{h}}{\omega + \omega'} h_j \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{K_m}{\omega} \Gamma_{ma}(\omega) \right] + \\
 & + \frac{\vec{K} \vec{h}}{(\omega + \omega')^2} h_j \frac{K_m}{\omega} \Gamma_{ma}(\omega) + \frac{i}{R} \frac{[\vec{K} \vec{h}]_j}{\omega + \omega'} \frac{K_m}{\omega} \Gamma_{ma}(\omega) - 12.91 \\
 & - \frac{K_s' a_{sj}}{2R(\omega + \omega' + R)} \frac{K_m}{\omega + R} \Gamma_{ma}(\omega + R) + \frac{K_s' a_{js}}{2R(\omega + \omega' - R)} \frac{K_m}{\omega - R} \Gamma_{ma}(\omega - R) .
 \end{aligned}$$

Напомним, что в правых частях равенств /2.I/ и /2.6/, как и было оговорено выше, подразумевается суммирование по сортам частиц плазмы.

Тензор $A_{ij}(\omega, \vec{k})$ в соответствии с определением /I.23/ в рассматриваемом сейчас случае холодной плазмы имеет вид /ср. [6]/, равенство /4/ /

$$\begin{aligned} A_{ij}(\omega, \vec{k}) = & [\det A_{ij}^{-1}(\omega, \vec{k})]^{-1} \left\{ (\epsilon_1 - n^2) \epsilon_2 \delta_{ij} - n^2 (\epsilon_1 - n^2) \frac{K_i K_j}{k^2} + \right. \\ & + i g \epsilon_2 e_{ijk} h_k + [(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\epsilon_1 - n^2) - g^2] h_i h_j - \\ & - i g n^2 \frac{1}{k^2} (K_i [\vec{K} \vec{h}]_j - K_j [\vec{K} \vec{h}]_i) + (\epsilon_2 - \epsilon_1) \frac{1}{k^2} [\vec{K} \vec{h}]_i [\vec{K} \vec{h}]_j \} \equiv \\ & \equiv [\det A_{ij}^{-1}(\omega, \vec{k})]^{-1} e_{ij}(\omega, \vec{k}, n^2); \end{aligned} \quad /2.I0/$$

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega^2}{\omega^2 - n^2}, \quad \epsilon_2 = 1 - \frac{\omega^2}{\omega^2}, \quad g = -\frac{\Omega}{\omega} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad n^2 = \frac{C^2 k^2}{\omega^2}$$

/2.II/

Равенство /2.I0/ легко получить, используя широко известное /см., например, [1], стр. 140, равенство /20.4/ / выражение для тензора диэлектрической проницаемости $\epsilon_{ij}(\omega, 0)$ холодной магнитоактивной плазмы, следующее из /I.20/.

Как уже было замечено в первом параграфе, тензорная часть коррелятора $(E_j E_i)_{\omega, \vec{k}}$ совпадает с тензорной частью $A_{ij}(\omega, \vec{k})$, т.е. с тензором $e_{ji}(\omega, \vec{k}, n^2)$, стоящим в фигурной скобке правой части равенства /2.I0/. Скалярный множитель $(E_j E_i)_{\omega, \vec{k}}$ находится из /I.28/, так что

$$(E_j E_i)_{\omega, \vec{k}} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{s=1}^2 \frac{W_s(\vec{k})}{D(n_s^2)} e_{ji}(\omega, \vec{k}, n_s^2), \quad /2.I2/$$

где $W_s(\vec{k})$ — плотность энергии в объеме $d\vec{k}$ пространства волновых векторов \vec{k} необыкновенной ($s=1$) и обыкновенной ($s=2$) волн с квадратом показателя преломления /см. [1], стр. 141/, равенство /20.9/ /

$$\begin{aligned} n_{s=1,2}^2 = & \frac{1}{2} \left(\epsilon_1 \frac{[\vec{K} \vec{h}]^2}{k^2} + \epsilon_2 \frac{(\vec{K} \vec{h})^2}{k^2} \right)^{-1} \left\{ (\epsilon_1^2 - g^2 - \epsilon_1 \epsilon_2) \frac{[\vec{K} \vec{h}]^2}{k^2} + \right. \\ & + 2 \epsilon_1 \epsilon_2 \pm \left[(\epsilon_1^2 - g^2 - \epsilon_1 \epsilon_2) \frac{[\vec{K} \vec{h}]^4}{k^4} + 4 \epsilon_1^2 g^2 \frac{(\vec{K} \vec{h})^2}{k^2} \right]^{\frac{1}{2}} \} \end{aligned} \quad /2.I3/$$

а знаменатель $D(n_s^2)$ определяется равенством

$$\begin{aligned}
 D(n_s^2) = & \frac{\partial \omega \epsilon_2}{\partial \omega} \left\{ (\epsilon_2 - n_s^2 \frac{[\vec{k} \vec{h}]}{k^2})^2 (\epsilon_2 - n_s^2) - \right. \\
 & - [g^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_1 - n_s^2)] \left\} + \frac{\partial \omega \epsilon_1}{\partial \omega} \left\{ (\epsilon_2 - n_s^2 \frac{[\vec{k} \vec{h}]}{k^2})^2 (\epsilon_1 - n_s^2) + \right. \\
 & + \epsilon_2 (\epsilon_1 - n_s^2) + (\epsilon_2 - \epsilon_1) n_s^2 \frac{[\vec{k} \vec{h}]}{k^2} \left\} + \\
 & + n_s^2 \left\{ 2\epsilon_2 (\epsilon_1 - n_s^2) + (\epsilon_2 - \epsilon_1) n_s^2 \frac{[\vec{k} \vec{h}]}{k^2} - [g^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_1 - n_s^2) \frac{[\vec{k} \vec{h}]}{k^2}] \right\} + \\
 & \left. + 2g \frac{\partial \omega g}{\partial \omega} (\epsilon_2 - n_s^2 \frac{[\vec{k} \vec{h}]}{k^2}) \right\} .
 \end{aligned} \quad /2.14/$$

Уравнение /I.26/ и равенства /2.1/-/2.14/ этого параграфа полностью описывают индуцированное рассеяние электромагнитных волн произвольной поляризации в холодной однородной безграничной магнитоактивной плазме.

§3. Индуцированное рассеяние продольных волн в горячей магнитоактивной плазме

В этом параграфе мы изучим процессы рассеяния продольных волн /т.е. волн, у которых вектор электрического поля $\vec{E}(\omega, \vec{k})$ направлен вдоль волнового вектора \vec{k} , а спектр определен уравнением /I.32/ на частицах магнитоактивной плазмы через продольную волну. Слова "рассеяние через продольную волну" следует понимать в том смысле, что тензор $A_{sc}(\omega'', \vec{k}'')$, входящий во второе слагаемое правой части уравнения /I.26/, является продольным по вектору \vec{k}'' :

$$A_{sc}(\omega'', \vec{k}'') = \left[\frac{\kappa_i'' \epsilon_{ij}(\omega'', \vec{k}'') k_j''}{(k'')^2} \right]^{-1} \frac{\kappa_s'' \kappa_c''}{(k'')^2} \quad /3.1/$$

и продольная свертка тензора $\epsilon_{ij}(\omega'', \vec{k}'')$ отлична от нуля. В изотропной плазме нелинейное рассеяние на частицах продольных волн через продольные, названное в работе ^[7] "кулоновским", изучалось многими авторами /см., например, ^[2] и приведенную там библиографию/. Такие процессы описываются уравнением /I.26/, так что входящие в его правую часть свертки существенно упрощаются. Именно, достаточно знать

$$V_{iab}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') \frac{\kappa_i \kappa_a \kappa_j \kappa'_b}{(kk')^2} \equiv V; \quad /3.2/$$

$$S_{ij}s(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') \frac{\kappa_i \kappa_j'' \kappa'_s}{kk'k''} \equiv S \quad \text{и} \quad S_{sii}(\omega'', \vec{k}'', \omega, \vec{k}) \frac{\kappa_i'' \kappa_s' \kappa_i}{kk'k''} \equiv S_{ij3.3/}$$

При вычислении /3.2/ и /3.3/ ограничимся случаем нерелятивистской плазмы с изотропным максвелловским распределением частиц в основном состоянии

$$f_0(\vec{p}) = \frac{N}{(2\pi)^{3/2} v_r^3} e^{-\frac{\vec{v}^2/2}{v_r^2}} \quad /3.4/$$

Заметим, однако, что обобщение полученных ниже результатов на случай анизотропного распределения частиц /различная температура T частиц вдоль $T_{||}$ и поперек T_{\perp} внешнего магнитного поля/ тривиально: для этого в правых частях равенств /3.5/ и /3.10/ в интегралах по продольным скоростям частиц v_z следует заменить $v_r = (\frac{2eT}{m})^{1/2}$ на $v_{r||} = (\frac{2eT_{||}}{m})^{1/2}$, а в интегралах по поперечным скоростям v_t заменить $v_r = (\frac{2eT}{m})^{1/2}$ на $v_{t\perp} = (\frac{2eT_{\perp}}{m})^{1/2}$. С другой стороны, известно /см. [8]/, что в такой плазме возникает неустойчивость, и поэтому подобное обобщение имеет смысл лишь, если время развития неустойчивости многое более времени нелинейного взаимодействия.

Используя вместо /3.4/ релятивистскую функцию распределения /см. [1], стр. 95, определение /13.1/ /, легко учесть близость скоростей частиц высокотемпературной плазмы к скорости света. Свернем обе части равенства /1.29/ с продольным тензором $\frac{k_i k'_j k_l k'_m}{(kk')^2}$ и проинтегрируем правую часть по \vec{p} трижды по частям. Затем, освободившись от интегралов по τ_0, τ_1, τ_2 , с учетом определения /1.24/ получим после разложения экспонент типа /1.16/ в ряд по функциям Бесселя

$$\begin{aligned} & V_{iabs}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') \frac{k_i k'_j k_l k'_m}{(kk')^2} = \frac{e^2}{m^2} \frac{\omega_e^2}{(kk')^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_r}{\sqrt{2\pi} v_r} e^{-\frac{v_r^2/2}{v_r^2}} \times \\ & \times \int_0^{\infty} \frac{v_r dv_r}{v_r^2} e^{-\frac{v_r^2/2}{v_r^2}} \sum_{\ell, n, \lambda=-\infty}^{\infty} \exp \{ i(\rho - \lambda)(\theta - \theta') \} \times \\ & \times J_\ell \left(\frac{k_e v_r}{R} \right) J_\lambda \left(\frac{k_e' v_r}{R} \right) J_n \left(\frac{k_e' v_r}{R} \right) J_{\ell+n+\lambda} \left(\frac{k_e' v_r}{R} \right) \times \\ & \times \left\{ \left[\frac{K_e K_e'}{\omega_e} \frac{\partial}{\partial \omega_0} + \frac{K_e'(K_e + K_e')}{\omega_e} \frac{\partial}{\partial \omega_e} - \frac{K_e'(K_e + K_e')}{\omega_e^2} - i \frac{\vec{K}'[\vec{R}\vec{h}]}{2R\omega_e} \right] /3.5/ \right. \\ & + \frac{K_i P_{is}(\omega_i) K'_s}{\omega_i} T(\omega_0, \omega_s) + \frac{[\vec{R}\vec{h}]^2}{2R(\omega_0 + R)} T(\omega_0, \omega_s + R) - \frac{[\vec{K}'\vec{h}]^2}{2R(\omega_s - R)} T(\omega_0, \omega_s - R) + \\ & + \frac{K_i a_{is} K'_s}{2R(\omega_i + R)} T(\omega_0 + R, \omega_s + R) - \frac{K'_s a_{si} K_i}{2R(\omega_i - R)} T(\omega_0 - R, \omega_s - R) + \\ & \left. + \left[\frac{K_e^2}{\omega_e} \frac{\partial}{\partial \omega_0} + \frac{K_e(K_e + K_e')}{\omega_e} \frac{\partial}{\partial \omega_e} - \frac{K_e(K_e + K_e')}{\omega_e^2} + i \frac{\vec{K}'[\vec{R}\vec{h}]}{2R\omega_e} \right] \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{K_s' \Gamma_{si}(\bar{\omega}) K_i}{\bar{\omega}} G(\omega_0, \omega_2) + \frac{K_s' \alpha_{si} K_i}{2\Omega(\bar{\omega} + \Omega)} G(\omega_0, \omega_2 + \Omega) - \frac{K_i \alpha_{is} K_s}{2\Omega(\bar{\omega} - \Omega)} G(\omega_0, \omega_2 - \Omega) \\ + \frac{[\vec{K} \vec{h}]^2}{2\Omega(\bar{\omega} + \Omega)} G(\omega_0 + \Omega, \omega_2 + \Omega) - \frac{[\vec{K} \vec{h}]^2}{2\Omega(\bar{\omega} - \Omega)} G(\omega_0 - \Omega, \omega_2 - \Omega) \},$$

где $K_z = (\vec{K} \vec{h})$, $K_z' = (\vec{K}' \vec{h})$ и $v_z = (\vec{v} \vec{h})$ — проекции векторов \vec{K} , \vec{K}' и \vec{v} соответственно на ось z , направленную вдоль единичного вектора \vec{h} внешнего постоянного однородного магнитного поля \vec{B}_0 ; K_i , K_i' и v_i — проекции векторов \vec{K} , \vec{K}' и \vec{v} на плоскость xy , перпендикулярную \vec{h} ; θ , θ' — углы компонент \vec{K}_i , \vec{K}'_i векторов \vec{K} , \vec{K}' в плоскости xy с осью x ; $J_n(z)$ — функция Бесселя порядка n , аргумента z . Знаменатели ω_0 , $\bar{\omega}$, ω_1 , ω_2 имеют бесконечно малые положительные мнимые добавки, соответствующие адиабатическому включению поля в бесконечно удаленном прошлом /см. II, стр. 78/, и определяются равенствами

$$\omega_0 \equiv \omega - K_z v_z - \lambda \Omega + i 0,$$

$$\omega_1 \equiv \omega' - K_z' v_z - \eta \Omega + i 0,$$

$$\bar{\omega} \equiv \omega - K_z v_z - \ell \Omega + i 0,$$

$$\omega_2 \equiv \omega + \omega' - (K_z + K_z') v_z - (\ell + \eta) \Omega + i 0.$$

13.6/

Входящие в правую часть 13.5/ величины T и G имеют вид

$$T(\omega_0, \omega_2) = \frac{K_i \Gamma_{is}(\omega_0) K_s'}{\omega_0} \frac{K_c' \Gamma_{ca}(\omega_2) K_a}{\omega_2} - \frac{K_z^2}{\omega_2} \frac{\partial}{\partial \omega_0} \left[\frac{K_i \Gamma_{is}(\omega_0) K_s'}{\omega_0} \right] + \frac{K_z^2}{\omega_2^2} \frac{K_i \Gamma_{is}(\omega_0) K_s'}{\omega_0} - \frac{[\vec{K} \vec{h}]^2}{2\Omega(\omega_2 + \Omega)} \frac{K_i \Gamma_{is}(\omega_0 + \Omega) K_s'}{\omega_0 + \Omega} + \frac{[\vec{K} \vec{h}]^2}{2\Omega(\omega_2 - \Omega)} \frac{K_i \Gamma_{is}(\omega_0 - \Omega) K_s'}{\omega_0 - \Omega}, \quad 13.7/$$

$$G(\omega_0, \omega_2) = \frac{K_i \Gamma_{is}(\omega_0) K_s'}{\omega_0} \frac{K_c' \Gamma_{ca}(\omega_2) K_a}{\omega_2} - \frac{K_z K_z' \partial}{\omega_2} \left[\frac{K_i \Gamma_{is}(\omega_0) K_s'}{\omega_0} \right] + \frac{K_z K_z'}{\omega_2^2} \frac{K_i \Gamma_{is}(\omega_0) K_s'}{\omega_0} + \frac{i}{\Omega} \frac{\vec{K}' [\vec{K} \vec{h}]}{\omega_2} \frac{K_i \Gamma_{is}(\omega_0) K_s'}{\omega_0} - \frac{K_i \alpha_{is} K_s'}{2\Omega(\omega_2 + \Omega)} \frac{K_i \Gamma_{is}(\omega_0 + \Omega) K_s'}{\omega_0 + \Omega} + \frac{K_s' \alpha_{si} K_i}{2\Omega(\omega_2 - \Omega)} \frac{K_i \Gamma_{is}(\omega_0 - \Omega) K_s'}{\omega_0 - \Omega}. \quad 13.8/$$

В пределе холдной ($v_r = 0$) магнитоактивной плазмы свертка 13.5/ несколько упрощается

$$\begin{aligned}
 & V_{ijj'k}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') \frac{K_i Q_a' K_j K_b'}{(KK')^2} \Big|_{\omega=0} = \\
 & = \frac{e^2}{m^2} \frac{\omega_e^2}{(KK')^2} \left\{ \left[\frac{K_e K_e'}{\omega'} \frac{\partial}{\partial \omega} + \frac{K_e'(K_e + K_e')}{\omega'} \frac{\partial}{\partial(\omega+\omega')} - \frac{K_e'(K_e + K_e')}{\omega'^2} \right] - \right. \\
 & - \frac{i}{\Omega} \frac{\vec{K}'[\vec{K}\vec{h}]}{\omega'} + \frac{K_i P_{is}(\omega') K_s'}{\omega'} \Big] T(\omega, \omega+\omega') + \\
 & + \frac{[\vec{K}\vec{h}]^2}{2\Omega(\omega+\Omega)} T(\omega, \omega+\omega+\Omega) - \frac{[\vec{K}\vec{h}]^2}{2\Omega(\omega'-\Omega)} T(\omega, \omega+\omega'-\Omega) + \\
 & + \frac{K_i Q_{is} K_s'}{2\Omega(\omega+\Omega)} T(\omega+\Omega, \omega+\omega'+\Omega) - \frac{K_s' Q_{is} K_i}{2\Omega(\omega'-\Omega)} T(\omega-\Omega, \omega+\omega'-\Omega) + \\
 & + \frac{K_s' Q_{is} K_i}{2\Omega(\omega+\Omega)} G(\omega, \omega+\omega'+\Omega) - \frac{K_s' Q_{is} K_i}{2\Omega(\omega-\Omega)} G(\omega, \omega+\omega'-\Omega) + \frac{[\vec{K}\vec{h}]^2}{2\Omega(\omega+\Omega)} G(\omega+\Omega, \omega+\omega') - \\
 & - \frac{[\vec{K}\vec{h}]^2}{2\Omega(\omega-\Omega)} G(\omega-\Omega, \omega+\omega'-\Omega) + \left[\frac{K_e^2}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} + \frac{K_e(K_e + K_e')}{\omega} \frac{\partial}{\partial(\omega+\omega')} - \right. \\
 & \left. - \frac{K_e(K_e + K_e')}{\omega^2} + \frac{i}{\Omega} \frac{\vec{K}'[\vec{K}\vec{h}]}{\omega} + \frac{K_s' P_{si}(\omega) K_i}{\omega} \right] G(\omega, \omega+\omega') \Big\},
 \end{aligned}$$

так, что величины $T(\omega, \omega+\omega')$ и $G(\omega, \omega+\omega')$ определены правыми частями равенств /3.7/ и /3.8/, если в них формально заменить $\omega_0 \rightarrow \omega$, $\omega_2 \rightarrow \omega+\omega'$. Заметим, что равенство /3.9/ получается также непосредственной сверткой тензора /2.7/ с продольным тензором $\frac{K_i K_a' K_j K_b'}{KK'K''}$. Из правой части /I.30/ совершенно аналогично /3.5/ получим с учетом /I.25/ для продольной свертки трехиндексного тензора S

$$\begin{aligned}
 S_{ijjs}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') \frac{K_i K_j'' K_s'}{KK'K''} &= i \frac{e}{m} \frac{\omega_e^2}{KK'K''} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dU_e}{\sqrt{2\pi} U_e} e^{-U_e^2/2U_e^2} \times \\
 &\times \int_0^{\infty} \frac{U_e dU_e}{U_e^2} e^{-U_e^2/2U_e^2} \sum_{n, l=0, \infty}^{\infty} J_n\left(\frac{K_e U_e}{\Omega}\right) J_l\left(\frac{K_e'' U_e}{\Omega}\right) J_{ern}\left(\frac{K_e U_e}{\Omega}\right) \times \\
 &\times \exp\{il(\theta''-\theta) + in(\theta'-\theta)\} \left\{ - \frac{K_i P_{ij}(\omega_0) K_j''}{\omega_0} \left[\frac{K_e K_e''}{\omega_0 \omega_1} + \right. \right. \quad /3.10/ \\
 &+ \frac{K_e K_e'}{\omega_0^2} - \frac{K_n'' P_{ns}(\omega_1) K_s'}{\omega_1} \Big] - \frac{K_i P_{is}(\omega_0) K_s'}{\omega_0} \left[\frac{K_e K_e''}{\omega_0 \omega_2} + \frac{K_e K_e''}{\omega_0^2} - \right. \\
 &- \frac{K_n' P_{nj}(\omega_2) K_j''}{\omega_2} \Big] + \frac{K_e K_e'}{\omega_0 \omega_1} K_i P_{ij}'(\omega_0) K_j'' + \frac{K_e K_e'}{\omega_0 \omega_2} K_i P_{is}'(\omega_0) K_s' + \\
 &+ \frac{i}{\Omega} \frac{\vec{K}'[\vec{K}\vec{h}]}{\omega_0} \left[\frac{K_i P_{is}(\omega_0) K_s'}{\omega_2} - \frac{K_i P_{ij}(\omega_0) K_j''}{\omega_1} \right] +
 \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2\Omega(\omega_0+\Omega)} \left[\frac{K_i a_{is} K'_s}{\omega_1 + \Omega} K_n \Gamma'_{nj} (\omega_0 + \Omega) K_j'' + \frac{K_i a_{ij} K_j''}{\omega_2 + \Omega} K_n \Gamma_{ns} (\omega_0 + \Omega) K_s' \right] - \\ - \frac{1}{2\Omega(\omega_0-\Omega)} \left[\frac{K_i a_{si} K'_s}{\omega_1 - \Omega} K_n \Gamma'_{nj} (\omega_0 - \Omega) K_j'' + \frac{K_i a_{ji} K_j''}{\omega_2 - \Omega} K_n \Gamma_{ns} (\omega_0 - \Omega) K_s' \right].$$

Здесь в отличие от /3.6/

$$\omega_0 \equiv \omega - K_z v_z - (\ell + n) \Omega + i0,$$

$$\omega_1 \equiv \omega' - K'_z v_z - n \Omega + i0, \quad /3.11/$$

$$\omega_2 \equiv \omega'' - K''_z v_z - \ell \Omega + i0,$$

θ'' - угол компоненты \vec{k}_z'' вектора $\vec{k}'' = \vec{k} - \vec{k}'$ в плоскости xy с осью x , K_z'' - проекция вектора \vec{k}'' на эту плоскость, $K_z'' = \vec{k}'' \cdot \vec{k}'$. Остальные обозначения те же, что в формуле /3.5/ для продольной свертки четырехиндексного тензора V .

В пределе холодной плазмы ($v_T = 0$) свертка /3.10/ упрощается

$$S_{jisi}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') \frac{K_i K_j'' K_s'}{KK'K''} \Big|_{v_z=0} = i \frac{e}{m} \frac{\omega^2}{KK''} \left\{ - \frac{K_i \Gamma'_{ij}(\omega) K_j''}{\omega} \left[\frac{K_e K'_e}{\omega \omega'} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{K_z K'_z}{\omega'^2} - \frac{K_n'' \Gamma_{ns}(\omega) K_s'}{\omega'} \right] - \frac{K_i \Gamma_{is}(\omega) K_s'}{\omega} \left[\frac{K_e K_e''}{\omega \omega''} + \frac{K_e K_e''}{\omega''^2} - \frac{K_n' \Gamma'_{nj}(\omega') K_j''}{\omega''} \right] + \right. \\ \left. + \frac{K_z K'_z}{\omega \omega'} K_i \Gamma'_{ij}(\omega) K_j'' + \frac{K_e K_e''}{\omega \omega''} K_i \Gamma_{is}(\omega) K_s' + \frac{i}{\Omega} \frac{\vec{k} \cdot [\vec{k} \vec{k}']}{\omega} \left[\frac{K_i \Gamma_{is}(\omega) K_s'}{\omega''} \right] \right. \quad /3.12/ \\ \left. - \frac{K_i \Gamma'_{ij}(\omega) K_j''}{\omega'} \right] + \frac{1}{2\Omega(\omega + \Omega)} \left[\frac{K_i a_{is} K'_s}{\omega' + \Omega} K_n \Gamma'_{nj} (\omega + \Omega) K_j'' + \frac{K_i a_{ij} K_j''}{\omega'' + \Omega} K_n \Gamma_{ns} (\omega + \Omega) K_s' \right] - \\ - \frac{1}{2\Omega(\omega - \Omega)} \left[\frac{K_i a_{si} K'_s}{\omega' - \Omega} K_n \Gamma'_{nj} (\omega - \Omega) K_j'' + \frac{K_i a_{ji} K_j''}{\omega'' - \Omega} K_n \Gamma_{ns} (\omega - \Omega) K_s' \right]$$

и согласно /2.5/ равна $S_{jisi}''(\omega'', \vec{k}'', \omega, \vec{k}) \frac{K''_i K'_e K_i}{KK'K''}$

Для разбора конкретных частных случаев индуцированного рассеяния продольных волн представляется очень удобной несколько иная, более симметричная запись "горячей" свертки /3.10/

$$\begin{aligned}
 S = S_{ij's}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') \frac{K_i K_j'' K_s'}{KK'K''} &= i \frac{e}{m} \frac{\omega_e^2}{KK'K''} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_e}{\sqrt{2\pi} U_r} e^{-U_r^2/2} U_r^2 \times \\
 &\times \int_0^{\infty} \frac{U_r dU_r}{U_r} e^{-U_r^2/2} U_r^2 \sum_{n, e=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{K_i'' \omega_e}{\Omega}\right) J_e\left(\frac{K_s'' \omega_e}{\Omega}\right) J_{en}\left(\frac{K_j' \omega_e}{\Omega}\right) \times \\
 &\times \exp[i\ell\theta'' + i n\theta' - i(\ell+n)\theta] \left\{ -\frac{K_e K_e' K_e''}{\omega_o \omega_i \omega_e} \left[\frac{K_e}{\omega_o} + \frac{K_e'}{\omega_i} + \frac{K_e''}{\omega_e} \right] + \right. /3.13/ \\
 &+ \frac{1}{4\omega_o \omega_i} \left[\frac{K_i' \alpha_{ij} K_j''}{\omega_o + \Omega} + \frac{K_i' \alpha_{ji} K_j''}{\omega_o - \Omega} \right] \left[\frac{K_j'' \alpha_{js} K_s'}{\omega_i + \Omega} + \frac{K_j'' \alpha_{sj} K_s'}{\omega_i - \Omega} \right] + \\
 &+ \frac{1}{4\omega_o \omega_e} \left[\frac{K_i' \alpha_{is} K_s'}{\omega_o + \Omega} + \frac{K_s' \alpha_{si} K_i}{\omega_o - \Omega} \right] \left[\frac{K_s' \alpha_{sj} K_j''}{\omega_e + \Omega} + \frac{K_s' \alpha_{js} K_j''}{\omega_e - \Omega} \right] - \\
 &- \frac{1}{4\omega_o \omega_e} \left[\frac{K_i' \alpha_{is} K_s'}{\omega_i + \Omega} + \frac{K_i' \alpha_{si} K_s'}{\omega_i - \Omega} \right] \left[\frac{K_i' \alpha_{ij} K_j''}{\omega_e + \Omega} + \frac{K_i' \alpha_{ij} K_j''}{\omega_e - \Omega} \right] + i(\vec{k}' \cdot [\vec{k} \vec{h}]) \frac{\Omega}{4\pi} \frac{K_i' K_s''}{\omega_o^2 \omega_e^2 (\omega_i^2 - \omega_e^2)} \\
 &+ \frac{\Omega}{\omega_i} \frac{K_e'' K_e}{\omega_i^2 - \Omega^2} \left(\frac{1}{\omega_e^2} - \frac{1}{\omega_o^2} \right) + \frac{\Omega}{\omega_e} \frac{K_e K_e'}{\omega_e^2 - \Omega^2} \left(\frac{1}{\omega_e^2} - \frac{1}{\omega_i^2} \right) \left. \right] + \frac{[\vec{k} \vec{h}]}{\omega_e^2 - \Omega^2} \left(\frac{[\vec{k}'' \vec{h}]}{\omega_e^2} + \frac{[\vec{k}' \vec{h}]}{\omega_e^2} \right) K_e' K_e'' \\
 &+ \frac{[\vec{k} \vec{h}]}{\omega_i^2 - \Omega^2} \left(\frac{[\vec{k}'' \vec{h}]}{\omega_o^2} - \frac{[\vec{k} \vec{h}]}{\omega_o^2} \right) K_e K_e'' + \frac{[\vec{k}'' \vec{h}]}{\omega_e^2 - \Omega^2} \left(\frac{[\vec{k}' \vec{h}]}{\omega_o^2} - \frac{[\vec{k} \vec{h}]}{\omega_i^2} \right) K_e' K_e' \\
 \end{aligned}$$

Заметим, что подобная запись существует и для свертки /3.12/ в холодной плазме. В этом легко убедиться сравнением фигурных скобок в правых частях /3.10/, /3.12/ и /3.13/ с учетом обозначений /3.11/ (справедливых также и в /3.13/).

Из /3.13/ следует свойство симметрии, справедливое для горячей магнитоактивной плазмы:

$$\frac{K_i K_j'' K_s'}{KK'K''} S_{ij's}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}', \vec{B}_o) = S_{j'si}(\omega'', \vec{k}'', \omega, \vec{k}, -\vec{B}_o) \frac{K_j'' K_s' K_i}{KK'K''}. /3.14/$$

Приведем, наконец, другую, весьма полезную форму уравнения /1.26/ в частном случае индуцированного рассеяния продольных волн, используя определение /1.28/ для перехода от корреляторов $(E_j E_i)_{\omega, \vec{k}}$ к энергиям $W_e(\vec{k})$:

$$\begin{aligned}
 \frac{dW_e(\vec{k})}{dt} &= -\frac{\omega(\vec{k})}{\pi^2} \left(\frac{\partial(\epsilon \omega)}{\partial \omega} \right)^{-1}_{\omega=\omega(\vec{k})} W_e(\vec{k}) \int d\vec{k}' W_e(\vec{k}') \times \\
 &\times \left(\frac{\partial(\omega' \epsilon)}{\partial \omega'} \right)^{-1}_{\omega'=\omega'(\vec{k}')} \operatorname{Im} \int V(\omega, \vec{k}, -\omega', -\vec{k}') - /3.15/ \\
 &- \frac{S(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') S_s(\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}', \omega, \vec{k})}{\epsilon(\omega - \omega', \vec{k} - \vec{k}')} + V(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') - \frac{S(\omega, \vec{k}, -\omega', -\vec{k}') S_s(\omega + \omega', \vec{k} - \vec{k}', \omega, \vec{k})}{\epsilon(\omega + \omega', \vec{k} - \vec{k}')}
 \end{aligned}$$

В правой части этого уравнения вместо частот ω, ω' подставлены дисперсионные законы взаимодействующих продольных волн $\omega(\vec{k})$ и $\omega'(\vec{k}')$, представляющие собой положительно определенные и, вообще говоря, отличные друг от друга функции волновых векторов \vec{k} и \vec{k}' , согласно

равенству /I.32/. Положительность спектров $\omega(\vec{k})$ и $\omega'(\vec{k})$ влечет за собой малость последних двух слагаемых в фигурной скобке правой части уравнения /3.15/, так что нелинейное взаимодействие определяется первыми двумя слагаемыми этой скобки, вклад которых и рассматривается ниже.

Наше рассмотрение индуцированного рассеяния продольных волн на частицах магнитоактивной плазмы начнем со случая, когда частоты падающей ω' и рассеянной ω волны велики по сравнению с электронной гироколебательной частотой Ω_e , а $\omega'' = \omega - \omega' \ll \omega, \omega'$. Взаимодействующими высокочастотными волнами при этом, очевидно, могут быть длинноволновые ($\omega \gg k v_{re}$) ленгмюровские колебания со спектром /1/, стр. 88 /I2.I2/

$$\omega^2 = \omega_e^2 + 3k^2 v_{re}^2 \quad /3.16/$$

и ионный звук /см. [1], стр. I04, /I4.I5/

$$\omega^2 = \omega_i^2 \left(1 + \frac{\omega_e^2}{k^2 v_{re}^2}\right)^{-1}, \quad /3.17/$$

т.е. обычные ветви продольных колебаний в изотропной плазме в соответствии с высказанным выше условием слабости внешнего магнитного поля ($\Omega_e \ll \omega, \omega'$). Для таких взаимодействий из /3.5/, /3.7/, /3.8/, /3.10/, /3.14/ получаем (считая $\omega - k_e v_e$, $\omega' - k'_e v_e \gg \omega'' - k''_e v_e$)

$$-S_1 = -\frac{K_j'' K_s' K_i}{K K' K''} S_{jsi}(\omega'', \vec{k}'', \omega, \vec{k}) = S_{jjs}(\omega, \vec{k}, \omega', \vec{k}') \frac{K_i K_j'' K_s'}{K K' K''} = S = /3.18/$$

$$= -i \frac{e}{m} \omega_e^2 \frac{K K'}{K K' K''} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_e}{\sqrt{2\pi} v_r} e^{-\frac{v_r^2}{2} \omega_e^2} \frac{1}{(\omega - k_e v_e + i0)^2} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} A_\ell \left(\frac{K_i''^2 v_r^2}{\Omega_e^2} \right) K_j'' J_{j3}(\omega_e) K_s' /3.18/$$

$$V = V_{ijjs}(\omega, \vec{k}; -\omega', -\vec{k}') \frac{K_i K_s' K_j' K_e}{(K K')^2} = \\ = -\frac{e^2}{m^2} \omega_e^2 \frac{(K K')^2}{(K K')^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_e}{\sqrt{2\pi} v_r} \frac{e^{-\frac{v_r^2}{2} \omega_e^2}}{(\omega - k_e v_e + i0)^4} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} A_\ell \left(\frac{K_i''^2 v_r^2}{\Omega_e^2} \right) K_j'' J_{j3}(\omega_e) K_s' /3.19/$$

$$\omega_2 = \omega'' - k_e'' v_e - \ell \Omega_e + i0 \quad /3.20/$$

Естественно рассмотреть три возникающих при этом случая.

I. Падающая и рассеянная волны – ленгмюровские /3.16/. В соответствии с неравенствами, определяющими справедливость существования спектра /3.16/ ($\omega/k, \omega'/k' \gg v_{re}$) из /3.18/ и /3.19/ имеем:

$$-S_1 = S = i \frac{e}{m} \left(\frac{\vec{k} \vec{k}'}{K K'} \right) \frac{K''}{\omega^2} [\epsilon(\omega'', \vec{k}'') - 1]; \quad /3.21/$$

$$V = \frac{e^2}{m^2} \left(\frac{\vec{k} \vec{k}'}{K K'} \right)^2 \left(\frac{K''}{\omega^2} \right)^2 [\epsilon(\omega'', \vec{k}'') - 1]. \quad /3.22/$$

В правых частях этих равенств, как и всюду ранее в этой работе, производится суммирование по сортам частиц, так что $\epsilon(\omega'', \vec{k}'')$ — продолженная диэлектрическая проницаемость для колебания с частотой $\omega'' = \omega - \omega'$, и волновым вектором $\vec{k}'' = \vec{k} - \vec{k}'$ с учетом только одного определенного sorta частиц. Согласно /I.20/ имеет вид /ср. [9], гл. I/

$$\epsilon(\omega'', \vec{k}'') = 1 - \left(\frac{\omega_e}{k''}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_e}{\sqrt{2\pi} v_e} e^{-v_e^2/2v_e^2} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} A_\ell \left(\frac{k''^2 v_e^2}{\omega_e^2}\right) \frac{k_j'' f_{js}(\omega_e) k_s''}{\omega_s} /3.23/$$

Ограничимся для определенности изучением двухкомпонентной плазмы, состоящей из электронов /масса m_e / и ионов /масса M_i / одного sorta. Все величины /кроме масс/, характеризующие ионы и электроны, будем отмечать индексами „ e “ и „ i “. Тогда, например, полная продолженная диэлектрическая проницаемость электронно-ионной плазмы определится выражением

$$1 + \delta\epsilon_e + \delta\epsilon_i, /3.24/$$

в котором $\delta\epsilon_e$, $\delta\epsilon_i$ представляют собой вторые слагаемые правой части /3.23/ с учетом замены $\omega_e \rightarrow \omega_{ie,i}$, $v_r \rightarrow v_{re,i}$, $R \rightarrow R_{ie}$ соответственно. Уравнение /3.15/ при этом существенно упрощается

$$\frac{dW_e(\vec{k})}{dt} = - \frac{\omega_{ie}}{4\pi^2} W_e(\vec{k}) \int d\vec{k}' W_e(\vec{k}') (\vec{k}'')^2 \left(\frac{\vec{k}\vec{k}'}{k'k''}\right)^2 \omega_{ie}^{-4} \times \\ \times \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^2}{m_e} \delta\epsilon_e(\omega'', \vec{k}'') + \frac{e^2}{M_i} \delta\epsilon_i(\omega'', \vec{k}'') - [1 + \delta\epsilon_e(\omega'', \vec{k}'') + \delta\epsilon_i(\omega'', \vec{k}'')] \left[\frac{e}{m_e} \delta\epsilon_e(\omega'', \vec{k}'') + \frac{e}{M_i} \delta\epsilon_i(\omega'', \vec{k}'') \right] \right\} /3.25/$$

Отсюда, например, в случае электронной плазмы в пределе $\omega'' \ll \omega_e$, $\omega'' \ll k_z'' v_{re}$ получаем

$$\frac{dW_e(\vec{k})}{dt} = - \frac{3}{32\pi^2 \sqrt{2\pi}} \omega_{ie} \frac{W_e(\vec{k})}{N_e \tau_{de}} \tau_{de} \int d\vec{k}' W_e(\vec{k}') A_o \left(\frac{k''^2 v_{re}^2}{\omega_e^2}\right) \left(\frac{\vec{k}\vec{k}'}{k'k''}\right)^2 \times \\ \times \frac{k^2 - k'^2}{|k_z - k'_z|} \left\{ [1 + (k'' \tau_{de})^{-2}]^2 + \frac{9\pi}{8} \frac{(k^2 - k'^2)^2}{(k'')^4} (k_z'' \tau_{de})^{-2} A_o^2 \left(\frac{k''^2 v_{re}^2}{\omega_e^2}\right) \right\}^{-1}, /3.26/$$

где $\tau_{de} = v_{re}/\omega_{ie} = \left(\frac{4\pi N_e e^2}{\omega_e \tau_{de}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ — дебаевский радиус электронов.

Ядро этого уравнения антисимметрично относительно перестановки своих аргументов \vec{k} и \vec{k}' , что влечет сохранение во времени энергии ленгмировских колебаний /ср. [7]/ в рассматриваемом приближении:

$$\frac{d}{dt} \int d\vec{k} W_e(\vec{k}) = 0 /3.27/$$

2. Если обе взаимодействующие волны — ионно-звуковые колебания /3.17/, то процесс описывается уравнением /3.15/ и свертками /3.18/ и /3.19/, в которых следует учесть ω/ω_K , $\omega'/\omega_K' \ll v_{re}$.

3. Наконец, если рассеянная волна с частотой ω и волновым вектором \vec{k} - ленгмюровская /3.16/, а падающая - ионно-звуковая /3.17/, то нелинейное взаимодействие описывается упрощенными свертками /3.21/ и /3.22/. Обратный случай рассеяния ленгмюровского колебания в ионный звук получается при этом перестановкой $\vec{k} \rightarrow \vec{k}'$. Заметим в заключение, что равенства /3.18/-/3.20/ вместе с уравнением /3.15/ являются обобщением соотношений, описывающих "кулоновское" взаимодействие продольных волн в изотропной плазме /см. [2,7]/, на случай магнитоактивной плазмы.

Известно /см. [9,10]/, что кроме продольных волн /3.16/ и /3.17/, существующих как в изотропной, так и в магнитоактивной плазме, в последней возбуждаются и слабо затухают продольные волны с самыми различными дисперсионными законами в разных областях прозрачности плазмы. Не останавливаясь здесь подробно на нелинейном взаимодействии таких волн, приведем лишь значения сверток V , S и S_1 , в случае, когда частоты взаимодействующих волн близки к гироскопическим:

$$\begin{aligned} V = & -\frac{e^2}{m^2} \frac{\omega_e^2}{(\omega-n\omega)^2} \left(\frac{K_z K'_z}{KK'} \right)^2 \int_0^\infty \frac{dv_{\perp} v_{\perp}}{v_r^2} e^{-v_z^2/2v_r^2} J_n^2 \left(\frac{K_z v_{\perp}}{\omega} \right) J_n^2 \left(\frac{K'_z v_{\perp}}{\omega} \right) \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{\omega''} J_+ \left(\frac{\omega''}{K_z'' v_r} \right) \left[\frac{K_z (6K_z + 2K_z'')}{(\omega-n\omega)^3} - \frac{K_z (8K_z - 2K_z'')}{(\omega-n\omega)^2 (\omega'-n\omega)} - \right. \right. \\ & - 2 \left. \frac{K_z K_z'}{(\omega-n\omega)(\omega'-n\omega)^2} \right] + \frac{1}{K_z'' v_r} \left[J_+ \left(\frac{\omega''}{K_z'' v_r} \right) - 1 \right] \times \\ & \times \left[\frac{K_z' K_z''}{(\omega'-n\omega)^2} + \frac{K_z'^2 - K_z''^2}{(\omega-n\omega)^2} + \frac{K_z' K_z''}{(\omega-n\omega)(\omega'-n\omega)} \right] + \\ & + \left[\left(1 - \frac{(\omega'')^2}{(K_z'' v_r)^2} \right) J_+ \left(\frac{\omega''}{K_z'' v_r} \right) - \frac{(\omega'')^2}{(K_z'' v_r)^2} \right] \frac{1}{(\omega-n\omega)(\omega'-n\omega)(K_z'' v_r)^2} \} \end{aligned} \quad /3.28/$$

$$\begin{aligned} S = S_1 = & -i \frac{e}{m} \frac{\omega_e^2}{(\omega-n\omega)^2} \int_0^\infty \frac{dv_{\perp} v_{\perp}}{v_r^2} e^{-v_z^2/2v_r^2} J_0 \left(\frac{K_z'' v_{\perp}}{\omega} \right) \times \quad /3.29/ \\ & \times J_n \left(\frac{K_z v_{\perp}}{\omega} \right) J_n \left(\frac{K_z' v_{\perp}}{\omega} \right) \frac{K_z K_z'}{KK' K''} \left\{ \frac{K_z''}{(\omega-n\omega)} \left(2 \frac{K_z}{\omega-n\omega} + \frac{K_z'}{\omega'-n\omega} \right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{v_r^2} + \frac{K_z K_z''}{(\omega-n\omega)\omega''} \right) J_+ \left(\frac{\omega''}{K_z'' v_r} \right) - \frac{1}{v_r^2} \right\}. \end{aligned}$$

Когда же частоты взаимодействующих волн ω и ω' существенно меньше гироскопических ($\omega, \omega', \omega'' \ll \omega$), имеем из /3.5/, /3.7/, /3.8/, /3.10/ и /3.14/

$$\begin{aligned} S = S_1 = & -i \frac{e}{m} \frac{\omega_e^2}{KK' K''} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_{\perp}}{\sqrt{2\pi} v_r} e^{-v_z^2/2v_r^2} \times \\ & \times \frac{K_z K_z' K_z''}{\omega_0 \omega_1 \omega_2} \left(\frac{K_z}{\omega_0} + \frac{K_z'}{\omega_1} + \frac{K_z''}{\omega_2} \right) \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_{\perp} dv_{\perp}}{v_r^2} e^{-v_z^2/2v_r^2} J_0 \left(\frac{K_z' v_{\perp}}{\omega_2} \right) J_0 \left(\frac{K_z'' v_{\perp}}{\omega_2} \right); \end{aligned}$$

$$V = -\frac{e^2}{m^2} \frac{\omega_e^2}{(KK')^2} \int_0^\infty \frac{dv_{\perp} v_{\perp}}{v_r^2} e^{-v_z^2/2v_r^2} J_0^2 \left(\frac{K_z v_{\perp}}{\omega} \right) J_0^2 \left(\frac{K_z' v_{\perp}}{\omega} \right). \quad /3.30/$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_e}{\sqrt{2\pi} U_r} e^{-U_r^2/2} \omega_e^2 \left\{ \left[\frac{K_e K_e' \partial}{\omega_0} + \frac{K_e' K_e'' \partial}{\omega_0} - \frac{K_e'^2}{\omega_0^2} \right] T(\omega_0, \omega_e) + \left[\frac{K_e^2 \partial}{\omega_0} + \frac{K_e K_e'' \partial}{\omega_0} - \frac{K_e^2}{\omega_0^2} \right] G(\omega_0, \omega_e) \right\}$$

$$T(\omega_0, \omega_e) = -\frac{K_e K_e'}{\omega_0^2 \omega_e} \left[\frac{K_e K_e''}{\omega_0^2} + 2 \frac{K_e^2}{\omega_0} \right], \quad 13.31/$$

$$G(\omega_0, \omega_e) = \frac{K_e K_e'}{\omega_0^2 \omega_e} \left[\frac{K_e K_e''}{\omega_0^2} + 2 \frac{K_e K_e'}{\omega_0} \right], \quad \omega_0 = \omega - K_e U_r + i0, \quad \omega_0' = \omega' - K_e' U_r + i0, \quad \omega_e = \omega'' - K_e'' U_r + i0.$$

В частности, если взаимодействующие колебания имеют одинаковый спектр /см. [9]/

$$\omega^2 = \frac{K_e^2}{K_e^2} \omega_{re}^2 \left\{ 1 + \frac{K_e^2}{K_e^2} \frac{\omega_{re}^2}{U_r^2} + \frac{\omega_{re}^2}{K_e^2 U_r^2} \left[1 - A_o \left(\frac{K_e^2 U_r^2}{U_r^2} \right) \right] \right\}^{-1} \quad 13.32/$$

справедливый при выполнении условий

$$\frac{K_e^2 U_r^2}{U_r^2} \gg 1, \quad \frac{K_e^2 U_{re}^2}{U_r^2} \ll 1, \quad \omega_{re,i} \gg \omega \gg K_e U_{re,i} \quad 13.33/$$

в существенно неизотермической магнитоактивной плазме с горячими ионами ($T_i \gg T_e$), уравнение 13.15/ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dW_e(\vec{k})}{dt} = & -\frac{\omega_{re}}{8\pi^2 \sqrt{2\pi}} \frac{W_e(\vec{k})}{N_e 2\pi U_r} \int (K_e^2 \tau_{pe})^{-1} \frac{K_e}{K} \left(\frac{K_e K_e' K_e''}{K K' K''} \right)^2 \times \\ & \times \left\{ 1 + \left(\frac{K_e \omega_{re}}{K \omega_{re}} \right)^2 + \frac{\omega_{re}^2}{K^2 U_{re}^2} \left[1 - A_o \left(\frac{K_e^2 U_{re}^2}{U_r^2} \right) \right] \right\}^{-1/2} \left\{ \frac{1}{\omega} + \frac{\omega_{re}^2}{K^2 U_{re}^2} - \right. \\ & \left. - \frac{\omega_{re}^2}{K^2 U_{re}^2} A_o \left(\frac{K_e^2 U_{re}^2}{U_r^2} \right) \right\}^2 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\omega_{re}^2 \omega''}{K^2 U_{re}^2} \right)^2 A_o^2 \left(\frac{K_e^2 U_{re}^2}{U_r^2} \right)^2 \times \\ & \times \frac{\omega_{re} \omega''}{(K')^2} \left\{ \frac{\omega_{re}^3}{\omega \omega' \omega''} \left[\frac{K_e}{\omega} + \frac{K_e'}{\omega'} + \frac{K_e''}{\omega''} \right] \right\}^2 W_e(\vec{k}) d\vec{k}, \end{aligned} \quad 13.34/$$

где $\omega = \omega(\vec{k})$ и $\omega' = \omega'(\vec{k}')$ определяются равенством 13.32/, $\omega'' = \omega(\vec{k}) - \omega'(\vec{k}')$ и принято, что $K_e'' U_{re} \ll \omega' \ll K_e'' U_{re}$.

В заключение приведем пример сечения индуцированного рассеяния продольных волн на частицах магнитоактивной плазмы. Записав уравнение 13.15/ в виде

$$\frac{dW_e(\vec{k})}{dt} = W_e(\vec{k}) \int d\vec{k}' W_e(\vec{k}') Q(\vec{k}, \vec{k}'),$$

получим согласно разработанной в [II] методике выражение для сечения рассеяния продольной волны с частотой ω' и волновым вектором \vec{k}' в объеме $d\vec{k}'$ пространства волновых векторов \vec{k}' рассеянной волны через ядро $Q(\vec{k}, \vec{k}')$

$$d\sigma_a(\vec{k}, \vec{k}') = (N_e / \partial \omega' / D)^{-1} \omega_e T_a \frac{\omega}{\omega' - \omega} Q_a(\vec{k}, \vec{k}') d\vec{k}' \quad 13.35/$$

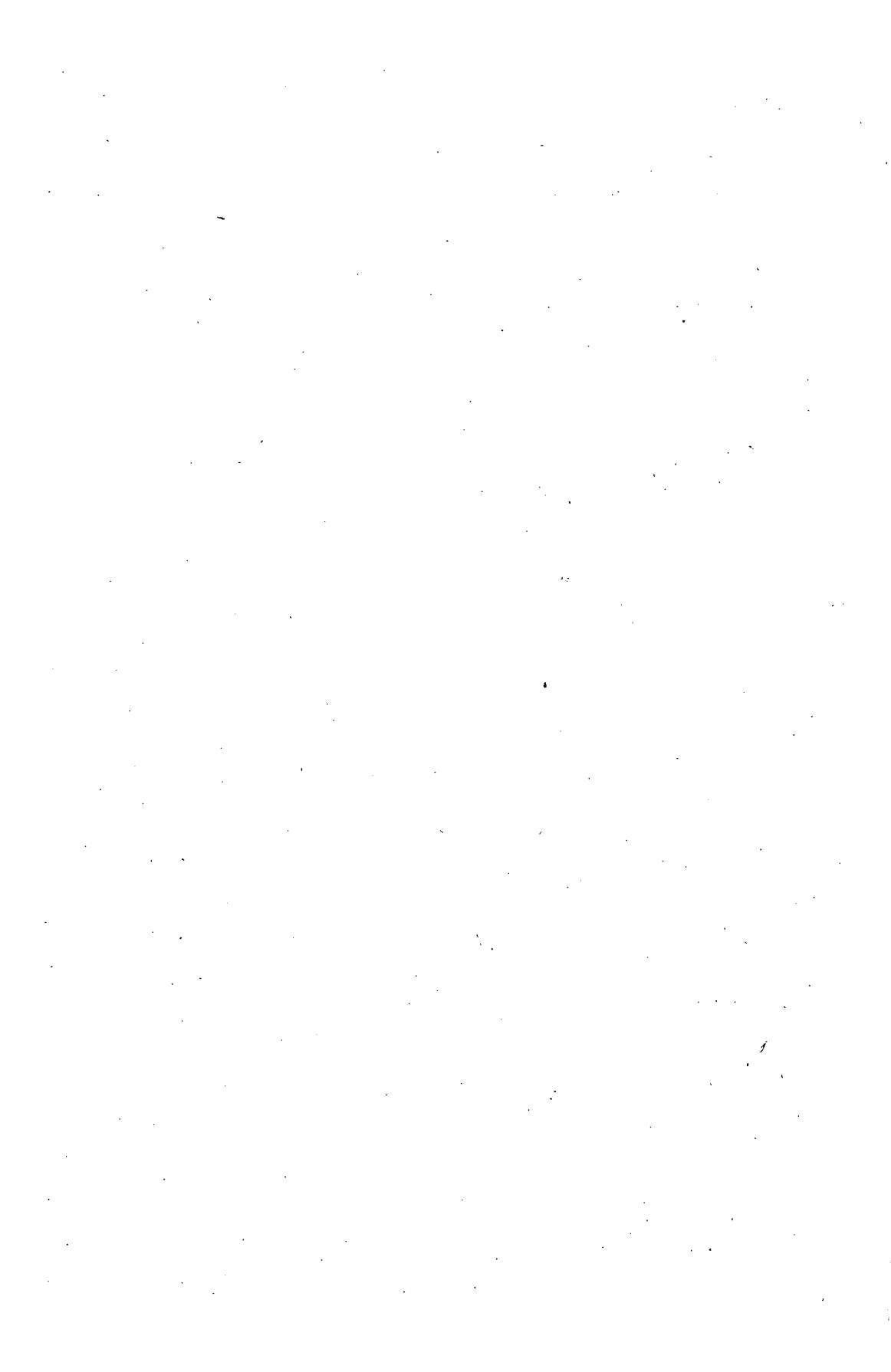
Здесь $\omega = e, i$ - индекс, указывающий тип частицы, на которой происходит рассеяние. В изотропной плазме такие сечения, полученные из уравнений нелинейного взаимодействия [2], были выписаны для некоторых процессов в работе [12]. В рассматриваемом здесь случае магнитоактивной плазмы рассеяние, например, ленгмюровских волн /3.16/ на электронах, описанное выше уравнением /3.26/, характеризуется сечением

$$d\sigma(\vec{k}, \vec{k}') = \left(\frac{e^2}{m u_e^2} \right)^2 d\vec{k}' \frac{\tau_{de}^3}{3\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\vec{k}\vec{k}'}{kk'} \right)^2 \frac{z_{de}^{-2}}{k' |k-k'|} A_0 \left(\frac{k_z''^2 u_e^2}{\Omega_e^2} \right) / 3.361 \\ \times \left\{ [1 + (k'' z_{de})^2]^{-2} + \frac{9\pi}{8} \frac{(k^2 - k'^2)^2}{(k'')^4} (k_z'' z_{de})^{-2} A_0^2 \left(\frac{k_z''^2 u_e^2}{\Omega_e^2} \right) \right\}^{-1}$$

Благодарим В.П.Силина за руководство и поддержку в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.П.Силин, А.А.Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Госатомиздат, Москва, 1961г.
2. Л.М.Горбунов, В.В.Пустовалов, В.П.Силин ЖЭТФ 47 № 4 /10/, 1437 /1964/
3. А.П.Кропоткин, В.В.Пустовалов, Изв.ВУЗов, Радиофизика /в печати/, Препринт ФИАН СССР, А-26, 1965 ; А.П.Кропоткин, В.В.Пустовалов ЖЭТФ /в печати/.
4. Л.М.Альтшуль, В.И.Карпман ЖЭТФ 47 №4/10/, 1552 /1964/ ; В.И.Карпман, ПМТФ, №6, 36 /1963/ ; В.Н.Цытович, А.Б.Шварцбург, ЖЭТФ /в печати/, препринт ФИАН СССР, А-21 /1965/.
5. Н.П.Гиоргадзе, ЖТФ 34, 9, 1580 /1964/ ; Н.Л.Цинцадзе ЖТФ, 34, 10, 1807 /1964/ ; Н.П.Гиоргадзе, Н.Л.Цинцадзе, Изв.ВУЗов, Радиофизика, 7, №2, 262 /1964/.
6. В.Ф.Алексин, К.Н.Степанов, Изв.ВУЗов, Радиофизика 5, №1, 61 /1962/
7. Л.М.Горбунов, В.П.Силин, ЖЭТФ 47, №7, 200 /1964/.
8. Л.И.Рудаков, Р.З.Сагдеев, "Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций", т.3, стр.269, Изд-во АН СССР /1958/ ; А.А.Веденов, Р.З.Сагдеев, там же стр.278 ; А.Б.Киценко, К.Н.Степанов, ЖЭТФ 39, 1841 /1960/ ; А.Е.Стефанович, ЖТФ 32 638 /1962/
9. А.А.Рухадзе, Диссертация ФИАН СССР, 1964г.
10. А.И.Ахиезер, И.А.Ахиезер, Р.В.Половин, А.Г.Ситенко, К.Н.Степанов, Коллективные колебания в плазме, Атомиздат, Москва, 1964г.
11. Л.М.Горбунов, Диссертация ФИАН СССР, 1965г.
12. Л.М.Горбунов, В.В.Пустовалов, В.П.Силин, Известия ВУЗов, Радиофизика /в печати/ ; Препринт ФИАН СССР, А-73 /1964/.



ETUDE D'INSTABILITES A PARTIR DE L'EQUATION DE VLASOV DANS UN PLASMA INHOMOGENE EN GEOMETRIE CYLINDRIQUE

P.H. REBUT

CENTRE D'ETUDES NUCLEAIRES DE FONTENAY-AUX ROSES, SEINE, FRANCE

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

INSTABILITIES IN A CYLINDRICAL INHOMOGENEOUS PLASMA ON THE BASIS OF THE VLASOV EQUATION. Instabilities in cylindrical rotational geometry in an inhomogeneous medium are investigated on the basis of the Vlasov equations. The approach is similar to that of Mikhalovsky (perturbation in space of the first integrals of the unperturbed motion), and allows one to bring out some general properties of the marginal modes.

By applying this method to the special case of the quasi-electrostatic instabilities it is possible to define the various unstable regions, and to unite in a single equation instabilities of such different aspect as the "flute", the "universal" and the "beam" type instabilities. The stabilizing influence of various parameters, such as the curvature, the "shear" and the large Larmor radii, is demonstrated.

ETUDE D'INSTABILITES A PARTIR DE L'EQUATION DE VLASOV DANS UN PLASMA INHOMOGENE EN GEOMETRIE CYLINDRIQUE. L'auteur fait l'étude des instabilités en géométrie cylindrique de révolution à partir des équations de Vlasov en milieu inhomogène. Il utilise un traitement, similaire à celui qu'emploie Mikhalovsky (perturbation dans l'espace des intégrales premières du mouvement non perturbé), qui permettra de mettre en évidence certaines propriétés générales des modes marginaux.

L'application de cette méthode au cas particulier des instabilités quasi-électrostatiques permet de définir les divers domaines instables et de réunir en une seule équation des instabilités en apparence aussi diverses que les «cannelures», les «instabilités universelles» ou celles du type «faisceau». L'auteur montre l'influence stabilisatrice de divers paramètres tels que la courbure, le croisement des lignes de champ, les grands rayons de Larmor.

ИЗУЧЕНИЕ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ. На основе уравнения Власова исследуется неустойчивость неоднородной среды в цилиндрической геометрии. Используется тот же подход, что и у Михайловского (возмущение в пространстве первых интегралов невозмущенного движения), который позволяет выявить некоторые общие свойства крайних мод.

Применение этого метода в случае квазиэлектростатических неустойчивостей позволяет установить различные неустойчивые области и представить в одном уравнении неустойчивости разного типа — «желобковую», «универсальную» и неустойчивость типа «пучковой». Демонстрируется стабилизирующее влияние различных параметров, таких как кривизна, «ширина» и конечность ларморовских радиусов.

ESTUDIO DE INESTABILIDADES A PARTIR DE LA ECUACION DE VLASOV EN UN PLASMA NO HOMOGENEO DE GEOMETRIA CILINDRICA. Este estudio de las inestabilidades en geometría cilíndrica de revolución se efectúa a partir de las ecuaciones de Vlasov en medio no homogéneo. Se utiliza un tratamiento análogo al aplicado por Mikhalovsky (perturbación en el espacio de las integrales primeras del movimiento no perturbado) y permite definir cierto número de propiedades de los modos marginales.

La aplicación de este método al caso particular de las inestabilidades cuasi electrostáticas permite definir las diversas regiones inestables y reunir en una sola ecuación inestabilidades en apariencia tan diversas como las inestabilidades «en estrías», las «inestabilidades universales» y las del «tipo de haz». Se demuestra la influencia estabilizadora de diversos parámetros, tales como la curvatura, el cizallamiento y los grandes radios de Larmor.

I. INTRODUCTION

Le choix de la géométrie cylindrique dans cette étude de la stabilité des plasmas a été dicté par le fait que tout en conservant les aspects importants du plasma cette géométrie conduit à des calculs relativement faciles. Les principaux facteurs qui peuvent influencer la stabilité se retrouvent : la densité variera avec le rayon, les lignes de champ magnétique dépendant du rayon posséderont une courbure et un pas variables (shear), le plasma pourra être parcouru de courants parallèles ou perpendiculaires aux lignes de force. On pourra aussi adjoindre une anisotropie aux fonctions de distribution des particules. Le tenseur de conductivité ne s'exprimant qu'en fonction des données locales du plasma, on pourra, dans le cas de géométries plus complexes, utiliser la géométrie cylindrique tangente.

Le plasma à l'équilibre sera défini par ses propriétés microscopiques (fonction de distribution des particules). Afin de ne pas alourdir les calculs on se bornera surtout à l'étude de l'influence du confinement sur la stabilité ; ce confinement se traduit de manière microscopique par une vitesse orientée différente pour chacune des deux espèces, ions et électrons. Les fonctions de distribution choisies seront donc isotropes autour d'une vitesse macroscopique locale (en général pour les calculs numériques on prendra une distribution maxwellienne).

Une étude de l'influence de l'anisotropie ne différera pas sensiblement du cas traité quant aux calculs, si ce n'est quant aux résultats.

Les grandeurs qui interviendront dans les résultats pourront être regardées en général, soit sous leur aspect microscopique, soit sous leur aspect macroscopique : rapport de température, vitesse de dérive liée à la courbure des champs magnétiques, vitesse moyenne d'une assemblée liée, soit au courant parallèle, soit au gradient de pression, etc... On constatera aussi que les "effets Landau" ou les résonances particulières joueront un rôle souvent similaire aux effets résistifs macroscopiques. Par contre, l'action stabilisatrice ou déstabilisatrice des rayons de Larmor finis n'aura pas directement son équivalent macroscopique.

On peut démontrer que le domaine instable (ondes croissantes) est séparé du domaine stable (ondes non croissantes ou, plus généralement, ondes amorties lorsque des particules résonnantes existent) par des modes marginaux (ondes à amplitude stationnaire).

La recherche des domaines de stabilité pourra donc se limiter à la recherche des modes marginaux : ondes à fréquence réelle. Ces modes ont pour propriété générale d'avoir une vitesse de phase comprise entre les vitesses macroscopiques des 2 espèces, dans le cas des plasmas où l'instabilité provient du confinement (courant). Dans la plupart des expériences, où les ions ne transportent pas de courant, ces ondes limites auront toujours une vitesse de phase dirigée dans le sens inverse du courant.

Dans ce travail on n'insistera pas sur la théorie et les méthodes générales utilisées, théorie déjà présentée / 2, 3 /, mais on montrera ce que l'on peut obtenir avec de telles méthodes pour les ondes quasi-électrostatiques qui représentent une classe importante des ondes pouvant se rencontrer dans un plasma ; les instabilités telles que les instabilités d'interchange, les instabilités double-faisceau / 5 /, les instabilités "universelles" / 6 / font partie de ce type d'onde. Ces instabilités sont dominantes dans un plasma à faible β et à faible courant, les autres faisant intervenir de manière essentielle le champ magnétique de l'onde.

La méthode utilisée possède l'avantage de définir, pour le plasma considéré, tout le domaine d'instabilité dans l'approximation envisagée (les courbes présentées ne représenteront que la partie des ondes correspondant à l'approximation quasi-électrostatique).

On donnera un certain nombre d'abaques permettant de définir les domaines d'instabilités d'un plasma expérimental. On montrera qu'il n'existe de plasma stable que dans la mesure où l'on fait intervenir simultanément un "shear" très

élevé, des rayons de Larmor finis et un courant parallèle aux lignes de champ magnétique, faible (condamnation du chauffage ohmique).

II. EQUATIONS DE BASE ET CALCULS GENERAUX

Les équations de départ seront constituées des équations de Vlasov et des équations de Maxwell, l'ensemble étant valable pour un plasma chaud sans collisions importantes. On utilisera initialement une méthode analogue à celle utilisée par Mikhalovsky / 1 /, et l'on n'indiquera que ce qui est nécessaire à la compréhension des résultats ; la méthode a déjà été présentée / 2, 3 /.

Dans le cas d'une géométrie cylindrique de révolution (coordonnées r, θ, z), la fonction de distribution des particules dans l'espace des phases f sera à l'équilibre (indice 0) une fonction arbitraire des trois intégrales premières suivantes :

$$\text{l'énergie } U = \frac{1}{2} M \bar{W}^2 + q\phi$$

$$\text{la quantité de mouvement azimuthale } P_\theta, P_\theta = MrW_\theta + qr\Psi_\theta \quad (1)$$

$$\text{et longitudinale } P_z, P_z = MW_z + q\Psi_z$$

$$\text{soit } f_0 = f_0(U, P_\theta, P_z) \quad (2)$$

La particule ayant une vitesse \bar{W} , une masse M et une charge q , Ψ est le potentiel vecteur lié au champ magnétique B et ϕ le potentiel électrostatique.

Si l'on superpose un champ de force \bar{F}_1 à celui de l'équilibre, la perturbation de la fonction de distribution f s'écrit au premier ordre

$$f_1 = - \left[(\Delta U) \frac{\delta f_0}{\delta U} + (\Delta P_\theta) \frac{\delta f_0}{\delta P_\theta} + (\Delta P_z) \frac{\delta f_0}{\delta P_z} \right] \quad (3)$$

forme dans laquelle Δ est un opérateur présentant pour la particule une variation le long de sa trajectoire non perturbée (T_0)

$$\Delta \equiv \int_{t_0}^t dt' \frac{\bar{F}_1}{M} \cdot \frac{\partial}{\partial W} \quad (4)$$

t étant l'instant d'observation, t_0 l'instant d'application du champ \bar{F}_1 et t' le temps courant.

Dans le cas où \bar{F}_1 est la force produite par le champ électromagnétique d'une onde $\bar{F}_1 = q[\exp.i(\omega t + m\theta + k_z z)][\bar{E}_1(r) + \bar{W} \times \bar{B}_1(r)]$

il existe les relations suivantes entre $\Delta U, \Delta P_\theta, \Delta P_z$

$$\Delta P_\theta = \left[\frac{qrE_{1\theta}}{i\omega} \right]_{t_0}^t - \frac{m}{\omega} \Delta U \quad (5)$$

$$\Delta P_z = \left[\frac{qE_{1z}}{i\omega} \right]_{t_0}^t - \frac{k_z}{\omega} \Delta U$$

ΔU s'exprimant, grâce à (4), sous la forme :

$$\Delta U = \int_{t_0}^t dt' q \bar{W} \cdot \bar{E}_1 \quad (6)$$

ces diverses relations permettent de calculer la perturbation de la fonction de distribution f_1 ,

$$f_1 = \left(\frac{\delta f_0}{\delta U} - \frac{m}{\omega} \frac{\delta f_0}{\delta P_\theta} - \frac{k_z}{\omega} \frac{\delta f_0}{\delta P_z} \right) \Delta U \quad (7)$$

$$- \frac{q}{i\omega} \left[r E_{1\theta} \frac{\delta f_0}{\delta P_\theta} + E_{1z} \frac{\delta f_0}{\delta P_z} \right]_{t_0}^t$$

dans la mesure où $f_1(t_0) = 0$ (dans les formules 6 et 7, \bar{E} représente le champ électrique perturbateur, y compris ses dépendances en t , θ et z)

La connaissance de la fonction de distribution perturbée permet le calcul des grandeurs macroscopiques telles que courant, variation de densité et, en particulier, le tenseur de conductivité par identification

$$\bar{J}_1 = q \int f_1 \bar{W} d^3W \equiv \bar{\sigma} \cdot \bar{E}_1 \quad (8)$$

L'adjonction des équations de Maxwell

$$\nabla \times \bar{B}_1 = 4\pi \bar{J}_1 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \bar{E}_1}{\partial t}, \quad \nabla \times \bar{E}_1 + \frac{\partial \bar{B}_1}{\partial t} = 0$$

permet le calcul des relations de dispersions.

L'expression de la conservation de l'énergie dans un système fermé (limité par des parois conductrices à certains rayons) peut s'écrire dans la mesure où

$$\frac{\delta f_0}{\delta U} - \frac{m}{\omega} \frac{\delta f_0}{\delta P_0} - \frac{k_z}{\omega} \frac{\delta f_0}{\delta P_z} \text{ est réel :}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left((\Delta U)(\Delta U)^* \left(\frac{\delta f_0}{\delta U} - \frac{m}{\omega} \frac{\delta f_0}{\delta P_0} - \frac{k_z}{\omega} \frac{\delta f_0}{\delta P_z} \right) d^3r d^3W \right. \\ & + \frac{1}{2} \left(d^3r d^3W \left[q^2 (\bar{E}_1 \cdot \bar{W})(\bar{E}_1 \cdot \bar{W})^* \frac{\delta f_0}{\delta U} + q^2 (\bar{E}_1 \cdot \bar{E}_1) f_0 \right] \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{8\pi} \int d^3r \left(\frac{\bar{E}_1 \cdot \bar{E}_1}{c^2} + \bar{B}_1 \cdot \bar{B}_1 \right) \right) = \text{constante} \end{aligned} \quad (9)$$

Cette expression est obtenue à partir de l'intégration par partie en coordonnées de Lagrange de l'énergie absorbée par le milieu :

$$\frac{1}{2} \int (\bar{E}_1 \cdot \bar{J}_1 + \bar{E}_1 \cdot \bar{J}_1^*) d^3r$$

Cette formulation de la conservation de l'énergie permet de définir quelques propriétés des domaines d'instabilité : les modes marginaux ont une fréquence réelle et vérifient donc (9). Pour ces modes l'amplitude de l'onde reste constante et on peut donc déduire de (9), l'indice j s'appliquant aux diverses espèces :

$$\sum_j -\frac{1}{2} (\Delta U)(\Delta U)^* \left(\frac{\delta f_{0j}}{\delta U} - \frac{m}{\omega} \frac{\delta f_{0j}}{\delta P_0} - \frac{k_z}{\omega} \frac{\delta f_{0j}}{\delta P_z} \right) d^3r d^3W = \text{constante} \quad (10)$$

D'une manière générale, les effets résonants n'apparaissent que dans ΔU , ces effets conduisent en général à une dépendance linéaire du premier terme de (9).

Pour étudier l'influence des courants on choisira comme fonction de distribution de chaque espèce une fonction donnant une distribution isotrope autour d'une vitesse macroscopique \bar{V}_j

$$f_j = f_{0j}(U - \Omega P_0 - V_z P_z)$$

avec $V_j = \Omega r \bar{e}_r + V_z \bar{e}_z$

On supposera de plus $\frac{\delta f_{0j}}{\delta U} \leq 0$ ce qui supprime les instabilités du type "Laser" / 7 / ou les instabilités de convection / 8 /. En effet $\frac{\delta f_{0j}}{\delta U} \leq 0$ peut se traduire du point de vue équation d'état par le fait que celle-ci est toujours comprise entre une loi isotherme et une loi adiabatique.

Avec cette fonction de distribution particulière, l'équation (10) devient :

$$\Sigma_j - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega + k_j V_j}{\omega} \right) (\Delta U)(\Delta U) \frac{\partial f_{0j}}{\partial U} d^3 r d^3 W = \text{constante}$$

Or, les termes $-(\Delta U)(\Delta U) \frac{\partial f_{0j}}{\partial U}$ sont toujours positifs et croissent avec le temps. L'équation (11) ne peut être satisfaite que si deux des facteurs $\omega + k_j V_j$ sont de signes contraires, c'est-à-dire que si la vitesse de phase de l'onde est comprise entre deux des vitesses macroscopiques des espèces considérées.

Il existe un autre cas où la forme (9) de la conservation de l'énergie est directement applicable, lorsque les espèces ou les ondes sont telles que $k_j V_j = 0$. (9) s'applique alors pour toutes les fréquences réelles ou non ; il s'ensuit qu'un ensemble d'espèces de particules en distribution isotrope sans vitesse macroscopique relative et telles que $\frac{\partial f_{0j}}{\partial U} \leq 0$ est stable : tous les termes de (9) peuvent s'exprimer en fonction de termes positifs et le module du champ électrique ne peut croître indéfiniment.

Dans le cas de deux espèces isotropes, ions et électrons, les modes tels que $k_j V_j = 0$ ne deviendront instables que si l'énergie de l'onde devient négative à fréquence nulle (équilibre voisin), c'est-à-dire dans le cas où :

$$\int d^3 r \left[\frac{\bar{E}_1 \bar{E}_1^*}{4\pi c^2} + \frac{\bar{B}_1 \bar{B}_1^*}{4\pi} + \sum_j q^2 \frac{(\bar{V}_j \bar{E}_1)(\bar{V}_j \bar{E}_1^*)}{\omega \omega^*} \right] d^3 W \frac{\partial f_{0j}}{\partial U} \leq 0$$

Ce qui n'arrive que lorsque l'on dépasse la limite de courant donnée par les "instabilités de courant" / 10 %. Ce dernier cas peut aussi être traité d'une manière différente / 9/.

Mais pour une étude plus détaillée des zones de stabilité, on sera, en général, obligé de passer par l'intermédiaire du tenseur de conductivité, ce que l'on fera dans le cas des ondes quasi-electrostatiques.

III. RELATION DE DISPERSION DES ONDES QUASI-ELECTROSTATIQUES

Les ondes quasi-electrostatiques seront définies par le fait que l'on pourra négliger le champ magnétique produit par l'onde.

Dans ces conditions, le champ électrique de l'onde dérivera d'un potentiel avec $\bar{E}_1 = \bar{\nabla} X$, $X = \exp.i(\omega t + m\theta + k_z z) X(r)$

On spécifiera la fonction de distribution en la supposant donnée par une maxwellienne. Cette dernière hypothèse n'altérera pas les résultats mais permettra d'effectuer les calculs :

$$f_0 = N_0 \exp. - \frac{U - \Omega R - V_{th} R}{K T}$$

N_0 étant une constante proportionnelle à la densité maximale, K la constante de Boltzmann et T la température. V_{th} , vitesse thermique moyenne sera définie par l'indentité

$$\frac{1}{2} M V_{th}^2 = K T$$

On supposera aussi le plasma neutre ($n_i = n_e$ où n est la densité), et uniquement composé d'ions d'indice i et d'électrons d'indice e .

$$\frac{q \bar{V}_i}{T_i} = \frac{q \bar{V}_e}{T_e}$$

Les calculs seront faits dans un repère tel que (pas de champ électrique à l'équilibre).

On posera symboliquement : $\bar{k} = k_z \bar{e}_z + \frac{m}{r} \bar{e}_r - i \frac{\partial}{\partial r} \bar{e}_r$
 l'opérateur $\frac{\partial}{\partial r}$ ne portant que sur la dépendance radiale de X . L'indice II (parallèle) ou \perp (perpendiculaire) se rapportera à la direction définie par le champ magnétique \bar{B} .

Les équations (6) et (7) permettront de calculer f_1 , et, en particulier : ΔU

$$\Delta U = \int_{t_0}^t dt q \bar{W} \cdot \nabla X = [qX]_{t_0}^t - i \omega \int_{t_0}^t dt' q X \quad (11)$$

Dans le cas considéré, les équations de Maxwell se réduisent à l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 X = \sum_j 4\pi c^2 \int q_j f_{1j} d^3 W \quad (12)$$

ce qui peut s'écrire après quelques intégrations :

$$\nabla^2 X = \sum_{ie} \frac{4\pi q^2 c^2 n}{k T_j} \left[1 - \sum_l \int \frac{(\omega + \bar{k} \cdot \bar{v}_j) J_l^2(a k_\perp)}{\omega + k_n W_n + k_n v_{bj} + l \omega_{ej}} g da dW_{ll} \right] X \quad (13)$$

expression dans laquelle $\frac{4\pi q^2 c^2 n}{k T} = \frac{1}{h^2}$

où h est la distance de Debye liée à une espèce donnée, v_d est la vitesse de dérive d'une particule, a son rayon de Larmor, l un entier (numéro de l'harmonique cyclotronique), ω_e la fréquence cyclotronique, J_l une fonction de Bessel, l'indice n désignant un vecteur porté par le vecteur unitaire $\bar{e}_n = \bar{e}_r \times \bar{e}_\perp$.

On remarquera que l'équation (13) n'est valable que si l'on a $V_L \ll v_{th}$ g étant défini par :

$$g = \frac{2a\omega_e^2}{V\pi v_{th}^3} \exp - \frac{a^2\omega_e^2 + (W_n - V_L)^2}{v_{th}^2}$$

les divers paramètres intervenant dans la relation de dispersion (13) peuvent s'exprimer en fonction des grandeurs macroscopiques par les relations suivantes :

$$\langle \bar{v}_d \rangle = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2B^2} \frac{dB^2}{dr} \right) \frac{V_{th}^2}{2\omega_e} \bar{e}_n$$

$$V_n = - \frac{1}{p} \frac{dp}{dr} \frac{V_{th}^2}{2\omega_e}$$

$$\omega_e = \frac{qB}{M}, \quad a^2 = \frac{W_n^2}{\omega_e^2}$$

expressions dans lesquelles R est le rayon de courbure d'une ligne de force et p la pression du plasma. Les crochets $\langle \rangle$ indiquent que l'on prend la valeur moyenne de la grandeur considérée pour une espèce donnée.

La relation (13) peut s'écrire, après quelques simplifications d'intégrations, (on négligera la distribution des vitesses de dérive, distribution ayant un effet analogue à un bruit thermique résiduel perpendiculairement aux lignes de force)

$$\nabla^2 X = \sum_{ie} \frac{1}{h_j^2} \left\{ 1 - \sum_l \left(\frac{(\omega + \bar{k} \cdot \bar{v}_j) I_l \left(\frac{k_\perp V_{thj}^2}{2\omega_{ej}^2} \right) \exp - \frac{k_\perp^2 V_{thj}^2}{2\omega_{ej}^2}}{\omega + k_n W_n + k_n \langle v_{bj} \rangle + l \omega_{ej}} \left[\exp - \left(\frac{W_n - V_{bj}}{V_{thj}} \right)^2 \right] \frac{dW_{ll}}{V_{thj} \sqrt{\pi}} \right) \right\} X \quad (14)$$

I_l étant la fonction de Bessel I d'ordre l .

Cette équation différentielle n'est autre qu'une relation de dispersion pour les "modes de Bernstein" / 4 / généralisée au cas inhomogène : la seule différence est qu'il entre aussi les vitesses macroscopiques et les vitesses de dérive.

IV. DOMAINES DE STABILITE DES ONDES QUASI-ELECTROSTATIQUES

a) Paramètres agissant sur la stabilité

La limite des domaines stables est donnée par des modes à fréquence purement réelle.

Dans ce cas (14) se décomposera en deux équations car le second membre est en général complexe. On supposera que les diverses distances de Debye intervenant sont beaucoup plus petites que les longueurs d'ondes des modes marginaux ce qui sera en général le cas lorsque les distances de Debye seront beaucoup plus petites que les rayons de Larmor des ions. Cette hypothèse permettra de négliger $\nabla^2 X$ dans (14). Dans le cas contraire, ce terme apportera une contribution stabilisante en renforçant l'effet d'écran donné par les termes $\sum_j \frac{X_j}{h_j^2}$.

Dans les résultats présentés, on négligera aussi les contributions apportées par les harmoniques des fréquences cyclotroniques électroniques, les longueurs d'ondes ou les fréquences étant trop différentes de celles interagissant facilement avec les ions.

Dans ces conditions, les modes marginaux vérifient les relations suivantes dans la mesure où la constante diélectrique varie peu sur une longueur d'onde (dans le cas contraire, il faudrait prendre des valeurs moyennes)

$$\frac{1}{h_e^2} \left[1 - \frac{(\omega + \bar{k} \cdot \bar{V}_e)}{|k_{\parallel} V_{thi}|} K(X_e) \right] + \frac{1}{h_i^2} \left[1 - \frac{(\omega + \bar{k} \cdot \bar{V}_i)}{|k_{\parallel} V_{thi}|} \sum_l K(X_{li}) I_l \left(\frac{Y^2}{2} \right) \exp. - \left(\frac{Y^2}{2} \right) \right] = 0 \quad (15)$$

forme dans laquelle $Y^2 = \frac{k_{\parallel}^2 V_{thi}^2}{\omega_e^2}$

$$X_e = \frac{\omega + k_n V_{thi} + k_n \langle v_{di} \rangle}{|k_{\parallel} V_{thi}|} \quad (16)$$

$$X_{li} = \frac{\omega + k_n V_{thi} + k_n \langle v_{di} \rangle + i\omega_{ei}}{|k_{\parallel} V_{thi}|} \quad (17)$$

$$\text{et } K(X) = P.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx' \exp. - x'^2}{\sqrt{\pi} (x' + X)^2} dx' + i\sqrt{\pi} \exp. - X^2$$

(15) étant une forme complexe, correspond à deux équations.

Les équations (15) font intervenir essentiellement les paramètres suivants :

$$\alpha = \frac{\bar{k} \cdot \bar{V}_i}{k_{\parallel} V_{thi}} = \frac{V_{thi}}{V_{thi}} + \frac{k_n V_{thi}}{k_{\parallel} V_{thi}}$$

$$\beta = \frac{k_{\parallel} V_{thi} + k_n V_{di}}{k_n V_{thi}} = \frac{V_{thi}}{V_{thi}} + \frac{k_n V_{di}}{k_n V_{thi}}$$

$$Y = \frac{k_{\parallel} V_{thi}}{\omega_{ei}}, \quad Z = \frac{\omega_{ei}}{k_n V_{thi}}, \quad \tau = \sqrt{\frac{T_e}{T_i}}$$

Le rapport des masses ionique et électronique ($\mu^2 = \frac{M_i}{M_e}$) sera pris égal à 3600 dans les divers abaques (étude faite dans le cas d'un plasma de deutérium). La fréquence ω sera éliminée par l'une des deux équations (15). La seconde de ces équations définira une relation entre les 5 paramètres α, β, Y, Z et τ (surface S dans un hyper espace) ; un plasma expérimental sera défini par un certain nombre de liaisons entre les paramètres précédents (τ constant, relation linéaire entre α et β) qui définiront un sous-espace de α, β, Y, Z et τ . On remarquera que le sous-espace peut ne pas être complet (existence d'inégalité entre les paramètres, influence du "shear", etc...), l'intersection de S avec le domaine valable du sous-espace définira les modes marginaux, si ceux-ci existent le plasma sera instable.

b) Discussion des divers paramètres

Pour un plasma donné ou une tranche de plasma donnée, il existera une relation linéaire entre α et β :

la pente de la droite $\alpha(\beta)$ sera donnée par le rapport :

$$\frac{V_{di}}{V_{de}} = \frac{\frac{1}{p} \frac{dp}{dr}}{\frac{1+1}{R} \frac{dB^2}{2B^2 dr}}$$

lorsque ce rapport sera positif, on aura des configurations du type "striction" où l'interchange joue un rôle important et lorsqu'il sera négatif on aura des configurations du type "puits magnétique" ou à courbure favorable (figure 2).

La pente de cette droite jouera donc un rôle important dans la discussion de la stabilité.

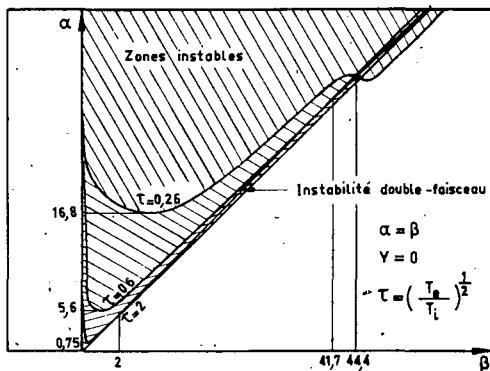


FIG. 1. Limite de stabilité d'un plasma pour le fondamental ($\nu=0$) quand les effets de rayon de Larmor n'interviennent pas.

En abaissant la température électronique on augmente la stabilité (zones instables hachurées). Les instabilités «double-faisceau» sont données par l'intersection de la première bissectrice ($\alpha = \beta$) avec les diverses courbes. On remarquera que les configurations du type «puits magnétiques» ($\alpha\beta < 0$) sont, dans ce cas, stables.

On constatera aussi que la droite $\alpha(\beta)$ passe par le point de la première bissectrice $\alpha = \beta = \sqrt{\frac{V_{de}}{V_{di}}}$ (l'intersection de la première bissectrice avec les courbes limites donne les conditions de l'apparition des instabilités «double faisceau»). On voit déjà qu'un courant parallèle ramenant une partie de la droite descriptive du système dans les quadrants $\alpha, \beta > 0$ peut amener une configuration du type «puits magnétique» à avoir un comportement semblable à celui d'une géométrie moins favorable (figure 1).

γ représente l'effet des rayons de Larmor finis. Ceux-ci auront un effet stabilisant au moins pour les grandes valeurs de γ (figure 2), mais, par contre, il n'en sera pas toujours de même pour γ petit (cas des puits magnétiques).

Le paramètre Z (fréquence cyclotronique) définira la position des harmoniques par rapport au fondamental ; on voit qu'il existe une relation de compatibilité entre Z et les autres paramètres :

$$(Z\gamma)^2 = \left(\frac{k_r}{k_{||}}\right)^2 + \left(\frac{k_n}{k_{||}}\right)^2 = \frac{k_r^2}{k_{||}^2} + \left(\frac{\alpha v_{thi}}{V_n} - \frac{V_n}{V_n}\right)^2$$

soit

$$Z^2 \gamma^2 \geq \left(\frac{\alpha v_{thi}}{V_n} - \frac{V_n}{V_n}\right)^2 \quad (18)$$

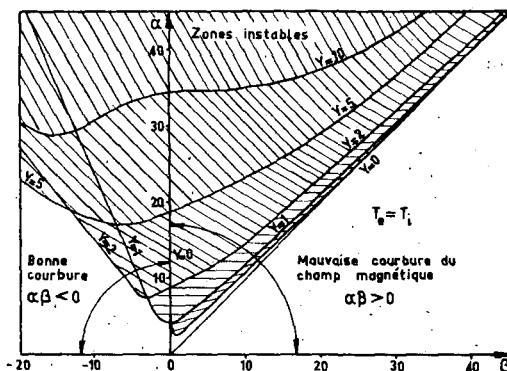


FIG. 2. Influence des effets de rayon de Larmor fini sur la stabilité ($T_e = T_i$). Ceux-ci stabilisent les zones à mauvaises courbures mais déstabilisent les configurations du type puits magnétique au début, puis les restabilisent lorsque la longueur d'onde perpendiculaire devient beaucoup plus petite que le rayon de Larmor des ions.

Une autre limitation peut provenir du "shear", bien que celle-ci soit plus difficile à mettre en évidence : celle-ci interviendra au voisinage de $k_{||} = 0$

- une première limitation est due au fait qu'il reste un bruit thermique résiduel perpendiculairement aux lignes de champ magnétique lorsque celles-ci ne restent pas parallèles (les valeurs de k sont prises au centre guide de chaque particule).

On aura donc $|k_{||}v_{thi}| \geq \left| \frac{k_n}{\sqrt{2}} \left(\frac{B_z B'_0 - B_0 B'_z}{B^2} \right) \frac{v_{thi}^2}{\omega_{ci}} \right|$

cette limitation entraîne :

$$\left| \beta - \frac{V_{thi}}{v_{thi}} \right| \leq \left| \frac{B_z B'_z + B_0 B'_0}{\sqrt{2} (B_z B'_0 - B_0 B'_z)} \right| \quad (19)$$

- une autre limitation plus habituelle vient du fait que la variation du pas des lignes de champs magnétiques oblige à avoir sur une demi-longueur d'onde radiale un certain taux de bruit thermique parallèle aux lignes de champ. Le calcul exact de cette effet est plus difficile car il faudrait tenir compte de la variation explicite de la constante diélectrique avec le rayon, mais en première approximation on

prendra une valeur moyenne de $k_{\parallel} V_{thi}$ sur une demi-longueur d'onde radiale : soit $k_{\parallel} = k'_{\parallel}(r - r_0)$ et L_s la longueur caractéristique liée au "shear"

$$\frac{1}{L_s} = \frac{k'_{\parallel}}{k_n} = \frac{r(B_z B'_z - B_0 B'_z) - B_0 B_z}{r B^2}$$

or, on peut estimer $\langle k_{\parallel}^2 \rangle \longrightarrow \langle k_{\parallel}^2 \rangle = \int_{r_0 - \frac{\pi}{2kr}}^{r_0 + \frac{\pi}{2kr}} (r - r_0)^2 dr k'_{\parallel}^2 \left(\frac{k'_{\parallel}}{k_r} \right)^2$

ce qui donne pour limitation

$$\left(\alpha - \frac{V_{bi}}{V_{thi}} \right)^2 = \frac{V_{bi}^2 L_s^2}{V_{thi}^2} \left(Y^2 \frac{\omega_{ci}^2}{V_{thi}^2} - k_n^2 \right)$$

soit :

$$Y^2 \geq \left(\alpha - \frac{V_{bi}}{V_{thi}} \right)^2 \frac{4p^2}{L_s^2 (\nabla p)^2} \quad (20)$$

Ces deux limitations dues au "shear" joueront un rôle important dans la stabilisation des ondes quasi-electrostatiques (dont l'interchange) : ce n'est pas la perturbation du champ magnétique qui jouera le rôle stabilisateur mais le court-circuit thermique des ondes rendu possible par la mobilité des particules le long des lignes de champ magnétique ou perpendiculairement, il faudra néanmoins un "shear" important pour réaliser la stabilisation complète.

c) Description des divers abaques

Les divers abaques présentés seront construits en prenant α et β comme coordonnées et Y, Z et T comme paramètres. On se contentera de prendre $\alpha > 0$ étant donné la symétrie par rapport à l'origine, à condition de remplacer, dans les formules donnant α et β , V_{bi} par ϵV_{bi} , ϵ valant ± 1 .

Lorsque Z ou Y sera nul, il ne restera dans les abaques que la branche fondamentale (couplage entre le fondamental des ions et des électrons) dépendant du seul paramètre T . On voit (figure 1) l'influence de ce rapport de température sur la stabilité (augmentation ou diminution suivant les zones). On remarquera que la zone instable est située dans les quadrants $\alpha \beta > 0$ (un plasma homogène sans courant est représenté par l'origine et l'on peut déterminer par continuité quelles sont les zones stables).

Pour ces valeurs de Z ou Y il n'y a pas d'instabilité dans la zone du type puits, mais un courant assez faible, parallèle au champ magnétique, risque de provoquer l'apparition de celles-ci si $|V_{bi}/V_{at}| \ll 1$. Une constatation générale est la disparition des instabilités en l'absence de courant parallèle si $|V_{bi}/V_{at}| > 1$ au moins pour $T_e = T_i$.

La présence des rayons de Larmor finis modifie les courbes précédentes (fondamentales) en stabilisant $\alpha \beta > 0$ mais en faisant apparaître des domaines d'instabilité dans la zone des puits magnétiques, domaines limités par une droite parallèle à la seconde bissectrice (pour $T = 1$) (figure 2). La diminution de T (température électronique) entraîne une diminution du domaine instable pour le fondamental. La présence d'harmonique donnera des abaques du même genre décalés de part et d'autre du fondamental ; on remarquera que les harmoniques ne changent pas de manière appréciable les résultats obtenus avec le fondamental, sauf peut-être dans le cas des instabilités "double-faisceau" où la présence d'harmoniques peut donner des limites inférieures au fondamental (figure 3). Mais, pour V_{bi} et V_{at} petits, compte-tenu des limitations imposées sur Z , on rencontrera en général les divers harmoniques dans l'ordre et le fondamental jouera le rôle dominant.

On voit, sur la figure 4, une évaluation du "shear" nécessaire à la stabilisation lorsque les courants parallèles restent faibles.

Le "shear" correspondant est tel que :

$$\frac{L_s \nabla p}{p} < 8 \quad (21)$$

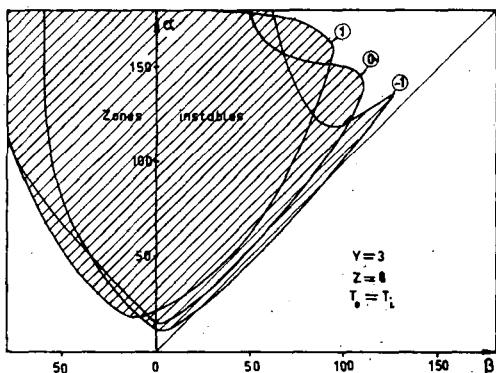


FIG. 3. Nouvelles zones d'instabilités créées par la présence de la fréquence cyclotronique.

On remarquera que celles-ci ($\iota = -1$ et $\iota = 1$) recouvrent en majeure partie la zone fondamentale ($\iota = 0$). Il en est en général ainsi pour la partie utile de ces domaines (limitation sur Z); les harmoniques supérieurs ($\iota = 2$, $\iota = -2$, etc.) se comportent de façon analogue. On peut avoir des diagrammes plus complexes que le précédent diagramme où il existe des échanges de limite de stabilité entre les divers harmoniques; mais en général le domaine instable reste intérieur au domaine fondamental pour les grandes valeurs de Z . Il s'ensuit que si l'on stabilise par rapport au fondamental on sera en général stable par rapport aux harmoniques.

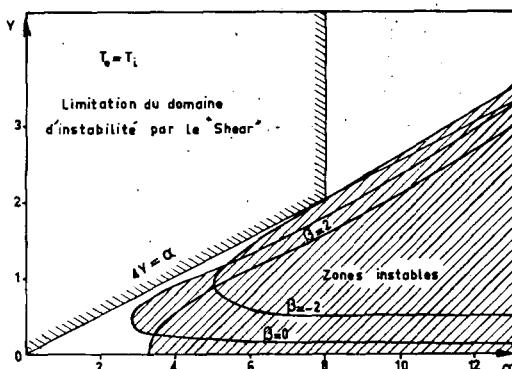


FIG. 4. Effet stabilisant du shear.

La présence du shear limite le domaine possible des instabilités. Sur ce diagramme on donne la limitation permettant d'obtenir un plasma stable marginal (inéquation 20).

où L_s est la variation caractéristique du rayon entraînant une variation relative du pas des lignes de champ de l'ordre de l'unité. En combinant (21) avec la valeur de L_s obtenue en prenant le champ dans le vide d'une configuration du type "hard-core", on obtient pour la pression d'un plasma stable :

$$p = p_0 \exp\left(\gamma \operatorname{Arctg} \frac{B_z}{B_0}\right)$$

γ étant un coefficient de module inférieur à 16.

On en déduit qu'il existe un rapport maximum de p_M/p_0 (≈ 20.000 pour une telle configuration où p_M est la pression maximale du plasma et p_0 la pression à la paroi). Mais un tel maximum entraîne un très grand rapport entre le

rayon du conducteur central et celui de l'enceinte. (Pour un rapport de l'ordre de 7 on doit s'attendre à $P_{\text{M}}/P \sim 100$). De plus un courant parallèle de l'ordre de la vitesse thermique augmente sensiblement le "shear" nécessaire jusqu'à rendre tout confinement impossible.

CONCLUSION

Dans cette étude de l'influence des courants sur la stabilité, courant nécessaire par le confinement entre autre, on a pu montrer certaines caractéristiques des ondes instables (vitesse de phase comprise entre les vitesses macroscopiques) et la réalité des instabilités de courant (tearing mode).

L'étude détaillée des ondes quasi-électrostatiques indique l'obligation d'utiliser un fort "shear", associé aux effets de rayon de Larmor fini, pour stabiliser aussi bien les configurations à bonne courbure qu'à mauvaise courbure, lorsque le confinement magnétique est dominant:

$$\left(\left| \frac{V_{D\parallel}}{V_{n\parallel}} \right| < 1 \right). \quad \text{De toute manière une diminution du rapport courant sur densité entraîne une amélioration de la stabilité.}$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

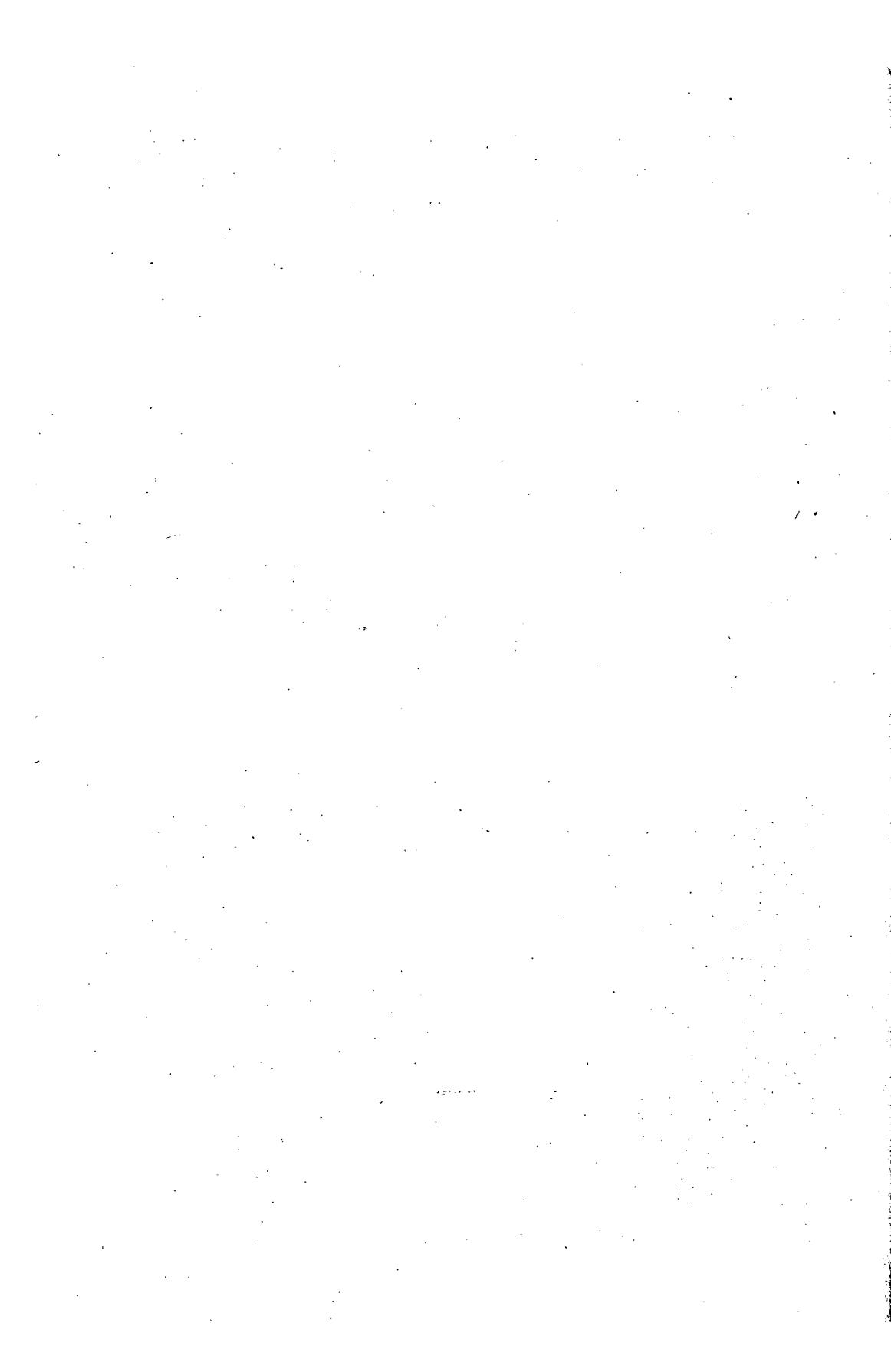
- / 1/ - MIKHAILOVSKAYA, L.V., MIKHAILOVSKY, A.B., Nuclear Fusion (1963)
- / 2/ - REBUT, P.H., Comptes Rendus Acad. Sc. de Paris, 260 (1965), 2150
- / 3/ - REBUT, P.H., Comptes Rendus Acad. Sc. de Paris, 260 (1965), 1882
- / 4/ - BERNSTEIN, I.B., Physical Review, 109 (1958), 1
- / 5/ - KRALL, N.A., ROSENBLUTH, M.V., Physics of Fluids 5, 11 (1962), 1435
- / 6/ - PENROSE, P., Physics of Fluids 3, 2 (1960), 258
- / 7/ - DREICER, H., Culham Laboratory Study Group of Plasma Waves (1965)
- / 8/ - ROSENBLUTH, M.N., American Physical Society New York (1964)
- / 9/ - LAVAL, G., PELLAT, R., Comptes Rendus Acad. Sc. de Paris, 259 (1964), 1706
- /10/ - REBUT, P.H., J. of Nuclear Energy, Part C 4 (1962), 159

DISCUSSION

B. COPPI: It is not clear to me how you treated the space dependence of the perturbed potential in the orbit integral and what values of β (the ratio of plasma pressure to magnetic pressure) you considered.

P. H. REBUT: The spatial dependence of the perturbed fields is treated in the following manner: $X(r') = \exp(r' - r) \partial X(r) / \partial r$. The integral contains

a time-dependent r' , but for the numerical calculations presented in the paper $\partial/\partial r$ has been assumed constant, and the estimate of the required amount of shear is therefore crude and no doubt pessimistic. The value of β has not been discussed, but the "quasi-electrostatic" approximation is certainly valid for low values of β .



DRIFT INSTABILITIES AND ELECTRON CYCLOTRON OSCILLATIONS FOR ARBITRARY PLASMA PRESSURE

N.A. KRALL AND L.D. PEARLSTEIN
GENERAL ATOMIC DIVISION, GENERAL DYNAMICS CORPORATION,
SAN DIEGO, CALIF., UNITED STATES OF AMERICA

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

DRIFT INSTABILITIES AND ELECTRON CYCLOTRON OSCILLATIONS FOR ARBITRARY PLASMA PRESSURE. Most of the familiar drift instabilities (flute, universal, etc.) were calculated in the limit $\beta = (\text{plasma pressure})/(\text{magnetic pressure}) = 0$. In this limit the perturbed electric field is electrostatic, and the Vlasov equation is remarkably simplified. The β limit for validity of the electrostatic approximation depends on the particular mode considered and many present experiments fall outside the range. Two well-known low frequency drift instabilities are examined at arbitrary β ; the zero- β régime is determined and stability criteria for larger values of β are derived. In addition, the influence of finite β on radiation at the electron cyclotron harmonics is examined. The finite Larmor radius (R) flute instability driven by mirror type curvature of the magnetic field is considered first. The lowest order's ominously large contribution, inversely proportional to R^2 , cancels to all orders of β . The leading terms are then independent of R , and are included in the eigenvalue problem; stability criteria are obtained for various ranges of β . Next the universal instability, $\tilde{E} = \text{Perturbed} = \tilde{E}(\exp ik_L r_L)(\exp ik_{||} r_{||})$, in a uniform magnetic field $\tilde{B} = B_0 \hat{r}_{||}$ is considered, with field curvature simulated by a fictitious gravity. Here the zero- β limit is dependent upon wavelengths. If $\beta < (\text{electron mass})/(\text{ion mass})$, or if $\beta < (k_{||} r_p)^2$ where r_p = plasma radius and $1/k_{||} \geq$ plasma length, the zero- β limit obtains. Since the instability only exists for $(k_{||} r_p)^2 < 0.01$, a modest plasma pressure violates the zero- β limit. The eigenvalue for $\beta > (k_{||} r_p)^2$ is calculated and conditions for cusp stabilization as well as mirror destabilization are obtained. The dominant high frequency non-relativistic modes of the stable zero- β plasma are longitudinal waves at electron gyrofrequency harmonics. If excited these modes can radiate only if coupled to transverse waves; in zero- β this coupling occurs at a surface or at a local inhomogeneity. Since a prominent effect of finite β is to couple longitudinal and transverse waves, the spectrum and coupling of electron cyclotron oscillations is calculated for arbitrary β .

INSTABILITÉS DE DERIVE ET OSCILLATIONS CYCLOTRONIQUES DES ÉLECTRONS POUR DES PRESSIONS DE PLASMA ARBITRAIRES. La plupart des instabilités de dérive connues (instabilités en cannelures, instabilités universelles, etc.) ont été calculées à la limite où $\beta = (\text{pression de plasma})/(\text{pression magnétique}) = 0$. A cette limite, le champ électrique perturbé est de nature électrostatique, et l'équation de Vlasov est remarquablement simplifiée. L'autre valeur limite de β en-deçà de laquelle l'approximation électrostatique est valable dépend du mode particulier considéré et dans beaucoup d'expériences faites à l'heure actuelle, β tombe en dehors de cet intervalle. Les auteurs étudient deux instabilités de dérive à basse fréquence bien connues pour des valeurs arbitraires de β ; ils établissent le régime pour $\beta = 0$ et déduisent des critères de stabilité pour des valeurs de β plus élevées. De plus, ils étudient l'influence de valeurs finies de β sur le rayonnement dont les fréquences sont des harmoniques de la fréquence cyclotronique des électrons. La première de ces instabilités est l'instabilité en cannelures à rayon de Larmor fini provoquée par la courbure de type miroir du champ magnétique. L'importante contribution défavorable de l'ordre le plus bas, inversement proportionnelle à R^2 , s'annule pour tous les ordres de β . Les termes prédominants ne dépendent plus de R et sont inclus dans le problème de valeur propre; les auteurs déduisent des critères de stabilité pour différents intervalles de valeur de β . La seconde instabilité est l'instabilité universelle $\tilde{E}(\text{perturbé}) = \tilde{E}(\exp ik_L r_L)(\exp ik_{||} r_{||})$ dans un champ magnétique uniforme $\tilde{B} = B_0 \hat{r}_{||}$, la courbure de champ étant simulée par une force de gravitation fictive. Dans ce cas, la limite correspondant à $\beta = 0$ dépend des longueurs d'onde. Si $\beta < (\text{masse électronique})/(\text{masse ionique})$, ou si $\beta < (k_{||} r_p)^2$ où r_p est le rayon de plasma et $1/k_{||} \geq$ la longueur de plasma, la limite $\beta = 0$ reste valable. Comme l'instabilité n'existe que pour $(k_{||} r_p)^2 < 0.01$, il suffit d'une faible pression du plasma pour que la limite $\beta = 0$ ne soit plus respectée. Les auteurs calculent la valeur propre pour $\beta > (k_{||} r_p)^2$ et ils déterminent les conditions permettant de réaliser une stabilisation par configuration cuspidée ainsi qu'une suppression de la stabilité par miroir. Les modes non relativistes à haute fréquence dominants du plasma stable

pour lequel $\beta = 0$ sont des ondes longitudinales ayant pour fréquences des harmoniques de la gyrofréquence des électrons. Lorsque ces modes sont excités ils ne peuvent rayonner que dans le cas où ils sont couplés à des ondes transversales; pour $\beta = 0$, ce couplage se produit à la surface où à l'endroit d'une inhomogénéité. Comme des valeurs finies de β ont pour effet de coupler des ondes longitudinales à des transversales, les auteurs calculent le spectre ainsi que le couplage d'oscillations cyclotroniques des électrons pour des valeurs de β arbitraires.

ДРЕЙФОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ЭЛЕКТРОННО-ЦИКЛОТРОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ДАВЛЕНИИ ПЛАЗМЫ. Большая часть известных дрейфовых неустойчивостей (желобковая, универсальная и т. д.) была рассчитана в пределе $\beta = (\text{плазменное давление})/(\text{магнитное давление}) = 0$. В этом пределе возмущенное электрическое поле является электростатическим и уравнение Власова максимально упрощено. Предельное β , при котором еще справедливо электростатическое приближение, зависит от рассматриваемой формулы колебаний, и многие современные эксперименты выходят за этот диапазон. Два хорошо известных низкочастотных вида дрейфовых неустойчивостей исследуются при произвольном β ; определяется режим нулевого β , и выводятся критерии устойчивости для больших значений β . Кроме того, исследуется влияние конечного β на изучение на электронно-циклотронной гармонике. Вначале рассматривается желобковая неустойчивость с конечным ларморовским радиусом (R), вызываемая кривизной магнитного поля зеркала. Пугающие большие члены самых низких порядков, обратно пропорциональные R^2 , сокращаются во всех порядках по β . Главные члены затем не зависят от R и включаются в задачу о собственных значениях; получаются критерии устойчивости для различных диапазонов β . Далее рассматривается универсальная неустойчивость \tilde{E} (возмущенное) = $\tilde{E}(\exp ik_{\perp}r_{\perp})(\exp ik_{\parallel}r_{\parallel})$ в однородном магнитном поле $\vec{B} = B_0 \hat{i}_{\parallel}$ с кривизной поля, имитированной фiktивной силой тяжести. В этом случае предел нулевого β зависит от длины волн. Если $\beta < (\text{масса электрона})/(\text{масса иона})$ или если $\beta < (k_{\parallel} r_p)^2$, где r_p — радиус плазмы и $1/k_{\parallel} \geq$ длина плазмы, то получают предел нулевого β . Поскольку неустойчивость существует только для $(k_{\parallel} r_p)^2 < 0,01$, умеренное давление плазмы нарушает предел нулевого β . Рассчитано собственное значение для $\beta > (k_{\parallel} r_p)^2$ и получены условия для стабилизации в остроконечной геометрии зеркальной неустойчивости. Преобладающие высокочастотные нерелятивистские колебания устойчивой плазмы с нулевым β являются продольными волнами при электронной гиростатичной гармонике. В случае возбуждения этих колебаний, они могут распространяться только тогда, когда связаны с поперечными волнами; при нулевом β эта связь происходит на поверхности или в локальной неоднородности. Поскольку значительное влияние конечного β должно соединять продольные и поперечные волны, то спектр и связь электронно-циклотронных колебаний рассчитываются при произвольном β .

INESTABILIDADES DE DERIVA Y OSCILACIONES CICLOTRONICAS DE LOS ELECTRÓNESES EN UN PLASMA DE PRESIÓN ARBITRARIA. La mayoría de las inestabilidades de deriva conocidas (en estrías, universales, etc.) han sido calculadas en el límite en que $\beta = (\text{presión del plasma})/(\text{presión magnética}) = 0$. En este límite, el campo eléctrico perturbado es de índole electrostática y la ecuación de Vlasov se simplifica notablemente. El valor límite de β más allá del cual la aproximación electrostática es aplicable depende del modo particular que se considere, y muchos de los experimentos actuales caen fuera del intervalo de validez. Los autores examinan dos inestabilidades de deriva, bien conocidas, de baja frecuencia, con un valor de β arbitrario; establecen el régimen para $\beta = 0$ y deducen criterios de estabilidad para valores de β más elevados. Además, examinan la influencia de un valor finito de β sobre la radiación cuyas frecuencias son armónicos de la frecuencia ciclotrónica de los electrones. En primer lugar consideran la inestabilidad en estrías de radio de Larmor (R) finito, provocada por una curvatura del tipo de espejo, del campo magnético. La considerable contribución desfavorable del orden más bajo, inversamente proporcional a R^2 , se anula para todos los órdenes de β . En esas condiciones, los términos predominantes son independientes de R y se incluyen en el problema de valores propios; los autores deducen criterios de estabilidad para varios intervalos de β . A continuación se considera la inestabilidad universal $\tilde{E}(\text{perturbado}) = \tilde{E}(\exp ik_{\perp}r_{\perp})(\exp ik_{\parallel}r_{\parallel})$ en un campo magnético uniforme $B = B_0 \hat{i}_{\parallel}$, habiéndose simulado la curvatura del campo de una fuerza de gravedad ficticia. En este caso, el límite para $\beta = 0$ depende de las longitudes de onda. Si $\beta < (\text{masa electrónica})/(\text{masa iónica})$, o si $\beta < (k_{\parallel} r_p)^2$ en donde r_p = radio del plasma y $1/k_{\parallel} \geq$ longitud del plasma, ese límite conserva su validez. Puesto que la inestabilidad existe únicamente para $(k_{\parallel} r_p)^2 < 0,01$, no se cumple el límite para $\beta = 0$ si la presión del plasma es pequeña. Los autores calculan el valor propio para $\beta > (k_{\parallel} r_p)^2$ y obtienen las condiciones para la estabilización cuspidal, así como la supresión de la estabilización mediante espejos. Los modos no relativistas de alta frecuencia dominante del plasma estable para el cual $\beta = 0$ son ondas longitudinales cuya frecuencia corresponde a armónicos de la girofrecuencia de los electrones. Si estos modos están excitados sólo

pueden radiar si están acoplados a ondas transversales; con $\beta = 0$ este acoplamiento se produce en la superficie o en una inhomogeneidad local. Puesto que un efecto notable de β finito es el de acoplar ondas longitudinales y transversales, los autores calculan el espectro y el acoplamiento de oscilaciones ciclotrónicas de los electrones para valores de β arbitrarios.

1. INTRODUCTION

Most of the familiar drift instabilities (interchange, universal, etc.) [1-5] were calculated in the limit $\beta = \text{plasma pressure/magnetic pressure} = 0$. In this limit the unstable modes are electrostatic, and the Vlasov equation is remarkably simplified. The β limit for validity of the electrostatic approximation depends on the particular mode considered, and many present experiments fall outside the range. We examine two well known low frequency instabilities, with β finite, and determine both the range of the zero β approximation and the stability criteria for general values of β . In addition we calculate the influence of finite β on electron cyclotron harmonic waves.

In Section 2 we consider the finite Larmor radius (R_L) flute, or interchange, instability [1-3]. It is shown that the ominously large lowest order contribution, inversely proportional to R_L^2 , cancels to all orders of β . The remaining terms prove to be stabilizing. We treat this problem by an equation involving only macroscopic quantities, density, pressure, β , etc.; this equation evolves from the Vlasov equation when we introduce the ordering scheme appropriate to the flute mode ($\omega/\Omega \sim k^2 R_L^2 \ll 1$, $\beta \sim 1$), and allows a variational treatment of the stability problem. It also allows us to treat large $\beta < 1/k^2 R_L^2$.

In Section 3 we examine the universal instability [4,5] $\vec{E}_1 = \vec{E} \exp(iky) \exp(ikz)$ in a linear magnetic field $B_z(x)$. This mode can be stabilized by several mechanisms in zero β [5]. One significant effect, stabilization by a strong magnetic cusp, is shown to be unaffected by finite β considerations. Another effect, finite length stabilization, is shown to be enhanced by finite β , allowing longer stable machines.

In Section 4 we study the high frequency mode structure of an infinite uniform plasma in a magnetic field. We show that in addition to the familiar longitudinal Bernstein mode [6], transverse and mixed waves exist at electron cyclotron harmonic frequencies. We calculate the absorption coefficients and show that the transverse and mixed waves can be excited to the black body level if β is finite. Like the Bernstein modes, these waves require a coupling mechanism in order to radiate out of the plasma. They also require frequencies below the plasma frequency and could be of interest in connection with experiments which observe intense radiation at cyclotron harmonics [7,8].

2. THE FINITE β FLUTE INSTABILITY

In the earliest investigation of the interchange mode the Vlasov equation was solved by direct integration over the unperturbed orbits [1]; in the later calculations the solution was obtained using an expansion technique in which the ion Larmor radius (R_I) was assumed small compared to a characteristic length (L) in the plasma [2,3]. In the method of Rosenbluth and Simon [3] it is necessary to order, from the beginning, all quantities in terms of a smallness parameter; the ordering presupposes knowledge of the solution [1]. However, in contrast to the method of direct integration it is then practical to solve problems of considerable complexity.

We use this ordering technique [3] to write down a closed set of equations to first order in the perturbation which enables us to incorporate β to all orders. Curvature is represented by an effective gravity (g). The geometry is one-dimensional, i.e., no quantities vary in the direction of a one-dimensional magnetic field B and all unperturbed quantities vary only in the direction of gravity

perpendicular to \mathbf{B} . The appropriate ordering [1-3] in terms of the smallness parameter $\epsilon = R_1/L = 1/\Omega_1 L \sqrt{2\alpha_1}$ is

$$\frac{\omega}{\Omega_1} \sim \frac{cE}{LB\Omega_1} \sim \frac{R_1^2}{L} \frac{VB}{B} \sim \sqrt{\frac{g}{\epsilon^2}} \sim \epsilon^2; \quad \beta \sim \epsilon^0$$

with Ω the cyclotron frequency, B the magnetic field, E the electric field, ω the eigenfrequency, and L the system size.

The first effect of finite β is to produce an apparent charge separation in lowest order due to the ∇B drift. However, this large effect cancels to all orders in β , leading to a theory which depends only upon the macroscopic plasma properties. We examine herein the cylindrical case and demonstrate by a variational technique that in general finite β is stabilizing.

Since the method employed follows that of Ref. [3] we shall, wherever convenient, use their notation. Our starting point is the Vlasov equation written in a frame moving with the drift velocity, with equilibrium fields and gravity varying only radially.

$$\vec{v} = \frac{\vec{G} \times \vec{\Omega}}{\Omega^2}, \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}, \quad \vec{E}_0 = E_0(r) \hat{i}_z \quad (2.1)$$

$$D_t f + \vec{v}' \cdot \nabla f + [\vec{v}' \times \vec{\Omega} - D_t \vec{v} - (\vec{v}' \cdot \nabla) \vec{v}] \cdot \nabla_v f = 0 \quad (2.2)$$

where

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \quad (2.3)$$

and \vec{G} represents the acceleration arising from all forces save the Lorentz force. Note that \vec{v} has no component in the direction of \vec{E} . If we now convert to polar coordinates in velocity space and define

$$\partial^\pm = \frac{\partial}{\partial x} \pm i \frac{\partial}{\partial y} = e^{\pm i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} \pm i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (2.4)$$

with similar definitions for all other vectors we can, by substituting

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=-n}^n \epsilon^n e^{iq\theta} f_{n,q} \quad (2.5)$$

into the Vlasov equation obtain a formal solution by equating coefficients. We then have to lowest order

$$\epsilon f_{1,1} = -\frac{1}{2\Omega} v \partial^- f_0$$

$$2D_t f_0 + \epsilon v(\partial^+ f_{1,1} + \partial^- f_{1,-1}) - v(\nabla \cdot \vec{v}) \frac{\partial f_0}{\partial v} \quad (2.6)$$

This equation along with the next order equation coupled with Maxwell's equations

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \sum_e \int v dv [f_0 + \epsilon^2 f_{2,0}] \quad (2.7)$$

$$\left[c \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]^\pm = 4\pi \sum e \int v dv \left\{ \pm \left[f_0 + \epsilon^2 f_{2,0} \right] + v \left[\epsilon f_{1,\mp 1} + \epsilon^3 f_{3,\mp 1} \right] \right\} \quad (2.8)$$

$$c \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \nabla \times \vec{E} \quad (2.9)$$

completely determine the solutions. If we now substitute Eq. (2.6) into Eqs. (2.7) and (2.8) we obtain, to lowest order, the equilibrium condition ($p = \int v dv v^2 M_f / 2$)

$$B \frac{\partial B}{\partial r} + 4\pi \sum \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (2.10)$$

and with the perturbations f' , E' , $B' \sim e^{i\omega t} e^{im\theta} f(r)$ we obtain, to lowest order for the perturbed distribution function with $\eta = (\partial B / \partial r) / B$

$$f' = - \frac{1}{\bar{\omega} + mV_D/r} \frac{\nabla \cdot \vec{V}'}{\eta} \left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{1}{\omega \eta} \frac{c(\nabla \times \vec{E}')_z}{B} \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (2.11)$$

and for both the perturbed Maxwell's equations

$$0 = \nabla \cdot \vec{V}' \sum e \int \frac{vdv}{\bar{\omega} + mV_D/r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial v} \right). \quad (2.12)$$

In the above equations primed terms refer to perturbed quantities and the sum is over species. To arrive at these results we have assumed that the Debye length is of the same order in ϵ as is the Larmor radius; hence terms like $v \cdot \vec{E}'$ are of higher order. Also note that \vec{V}' does not contain the gravitational drift to this order. In addition we have used the following definitions

$$\bar{\omega} = \omega - mcE/rB, \quad V_D = (\partial B / \partial r) / 2mcB. \quad (2.13)$$

We immediately see that the r.h.s. of Eq. (2.12) is the perturbed charge separation due to the ∇B drift which vanishes to lowest order in ϵ . Consequently, we must conclude that either the integral must vanish (which gives rise to a universal instability generated by a temperature gradient [9]) or $\nabla \cdot \vec{V}'$ must vanish producing the flute mode with the polarization.

$$\frac{c}{B} (\nabla \times \vec{E}')_z = \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\omega}{\bar{\omega}} \frac{cE'}{B} \Theta + \Phi'(\epsilon^2). \quad (2.14)$$

Now, when this polarization relation is substituted into the next contributing order and $\Phi'(\epsilon^2)$ is eliminated from the lowest order equations (it of course does not occur in the higher order equations) by taking a suitable linear combination of Eqs. (2.7) and (2.8) we obtain

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r^3 T_0 \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \left[(1-m^2) T_0 + m^2 g \rho' + r \omega^2 \frac{\partial}{\partial r} \rho (1+b^2) \right] \Psi = 0 \quad (2.15)$$

where

$$\begin{aligned} b^2 &= B^2/4\pi pc^2, & \eta = (\partial B/\partial r)/B, & \psi = cE_0'/B\bar{\omega}, & 8R = \int M v^4 f \, dv \\ T &= \bar{\omega}^2(1+b^2) + m\bar{\omega} \left[T_B + \frac{\partial p}{\partial r} \right] / \Omega r p + m^2 \eta (\partial R/\partial r) / r^2 \Omega^2 p. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Again, all quantities refer to ion parameters. Finally, if we assume the plasma is isothermal with equal ion and electron temperatures we have

$$\begin{aligned} T &= \left[\bar{\omega} - \frac{mV_c}{2} (1-\beta)/r \right]^2 - \left[\frac{mV_c}{2} (1+\beta)/r \right]^2 \\ V_c &= -(\partial p/\partial r)/2\Omega r p, \quad \beta = 8\pi p/B^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

where for convenience we have dropped the b^2 term, a valid approximation for all but very low density plasmas. In determining stability behavior we shall work solely with this last form for T , Eq. (2.17).

As in Ref. [3] Eq. (2.15) can be obtained from a variational principle with the property that the eigenvalues are in general complex. This variational principle is expressed for general equilibrium in Eqs. (2.25) - (2.27). In general we can only extract from this a sufficient condition for stability. However, as in Ref. [3], there is a special equilibrium $E(\rho)$ in which there is a minimal expression for $\bar{\omega}^2$. It can be shown, as in Ref. [3], that varying $E(\rho)$ away from the special equilibrium is destabilizing.

The variational principle allows us to make stability statements when β , p , B , and E are general functions of positions, and can be used to analyze quite realistic physical situations. In this work we are concerned only with the stability behavior arising from a variation of β . There are two useful approaches. We can find corrections to calculations [1-3] which assume a ρ , B , E and ignore the β contributions implied by p and B , or we can calculate the stability consistently with finite $\beta(r)$, and ask whether an increase in β (which changes p , B , etc.) is stabilizing. To distinguish β effects uniquely in the latter case is difficult; we attempt this by varying β with ρ'/ρ fixed, and taking first $E(\rho)$ given by the special equilibrium and later $E = 0$ independent of β .

We consider first the special equilibrium

$$cE/B = -\frac{c}{2}(1-\beta) \quad (2.18)$$

from which we obtain after multiplying by $r\psi$ and integrating

$$\frac{\omega^2}{m^2} = \frac{1}{4} \int dr r p \left[V_c (1+\beta) \right]^2 \Lambda^2 + \int dr r g \frac{\partial \beta}{\partial r} \psi^2 - \int dr r^3 p \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r} \right)^2 + \frac{m^2 \psi^2}{r^2} \right] \quad (2.19)$$

where

$$\Lambda^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \frac{\psi^2 (m^2 - 1)}{r^2} \quad (2.20)$$

As in Ref. [3], with $g = 0$, $\omega^2 = 0$ is a solution for $m = 1$. This is seen by choosing as a trial function ψ constant everywhere except at the boundary;

thus the numerator can be as small as desired. Consequently there is no stabilization for the $m = 1$ mode even for general β .

To obtain the behavior of a variation of β which maintains the special equilibrium we write

$$\rho = K \rho_0(x). \quad (2.21)$$

This form allows us to change β without altering the plasma profile ρ'/ρ , by changing K , since

$$\delta\beta = \beta(1+2\beta) \frac{\delta K}{K}. \quad (2.22)$$

To obtain Eq. (2.22) we have used the pressure balance equation which leads to

$$(B/B_0)^2 = (1+2\beta)^{-1}. \quad (2.23)$$

with B_0 the value of B at the boundary. If we now assume that we have marginal stability for $\delta K = 0$, we may solve for $\delta\omega^2$ to order δK by varying the equilibrium only, since $\delta\omega^2/\delta\psi = 0$, and obtain

$$\delta\omega^2 \sim \frac{\delta K}{K} \int dr r \rho \Lambda^2 V_c^2 \beta (6\beta^2 + 10\beta + 4). \quad (2.24)$$

Hence increasing β stabilizes.

For a general equilibrium the variational principle is

$$\frac{\delta\omega}{\delta\psi} = \frac{\delta\omega}{\delta\psi^*} = 0 \quad (2.25)$$

with

$$\omega = (-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC})/2A \quad (2.26)$$

and

$$\begin{aligned} A &= - \int dr \rho r^3 \Lambda^2 + \int dr r^2 (\partial\rho/\partial r) |\psi|^2 \\ B &= 2 \int dr \rho m^2 r^2 \Lambda^2 \left[cE/B + \frac{1}{2} V_c (1-\beta) \right] \\ C &= - \int dr m^2 \rho r \Lambda^2 \left[(cE/B + V_c)(cE/B - V_c \beta) \right] + \\ &\quad + \int m^2 gr \frac{\partial\rho}{\partial r} |\psi|^2 dr \end{aligned} \quad (2.27)$$

where Λ^2 is defined as in Eq. (2.20) except now absolute values are implied.

We next consider the influence of finite β on the stability for the case in which ϕ is gaussian, $g = 0$, and (i) $E \sim r$, (ii) $u = -cE/B - V_c \sim r$ (uniform rotation). Note that for $B = \text{constant}$ these two conditions are equivalent and the problem reduces to a well known calculation [1]. To proceed, we have as a sufficient condition for stability $B^2 - 4AC \geq 0$. We assume that for $\beta = 0$ the system is at marginal stability and compute the correction to first order in β . We thus have for case (i) with

$$\bar{\alpha} = - \int d\varrho' r^2 \psi'^2 / \int d\varrho r^3 \Lambda^2 > 0$$

$$\bar{\beta} = \int d\varrho r^3 \beta \Lambda^2 / \int d\varrho r^3 \Lambda^2 > 0 \quad (2.28)$$

the condition for stability

$$\left[(V_c/2r)^2 + \bar{\alpha} c E / r^2 B \right] + \bar{\beta} \left[(V_c/r)^2 - \bar{\alpha} (3uV_c + 2u^2)/r^2 \right] > 0 \quad (2.29)$$

All parameters occurring are to be taken in the $\beta = 0$ limit. The first square bracket vanishes by the assumption of marginal stability in the $\beta = 0$ limit. If we now substitute this result into the remaining term we obtain from Eq. (2.29)

$$(V_c)^2/8 \bar{\beta} \left[\frac{1}{\bar{\alpha}} + 1 \pm \sqrt{\frac{1}{\bar{\alpha}} + 1} \right] > 0 \quad (2.30)$$

for stability, which is automatically satisfied. Thus we see β stabilizes; the $\beta = 0$ stability criterion is pessimistic [1]. For case (ii) we obtain twice the result of Eq. (2.30).

If we perform the analogous calculation for linear geometry where we assume all quantities depart from uniformity by a slow linear term we obtain the finite β correction to another well known result [1]. Our β modified stability criteria is

$$(1+2\beta)(kV_c)^2 \geq -4kg(\partial p/\partial x)/p \quad (2.31)$$

and again β is stabilizing.

Finally we examine the effect of varying p subject to Eq. (2.21) with $E = 0$ and obtain after some algebra the condition for stability

$$\frac{8K}{r} \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{\beta^2 V_c}{r} \right) \left(\frac{\beta V_c}{r} \right) + \frac{3}{2} \left[\frac{\beta^2 V_c^2}{r^2} - \left(\frac{\beta^2 V_c}{r} \right) \frac{V_c}{r} \right] + \left[\frac{5}{2} \beta^2 + \beta \right] \frac{V_c^2}{r^2} + \alpha \frac{\beta(1+4\beta)V_c^2}{r^2} \right\} \geq 0 \quad (2.32)$$

In Eq. (2.32) we have used the definition

$$\bar{F} = \int d\varrho r^3 \Lambda^2 f / \int d\varrho r^3 \Lambda^2 \quad (2.33)$$

and in addition we have used Eq. (2.28) for $\bar{\alpha}$. We immediately see that if ρ' is negative the first term and the last term in Eq. (2.32) are positive and by the Schwartz inequality the contents of the square bracket are positive. Hence, if $8K$ and thus $\delta\beta$ are positive, we have stability.

Our results can be summarized as follows:

- 1) The special equilibrium is the most stable for a given plasma profile provided $\rho' < 0$;
- 2) Increasing β and holding E fixed within the special equilibrium or setting $E = 0$ for a general equilibrium is stabilizing provided the density ρ is varied with a fixed ρ'/ρ ;
- 3) The $\beta = 0$ stability criteria are pessimistic since the lowest order β corrections are stabilizing.

3. UNIVERSAL INSTABILITY

One low frequency instability of an inhomogeneous collisionless plasma in a magnetic field $B_2(x)$ is a nearly electrostatic wave ($E_1 \sim e^{iky} e^{i\omega t}$, $k \gg K$) with group velocity parallel to particle drifts and phase velocity parallel to B_2 . This instability was calculated for a simple equilibrium (density and temperature gradients only) [4] with arbitrary β ; in a zero β calculation [5] it was shown that the mode could be stabilized by more complex equilibria, where the effects of finite length, magnetic cusp curvature, shear, cold plasma, etc., were included. Here we examine the influence of finite β on finite length and magnetic cusp stabilization.

We simplify the calculation by assuming a linear plasma $f_0 = n \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\alpha x^2 + 2\alpha gx} \times [1 - \epsilon'(x+v_y/\Omega)]$, $B_0 = B_0 \hat{z}(1+\epsilon x)$, simulate curvature by gravity $g = -v_{\text{thermal}}^2/R_c$, and use a local approximation to evaluate the final equations at $x = 0$ [4,5]. The perturbed electric field is $\vec{E} = -\nabla\phi + \vec{E}_z$, where E_z vanishes in zero β , and E_x is a correction smaller than E_z for this mode.

Previous work demonstrates that the maximum growth mode occurs for $1/K_M \sim R_p/\sqrt{\beta}$, or $1/K_M \sim R_p M/m$ the former when $\beta > m/M$, and R_p is the plasma radius. This worst mode can be eliminated by making the system short enough, $L < 1/K_M$. In fact all modes were shown in zero β [5] to require $1/K > 1/K_0 \sim 6R_p$, the finite length stabilization effect. We expect the same effect in finite β . Since we also expect to find stabilization for cusp curvature, we solve the case of marginal stability, $\text{Re } \omega \gg \text{Im } \omega$, calculate as in Ref. [5], using the Vlasov equation, solved by the method of characteristics, assume $\omega < K_V$, and arrive at the approximate dispersion relation including curvature and finite β

$$1 + \frac{T_1}{T_e} - I_0 e^{-b} (1+W)(1-\omega^X/\omega') = - \frac{\left\{ I_0 e^{-b} (\omega' - \omega^X) W + \frac{T_1}{T_e} \left[\omega' + \omega^X \frac{T_e}{T_1} - \frac{kV^2}{\Omega R_c} \left(1 + \frac{T_e}{T_1} \right) \right] \right\}^2}{K^2 V_A^2 k^2 R^2} \quad (3.1)$$

$$\text{Im } \omega = - \frac{i\sqrt{\pi}}{K V_e} \left[\omega' + \omega^X \frac{T_e}{T_1} - kV^2 \left(1 + \frac{T_e}{T_1} \right) / \Omega R_c \right] \left[A + B / K^2 V_A^2 K^2 R^2 \right] + i \text{ (Ion Terms)} \quad (3.2)$$

where all parameters except T_e , V_e refer to ions, I_0 is the modified Bessel function, $\omega' = \omega - kV^2/\Omega R_c$, $V_A = B/\sqrt{4\pi M}$, V = thermal velocity, $\omega^X = kR_i v_i d(\ln n/dx)$,

$b = k^2 R^2$, R = Larmor radius, $W = -(1/\sqrt{\pi}) \int x e^{-x^2} dx / (x + \omega'/K V_1 - i\epsilon)$. The

quantities A and B are positive real functions of the parameters, and the ion terms are stabilizing. Ref. [5] solved Eq. (3.1, 3.2) with $K^2 V_A^2 = K^2 V_i^2 / \beta \rightarrow \infty$. To see the finite length effect we solve Eq. (3.1) (with no curvature) for $\omega^X/\omega = (Kv/\omega) kR (d\ln n/dx)/K$, write $Kv/\omega \equiv 1/\lambda$,

$$kRI_0 e^{-b} \frac{1}{K} \frac{d\ln n}{dx} = - \left\{ 1 + \frac{T_1}{T_e} - I_0 e^{-b} (1+W) + \frac{\left[I_0 e^{-b} (\omega - \omega^X) W(\lambda) + \frac{T_1}{T_e} \left(\omega' + \omega^X \frac{T_e}{T_1} \right) \right]^2}{K^2 V_A^2 b} \right\} \frac{\lambda}{1+W(\lambda)} \quad (3.3)$$

Observing that $\lambda/(1+W(\lambda))$ has a minimum at $\lambda_0 \sim 1$ we conclude that there is a minimum value of $(d\ln n/dx)/K$ for this mode to exist. With $K^2 v_A^2 \gg \infty$ the minimum is that obtained in Ref. [5], $\pi/K > (20.6)(d\ln n/dx)^{-1}$, occurring for modes with $k^2 R^2 \gtrsim 1$, $W(\lambda) \sim 0$. Including the finite β effects the minimum is displaced and

$$L_{\text{stability}} < \pi/K_0 = 20.6 \left\{ \frac{1 + T_1/T_p}{2} + \frac{1}{2}(6.5)^2 \beta_1 \right\} R_p, \quad R_p \equiv (d\ln n/dx)^{-1} \quad (3.4)$$

We see that finite β permits longer stable machines and that the effect is enhanced by the factor $(d\ln n/dx)/K \sim 6.5$ for the shortest parallel wavelength mode.

The cusp stability criterion is apparent from Eq. (3.2). We note that ω'/ω^x and $k^2 v^2/R_c$ are the stabilizing terms. From Eq. (3.1) it can be seen that ω'/ω^x may be made small by choosing $kR \gg 1$; in addition the finite β corrections to (ω'/ω^x) are small. Then stability is achieved by taking $kv^2/\Omega R_c > \omega^x = (kv^2/2\alpha)(d\ln n/dx)$. From the form of Eq. (3.2) we see that this stabilization is unaltered by finite β corrections, since $(\omega' + \omega^x - kv^2/\Omega R_c)$ is a common factor of all destabilizing contributions.

We conclude that finite β increases the allowed length of a stable machine but does not alter the criteria for magnetic cusp stabilization.

4. ELECTRON CYCLOTRON HARMONIC OSCILLATIONS

Explanations of the features of observed radiation [7,8] at electron cyclotron harmonic frequencies (intensities flat over several harmonics, comparable to black body radiation at the plasma temperature) usually involve the Bernstein electrostatic mode [6]. In this paper we show that two other modes can exist at harmonic frequencies. One is purely transverse, the other half longitudinal, half transverse. We calculate, for the two new modes, the absorption length, indicative of the size of a plasma needed to excite these modes to black body level. This size is infinite for a $\beta = 0$ plasma, but is not unreasonably large for the values of β found in experiments. We simplify the problem by considering waves with k -vector nearly perpendicular to B .

Consider an infinite Maxwellian plasma in equilibrium with a uniform magnetic field $B_0 = B_0 \hat{z}$, and perturb it with a wave $E_x e^{iky} e^{i\Omega t}$, $K \ll k$, $\omega \sim -i\Omega = -ieB/mc$. Straightforward integration of the Vlasov equation gives the dispersion relations (for $K = 0$)

$$a_{11}E_x + a_{12}E_y = 0, \quad a_{21}E_x + a_{22}E_y = 0, \quad a_{33}E_z = 0 \quad (4.1)$$

$$a_{11} = (k^2 c^2 - \omega^2)/\omega_p^2 + (\ell^2 + 2b^2 - 2b^2 I_\ell'^2/I_\ell) x_\ell/b; \quad x_\ell \equiv \frac{I_\ell e^{-b}}{1 + \ell\Omega/\omega}$$

$$a_{22} = (\omega_p^2 + \Omega^2 - \omega^2)/\omega_p^2 (1 - \Omega^2/\omega^2) + (\omega^2/b\Omega^2) x_\ell \quad (4.2)$$

$$a_{12} = a_{21}^* = -i(\omega/\Omega) \left[1/\left(\frac{\omega^2}{\Omega^2} - 1\right) + \left(I_\ell'/I_\ell - 1 \right) x_\ell \right]$$

$$a_{33} = (k^2 c^2 - \omega^2)/\omega_p^2 + x_\ell \quad (4.3)$$

where $b = k^2 R_e^2/2$, I_ℓ is the Bessel function of imaginary argument, $I_\ell' = dI_\ell/db$, Ω and R_e are the electron gyration frequency and radius. The dispersion relation $a_{11}a_{22} = |a_{12}|^2$ can be solved in the limit $k^2 c^2 \gg \omega_p^2$, $x_\ell \ll b$, yielding the hybrid mode and the $\omega = kc$ mode. The limit $x_\ell \sim b$ yields the Bernstein mode, $\omega \sim -i\Omega$, $E_y = i(k^2 c^2/\omega_p^2)E_x$, while the limit $x_\ell \sim k^2 c^2/\omega_p^2 \gg 1$ gives the new modes

$$\omega_1 = -i\Omega - b I_\ell e^{-b} \frac{k\Omega\omega^2}{k^2 c^2} \left[1 + W\left(\frac{\omega + i\Omega}{Kv}\right) \right]; \quad E_y = -iE_x \quad (4.4)$$

$$\omega_2 = -i\Omega - \omega I_\ell e^{-b} \left(\frac{\omega^2}{\omega_p^2} / k^2 c^2 \right) \left[2 \left(\frac{\omega + i\Omega}{Kv} \right)^2 W\left(\frac{\omega + i\Omega}{Kv}\right) \right]; \quad E_z = E_z \quad (4.5)$$

Equation (4.4) is the solution to $a_{11}a_{22} = |a_{12}|^2$, and is mixed in polarization independent of the small parameter ω_p/kc . Equation (4.5) solves $a_{33} = 0$ and is a pure transverse harmonic mode. The corrections for finite K ,

$$\bar{W}(\lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx / (x + \lambda - ie)$$

are included, and are necessary for calculation of

the absorption coefficient $\alpha = \text{Im } \omega / |\text{d}\omega/\text{d}k|$. We average over a cone of small values of K to obtain the absorption length for the two modes

$$L_1 \sim \frac{R_e}{\beta} (I_\ell e^{-b})^{-1}; \quad L_2 \sim \frac{R_e}{\beta} (b/I_\ell e^{-b}) \sim R_e/\beta. \quad (4.6)$$

These modes, flat over harmonics with $b \sim \ell$ could be excited to black body level in a plasma of size $R \sim R_e/\beta$. These new modes share with the longitudinal wave a difficulty in propagating out of the plasma ($\omega_p \rightarrow 0$ requires complex k , giving reflections), but could be coupled at a sharp boundary, since they are transverse waves. The results above occur only when $\Omega = eB/m_0c/1-v^2c^2$ is replaced by eB/m_0c . The relativistic correction places a limit on the possible size of the harmonic term, allowing solutions Eq. (4.4, 4.5) only when $\omega/\omega_p < 1/\sqrt{\ell}$. Since the Bernstein modes exhibit no such behavior this offers another means of experimentally distinguishing among the various contributions to the electron harmonic spectrum.

ACKNOWLEDGMENT

We wish to thank Professor Marshall N. Rosenbluth for many helpful and stimulating discussions.

REFERENCES

- [1] ROSENBLUTH, M. N., KRALL, N. A., and ROSTOKER, N., Nuclear Fusion, 1962 Supplement, Part 1, p. 143.
- [2] ROBERTS, K. V., and TAYLOR, J. B., Phys. Rev. Letters 8, 197 (1962).
- [3] ROSENBLUTH, M. N., and SIMON, A., Phys. Fluids, 8, 1300 (1965).
- [4] MIKHAILOVSKII, A. B., and RUDAKOV, L. I., Soviet Physics JETP 17, 621 (1963).
- [5] KRALL, N. A., and ROSENBLUTH, M. N., Phys. Fluids 8, 1488 (1965).
- [6] BERNSTEIN, I. B., Phys. Rev., 109, 10 (1958).
- [7] LANDAUER, G., J. Nucl. Energy, Part C, 4, 395 (1962).
- [8] SCOTT, F. R.; JENSEN, T. H., WHARTON, C. B., FLEISCHMANN, H., TUCKFIELD, Jr., R. G., IAEA Symposium on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Paper CN-21/84 (1965).
- [9] RUDAKOV, L. I., and SAGDEEV, R., Soviet Physics JETP 10, 952 (1960).

DISCUSSION

R.M. KULSRUD: In the finite- β case, is there a simple criterion for stability in terms of the zero gyration radius growth rate; namely $\omega_0/\Omega < k^2a^2$?

N.A. KRALL: The simple criteria given by Rosenbluth, Krall and Rostoker are modified by the factor $(1 + 2\beta)$.

R.M. KULSRUD: Is your variation in β essentially a density variation?

N. A. KRALL: Not necessarily. Of course, one must be careful in the real situation how one varies quantities. However, β is varied by varying dB/dx .

B. LEHNERT: Do you have any physical explanation for the tendency towards stability caused by an increase in β ? An increase in plasma pressure will apparently push the magnetic field lines in such a way that there is a tendency towards increasing the field strength outside the main plasma body and decreasing the same strength inside the plasma. Thus, the plasma pressure tends to redistribute the magnetic field strength in space towards a situation which prevails in minimum-B configurations; that is to say, a strong field outside and a weak field inside the plasma. Is this a plausible physical explanation of your results?

N. A. KRALL: Only superficially. If you calculate in longitudinal approximation the perturbed charge distribution, the lowest-order contributions

are stabilizing and large; they can be written as $\sum_1^\infty a_n \beta^n / k^2 R^2$, where $k^2 R^2$

is small. This is the effect you describe. However there is an equally large destabilizing contribution from the perturbed magnetic field, shown by us

as $\sum_1^\infty a_n \beta^3 / k^2 R^2$, which exactly cancels the effect you mention. Thus, a large

stabilizing term cancels a large destabilizing term and the residual effect is hard to predict heuristically. Mathematically the residual effect is stabilizing.

B. COPPI: Did you consider the effects of shear stabilization and of β on the universal instability?

N. A. KRALL: Rosenbluth and I calculated the shear stabilization conditions in zero β in a paper to be published in Physics and Fluids. I introduced finite β into this calculation and obtained the equations which you discussed in your paper*. This clearly overlapped with your calculations and I therefore saw no point in pursuing it any further.

* These proceedings (CN-21/105)

KINETIC THEORY OF PARTICLES AND WAVES

N. ROSTOKER* AND K. MATSUDA
UNIVERSITY OF CALIFORNIA (SAN DIEGO)
LA JOLLA, CALIF., UNITED STATES OF AMERICA

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

KINETIC THEORY OF PARTICLES AND WAVES. The classical many body problem is discussed in terms of a cluster expansion. The ordering of the cluster expansion is motivated by considerations of particle discreteness or mode-coupling. In either case the expansion parameter is potential energy/kinetic energy so that expansions are the same. Previously it has been demonstrated that the plasma behaves like a collection of statistically independent quasi-particles for all calculations up to first order in the expansion parameter. We show how to generalize this approach to second and higher orders. In addition to a further renormalization of the quasi-particles, statistically independent quasi-pairs emerge. Applications are made to a thermal equilibrium plasma, the kinetic equation for a spatially homogeneous stable plasma and finally to an unstable plasma. For a stable plasma the main feature of interest is a non-uniformity in the expansion at long wavelengths or large particle separations. This accounts for some anomalous results previously obtained. For an unstable plasma the dominant asymptotic terms lead to the theory of weak turbulence, that has previously been derived from the Vlasov equation with some random phase assumptions. Some corrections to the theory of weak turbulence from discrete particle effects are also discussed.

THEORIE CINETIQUE DES PARTICULES ET DES ONDES. L'auteur discute le problème classique à plusieurs corps en employant un développement en essaim. L'agencement du développement en essaim est fondé, soit sur le caractère discontinu des particules, soit sur le couplage des modes. Dans les deux cas, le paramètre de développement est le rapport entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique, de sorte que les développements sont les mêmes. D'autres chercheurs ont montré précédemment que le plasma se comporte comme un ensemble de quasi-particules statistiquement indépendantes, pour tous les calculs jusqu'au premier ordre du paramètre de développement. Les auteurs montrent comment appliquer cette méthode aux ordres supérieurs, c'est-à-dire au deuxième et au-delà. Outre une renormalisation plus poussée des quasi-particules, il apparaît des quasi-paires statistiquement indépendantes. Les auteurs font cette application à un plasma thermique en équilibre, à l'équation cinétique pour un plasma stable homogène dans l'espace et enfin à un plasma instable. Pour un plasma stable, la particularité principale est la non-uniformité du développement pour les grandes longueurs d'ondes ou les grandes distances interparticulaires, ce qui explique certains résultats anormaux obtenus précédemment. Pour un plasma instable, les termes asymptotiques dominants conduisent à appliquer la théorie de la turbulence faible qui a été déduite précédemment de l'équation de Vlassov en adoptant certaines hypothèses relatives à la phase aléatoire. Les auteurs discutent aussi certaines corrections apportées à la théorie de la turbulence faible pour tenir compte des effets de la discontinuité des particules.

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЧАСТИЦ И ВОЛН. Обсуждается классическая проблема многих тел в смысле группового разложения. Упорядочение группового разложения мотивируется соображениями дискретности частиц или связывания мода. Рассматривается классическая проблема многих тел в категориях группового разложения. Упорядочение группового разложения мотивируется соображениями дискретности частиц или связыванием мода. В любом случае параметр разложения представляет из себя выражение потенциальная энергия/кинетическая энергия, так что разложения являются теми же самыми. Ранее было показано, что плазма ведет себя подобно скоплению статистических независимых квазичастиц для всех расчетов вплоть до первого порядка в параметре разложения. Мы показываем, как обобщить этот подход до второго и более высоких порядков. В дополнение к дальнейшему перенормированию квазичастиц появляются статистические независимые квазидублеты. Осуществляется применение к тепловой плазме равновесия, кинетическому уравнению для пространственно гомогенной устойчивой плазмы и, наконец, к неустойчивой плазме. Для устойчивой плазмы главной чертой, представляющей интерес, является неоднородность в

* Present address: General Atomic Division, General Dynamics Corporation, San Diego, Calif., United States of America.

разложении при большой длине волны или больших разделяниях частиц. Это объясняет некоторые полученные ранее аномальные результаты. Для неустойчивой плазмы доминирующие асимптотические условия ведут к теории слабой турбулентности, которая ранее была выведена из уравнения Власова с некоторыми допусками фазы разупорядочения. Рассматриваются также некоторые поправки к теории турбулентности от влияния дискретных частиц.

TEORIA CINETICA DE PARTICULAS Y ONDAS: Se estudia el problema clásico de varios cuerpos recurriendo al desarrollo en grupo. La ordenación de ese desarrollo se basa en la naturaleza discreta de las partículas o en el acoplamiento modal. En ambos casos, el parámetro de desarrollo es la energía potencial/energía cinética, de modo que los desarrollos son los mismos. Se ha demostrado anteriormente que el plasma se comporta como un conjunto de quasi partículas estadísticamente independientes en todos los cálculos hasta el primer orden del parámetro de desarrollo. Los autores muestran cómo se puede generalizar este procedimiento para aplicarlo a los órdenes segundo y superiores. Además de una nueva renormalización de las quasi partículas, aparecen quasi pares estadísticamente independientes. Se hacen aplicaciones a un plasma en equilibrio térmico, a la ecuación cinética de un plasma estable espacialmente homogéneo y, por último, a un plasma inestable. En el caso del plasma estable, la particularidad más interesante es la falta de uniformidad del desarrollo para grandes longitudes de onda o separaciones entre partículas. Esto explica algunos resultados anómalos obtenidos anteriormente. En el caso de un plasma inestable, los términos asintóticos dominantes conducen a la teoría de la turbulencia débil, deducida anteriormente de la ecuación de Vlasov con ciertas hipótesis relativas a la fase aleatoria. También se examinan algunas correcciones de la teoría de la turbulencia débil, partiendo de los efectos de las partículas discretas.

I. INTRODUCTION

Starting from the Liouville equation, the kinetic theory of a plasma has been developed as an expansion in the parameter [1] $\epsilon = \text{potential energy/kinetic energy}$. In the lowest order the correlationless kinetic equation or Vlasov equation is obtained for a stable plasma, and in higher orders equations that determine correlation functions have been studied extensively. Although some applications to an unstable plasma have been attempted this approach has not been very productive. Even the derivation of the Vlasov equation is not satisfactory since initial correlations appear to grow rather than decay.

In recent years a description of an unstable plasma [2] has developed which is referred to as weak turbulence theory. The starting point is the Vlasov equation and an expansion is made in the parameter γ/ω where γ is the growth rate and ω the oscillation frequency of an unstable wave. In fact where the theory of weak turbulence applies $\gamma/\omega \sim \text{potential energy/kinetic energy}$ so that this expansion is really the same as the usual expansion in kinetic theory. An essential feature of weak turbulence theory is the assumption that initially the waves have phases that are random and independent.

This paper is concerned with the foundations of the subject rather than specific applications and in particular with the relationship of kinetic theory and the more recent developments in weak turbulence. To this end we shall develop the subject of kinetic theory to second order in the parameter ϵ and consider stable or unstable plasmas. In the latter case the end result is identical to the usual theory of weak turbulence. The reasons for this are then clarified by comparisons with the conventional approach to the theory of weak turbulence. There are in general the two expansion parameters $1/n L_D^3$ and γ/ω . By carrying the calculation to terms of order $(\gamma/\omega)^2$ and $(\gamma/\omega)(1/nL_D^3)$ the theory of weak turbulence is extended to include discrete particle effects.

II. KINETIC THEORY

It is customary to work with the B-B-K-G-Y chain of equations derivable from the Liouville equation by taking moments. i.e.

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{e_k^2}{m} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k^2} - \frac{ne^2}{m} \int \frac{2}{\partial x_k} \frac{1}{(x_k - x_{k+1})} \cdot \frac{2}{\partial x_k} f_{k+1} dx_{k+1} \right\} = \frac{e_i^2}{m} \sum_{k=1}^3 \frac{2}{\partial x_k} \frac{1}{(x_k - x_{k+1})} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \quad (1)$$

$x_i = (x_i, v_i)$ the coordinates of the i -th particle. External fields have been omitted and an electron plasma with a neutralizing background is assumed. Since the right hand side is of order ϵ it is possible to solve Eq. (1) with a cluster expansion of the form

$$f_i = \prod_{j=1}^n f_{ij} + \sum_p [\Pi f_{ij}] g^{(p)}(x_i, v_i) + \sum_{pp} [\Pi f] g g + \sum_t [\Pi f] \tau \dots \quad (2)$$

The sums are over pairs, pairs of pairs, triplets etc. The correlation functions $g(x_1, x_2)$, $\tau(x_1 x_2 x_3)$ etc. are of order ϵ , ϵ^2 etc. if one considers the magnitude of the source terms in the equations for these quantities. Thus to lowest order the chain is satisfied by the first term of Eq. (2) where $f(x_i)$ satisfies the Vlasov equation. If the ordering of Eq. (2) is different at $t = 0$, it would not matter for a stable plasma because it can be shown that non-singular initial correlations would decay on a time scale w_p^{-1} . However the initial correlations grow rather than decay for an unstable plasma and their importance cannot be evaluated unless non-linear effects are considered. Discrete particle effects can be neglected by dropping the right hand side of Eq. (1), but it is not clear that what remains can be replaced by the Vlasov equation.

The right hand side can also be transformed away as Dupree has shown [3]. It is convenient to start from the Klimontovitch equation for

$$\hat{f}_i(x, t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n S[x - x_j, t] S_{x_j - x_i}(t) \quad (3)$$

and introduce the singular S -body functions:

$$F_s = V^s \int (dx)^s F_n(x_1 \dots x_n) \hat{f}_{i_1}(x_1, t) \dots \hat{f}_{i_s}(x_s, t)$$

F_s is the phase-space density that satisfies the Liouville equation. For example:

$$\begin{aligned} F_1 &= f_i \\ F_2 &= \Delta u_{1,2} f_{11} + f_{21,22} \\ F_3 &= \Delta u_{1,2} \Delta u_{1,3} f_{111} + \Delta u_{1,2} f_{11,22} + \Delta u_{2,3} f_{12,22} + \Delta u_{1,3} f_{12,22} \\ &\quad + f_{1,2,2,2} \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (4)$$

$\Delta u_{1,2} = \frac{1}{\pi} \delta(x_1 - x_2) \delta(v_1 - v_2)$ and $f_{1,2,2,2,2,2}$ is written as $f_{12}(1,2)$. For present purposes it is more convenient to employ the singular distribution functions in which case the discrete particle effects are contained entirely in the initial conditions.

The results of kinetic theory to first order in ϵ can most conveniently be expressed in terms of quasi-particles. [4] i.e.

$$g^{(1,2)} = f_{11} \bar{P}_{1111} + f_{21} \bar{P}_{11111} + n \int dv_i f_{11} P_{1111} \bar{P}_{11112} \quad (5)$$

where \bar{P}_{11112} is the change in the one-body distribution function of field particles (2) caused by a test-particle (1). It satisfies the equation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \omega_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \bar{P}_{11112} + \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{\Phi}^{(11)} \frac{\partial f_{11}}{\partial v_1} = \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{(x_1 - x_2)} \frac{\partial f_{11}}{\partial v_1} \quad (6)$$

where

$$\bar{\Phi}^{(11)} = -ne \int \frac{\bar{P}_{11112}(x'_1)}{|x_1 - x'_1|} dx'_1$$

In terms of the singular functions $G_{11,21} = \Delta u_{1,2} f_{11} + g^{(1,2)}$ and $P_{11112} = \bar{P}_{11112}$

$$G_{11,21} = n \int dv_i f_{11} P_{1111} \bar{P}_{11112}, \quad (7)$$

and the right hand side of Eq. (6) is transformed away. The physical behaviour of the system is the same as a system of statistically independent quasi-particles. This is apparent when we calculate fluctuations of any observables of the form

$$A(x,t) = \sum_{j=1}^n a(j,x,t), \quad B(x,t) = \sum_{j=1}^n b(j,x,t)$$

For example,

$$\langle A(x,t) B(x',t) \rangle = \langle A(x,t) \rangle \langle B(x',t) \rangle + n^2 \int dx dx' G_{(1,2)} a(1,x,t) b(2,x',t)$$

In terms of the microscopic observables for quasi-particles

$$\hat{a}(1|x,t) = n \int dx' a(1|x,t) P(1|x')$$

$$\langle S A(x,t) S B(x',t) \rangle = n \int dx' F(0) \hat{a}(1|x,t) \hat{b}(1|x',t) \quad \dots (8)$$

When the expansion is carried out to the second order in ϵ , it becomes considerably more complicated. The singular distribution function $F(0)$ can be expanded, for example in terms of unperturbed particle orbits as follows:

$$\hat{F}(0) = \sum_j P(x_j'|x) + \frac{1}{2!} \sum_{j \neq k} q(x_j, x_k | x) + \frac{1}{3!} \sum_{j \neq k \neq l} r(x_j, x_k, x_l | x) + \dots \quad (9)$$

$P(x_j'|x)$ depends on the initial coordinates of one particle. $q(x_j, x_k | x)$ depends on the initial coordinates of two particles etc. Initially

$$P(x_j'|x) = \frac{1}{n} \delta(x - x_j') \delta(x - x_j'), \quad q = r = 0 \quad \text{etc.}$$

Now take the ensemble average over initial coordinates assuming

$$f_0(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i)$$

$$\langle \hat{F}(0) \rangle = n \int dx_1 F(x_1) p(x_1) + \frac{n}{2!} \int dx_1 dx_2 F(x_1) F(x_2) q(x_1, x_2) + \dots \text{etc.} = f_{(1)}$$

If we average over all particles but one

$$\langle \hat{F}(0) \rangle_{x_1} = f_0 + P(x_1)$$

where

$$P(x_1) = p(x_1) + n \int dx_2 \bar{F}(x_2) q(x_1, x_2) + \frac{n}{2!} \int dx_2 dx_3 \bar{F}(x_2) \bar{F}(x_3) r(x_1, x_2, x_3) + \dots$$

$$\textcircled{1} = \textcircled{1} + \textcircled{1}\textcircled{1} + \textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{1} + \dots \quad (10)$$

The terms of the sum can be symbolized by diagrams which is convenient for carrying out sums to all orders. Similarly if we average over all particles but two,

$$\langle \hat{F}(0) \rangle_{x_1, x_2} = f_0 + P(x_1) + P(x_2) + Q(x_1, x_2)$$

where

$$Q(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) + n \int dx_3 \bar{F}(x_3) r(x_1, x_2, x_3) + \frac{n}{2!} \int dx_3 dx_4 \bar{F}(x_3) \bar{F}(x_4) s(x_1, x_2, x_3, x_4) + \dots$$

$$\textcircled{1}\textcircled{1} = \textcircled{1}\textcircled{1} + \textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{1} + \textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{1}\textcircled{1} + \dots \quad (11)$$

Following this procedure of summing diagrams to all orders the two-and three-body functions can be expressed as follows:

$$\langle \hat{F}_{(1)} \hat{f}_{(2)} \rangle = f_{(1)} f_{(2)} + G_{(1,2)}$$

$$G_{(1,2)} = n \int dx_1' F_{(1)} P_{(1)12} P_{(1)21} + \frac{n^2}{2} \int dx_1' dx_2' F_{(1)} F_{(2)} Q_{(1,2)113} Q_{(1,2)123} \quad (12)$$

$$\langle \hat{f}_{(1)} \hat{f}_{(2)} \hat{f}_{(3)} \rangle = f_{(1)} f_{(2)} f_{(3)} + n \int dx_1' F_{(1)} P_{(1)13} P_{(1)23} P_{(1)32} + f_{(2)} G_{(2,3)} + n^2 \int dx_1' dx_2' F_{(1)} F_{(2)} P_{(1)13} P_{(1)23} Q_{(2,3)13} \\ + \text{permutations} + \dots \quad (13)$$

To obtain equations for F , P , Q ...etc. similar averages and summations are carried out on the Klimontovich equation

$$\frac{\partial \hat{f}_{(n)}}{\partial t} + \mu_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \hat{f}_{(1)} - \frac{n\epsilon}{n} \frac{\partial \hat{f}_{(n)}}{\partial x_1} + \int \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{|x_1 - x_2|} \hat{f}_{(2)} dx_2 = 0 \quad (14)$$

(It is necessary to take the principal part of the integral to avoid a singularity.) The results are

$$\frac{\partial \hat{f}_{(n)}}{\partial t} + \mu_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \hat{f}_{(1)} + \frac{\epsilon}{n} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\Phi_{(n)11} \cdot \frac{\partial \hat{f}_{(n)}}{\partial x_1} \right] = \frac{n\epsilon}{n} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{|x_1 - x_2|} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} Q_{(1,2)113} \right\} \quad (15)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mu_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\epsilon}{n} \frac{\partial \Phi_{(n)11}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \right] P_{(1)111} + \frac{\epsilon}{n} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\Phi_{(1,2)113} \cdot \frac{\partial \hat{f}_{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\epsilon}{n} \frac{\partial \Phi_{(2,3)113}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} P_{(1)111} \right] \\ = - \frac{n\epsilon}{n} \int dx_2' F_{(2)} \left[\frac{\partial \Psi_{(1,2)113}}{\partial x_2'} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2'} P_{(1)111} + \frac{\partial \Phi_{(2,3)113}}{\partial x_2'} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2'} Q_{(1,2)113} \right] \quad (16)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mu_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\epsilon}{n} \frac{\partial \Phi_{(n)11}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \right] Q_{(1,2)113} + \frac{\epsilon}{n} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\Psi_{(1,2)113} \cdot \frac{\partial \hat{f}_{(1)}}{\partial x_1} \right. \\ \left. - \frac{\epsilon}{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_{(1,2)113} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} P_{(1)111} + \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_{(2,3)113} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} P_{(1)111} \right] \right] \quad (17)$$

The potentials Φ_n , Φ , Ψ have an obvious definition in terms of F , P , Q . $P_{(1)111}$ describes the shield cloud of field particles surrounding a test particle.

$Q_{(1,2)113}$ describes the cloud surrounding a pair of particles. Eqs. (12) and (13) are the appropriate generalizations of the superposition principle given by Eqs. (5) or (7). Eq. (16) is the extension of Eq. (6) to second order in the parameter ϵ . There is however a difference in that initial coordinates of the test particle are employed in the present treatment and current coordinates in Eqs. (5) (6) etc. Direct comparison can be made with the help of the transformation based on unperturbed orbits $x_i(t) = x_i' + g_i t$, $x_i'(t) = x_i'$.

We note that the initial form of $f_1 = \prod_i F_{(i)11}$ was assumed to be correlation-less. Without this assumption there would be many additional terms such as

$$n^2 \int dx_1' dx_2' g(x_1', x_2') P_{(1)111} P_{(1)123}$$

The reason for omitting these terms is as follows. If we transform to current coordinates this expression takes the form

$$n^2 \int dx_1 dx_2 g(x_1 - x_1 t, x_1; x_2 - x_2 t, x_2) P_{(1)111} P_{(1)123}$$

If the initial correlation function g is non-singular and has the physically essential property

$$\lim_{|x_1 - x_2| \rightarrow \infty} g(x_1, x_2) = 0$$

then the above expression vanishes as $t \rightarrow \infty$ provided that P remains finite. This is of course the case for a stable plasma. For an unstable plasma

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P = \infty$$

according to a linear treatment. However if non-linear terms are retained it should remain finite. We assume this to be the case and verify it a posteriori.

III. STABLE PLASMA

Consider a spatially homogeneous problem where $f(1) = f(v_1 t)$. In this case it is convenient to Fourier transform Eqs. (15) to (17). Neglecting the terms in Eq. (16) of order ϵ^2 , the Fourier-Laplace transforms of P , Q are

$$\Phi_{k,\omega}(z) = -\frac{qne}{k^2} \frac{1}{D_k(\omega)} \frac{1}{(z - \omega + ik)} \quad (18)$$

$$P_{k,\omega}(z) = \frac{1}{n} \delta(z - \omega) + \alpha_{k,\omega}(z) \Phi_{k,\omega}(z) \quad (19)$$

where $\alpha_{k,\omega}(z) = -\frac{e}{n} \frac{\frac{d}{dz} f(z)}{(z - \omega + ik)}$

$$D_k(\omega) = 1 + \frac{4\pi ne}{k^2} \int dz \alpha_{k,\omega}(z)$$

For a stable plasma all of the poles from $D_k(\omega) = 0$ are damped and the asymptotic solution involves only the pole at $\omega = -k \sqrt{\epsilon}$. This asymptotic solution leads of course to the Lenard-Balescu kinetic equation. To proceed to the next order, this solution is substituted into Eq. (17) which can easily be solved for Q . Then Eq. (16) can be solved again when the right hand side is known. The entire procedure is straight-forward although tedious and the details will be omitted in this paper. The main point of interest that emerges is apparent in the thermal equilibrium result (which can of course be obtained more easily [5] by other methods)

$$G_{k,\omega} = f(\omega) f(\omega) \left\{ -\epsilon \frac{L_D}{k} e^{-\epsilon L_D} + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{L_D}{k} \left[e^{-\epsilon L_D} \left(\frac{1}{4} \frac{r}{L_D} \ln \left(\frac{r}{4} \right) - \frac{3}{4} \ln 3 \right) \dots \right. \right. \quad (20)$$

$$\left. \left. + e^{-2\epsilon L_D} \left(\frac{r}{4} + \frac{L_D}{k} \right) + e^{-\epsilon L_D} Ei\left(\frac{r}{L_D}\right) \left(-\frac{1}{4} + \frac{r}{4L_D} \right) + e^{\epsilon L_D} Ei(-3\epsilon L_D) \left(\frac{3}{4} + \frac{r}{4L_D} \right) \right] \right\}$$

$$(\epsilon = 1/4\pi n L_D, -Ei(r) = \int_r^\infty e^{-t} dt/t \text{ and } r = 12 - \epsilon L_D)$$

For sufficiently large $r \sim L_D/\epsilon$ the second order term overtakes the first order term. Now it is well-known that this expansion breaks down for small r and appropriate expansions have been developed. [6] Simple iteration breaks down also for large r or long wavelengths. It is apparent in Eq. (1) that if the right hand side is of order ϵ^2 instead of ϵ that this will change the ordering of the correlation equations. The error involved in ignoring this fact is negligible for thermal equilibrium calculations. However for non-equilibrium calculations, it cannot be ignored because it leads to a divergence. Such a divergence has previously been found by Sandri [7] and more recently a second order correction to the mean free path of 4 orders of magnitude was found by Misawa. [8] In the latter case the calculation was by a quantum mechanical greens-function method in which the origin of the large long-wavelength contribution is completely obscured by the formalism. If Eq. (16) is properly ordered for long wavelengths $k \sim \epsilon/L_D$ there is no divergence and the second order correction to the Lenard-Balescu equation is small as it should be.

IV. UNSTABLE PLASMA

Neglecting terms of second order in the expansion parameter Eqs. (18) and (19) are still applicable. However since $D_k(\omega) = 0$ now has solutions of the form $\omega = \omega_k = \Omega_k - i\gamma_k$, the time asymptotic expressions for P_k , Q_k contain an exponen-

tially growing term which after a few e-folding periods is far more important than the terms from the pole at $\omega = -k \cdot v_1$. Anticipating the effects of the second order terms to be arresting of growth for linearly unstable modes, and mode coupling to produce a Φ_k for stable modes, we assume an asymptotic solution of the form

$$\begin{aligned} P_k(\omega_1 | \omega_2) &= \alpha_{k,\omega_2}^{(u)} \Phi_k^{(u)} + \text{second order terms} \\ \Phi_k^{(u)} &= \hat{\Phi}_k^{(u)} \exp i \int_0^t \omega_k^{(u)} dt' \end{aligned} \quad (21)$$

where $\hat{\Phi}_k(v_1', t)$ is slowly varying in time. This expression is substituted into Eq. (17) which can then be solved for the asymptotic results,

$$\begin{aligned} Q_{k,k'}^{(u,u';k,k')} &= \alpha_{k,\omega_2}^{(u)} \Psi_{k,k'}^{(u,u')} + \mu_{k,\omega_2}^{(u)} \frac{\Phi_k^{(u)} \bar{\Phi}_{k'}^{(u)}}{D_{k,k'}^{(u,u')}} \quad (22) \\ V_{k,k'}^{(u,u')} &= M_{k,k'}^{(u,u')} \Phi_k^{(u)} \bar{\Phi}_{k'}^{(u)} / D_{k,k'}^{(u,u')} \end{aligned}$$

where

$$\mu_{k,\omega_2}^{(u)} = -\frac{e}{m} \frac{1}{\omega + \omega_2 + (k + k')/v_1} \left[\frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} \alpha_{k,\omega_2}^{(u)} + \frac{k'}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} \alpha_{k',\omega_2}^{(u)} \right]$$

$$M_{k,k'}^{(u,u')} = -\frac{4\pi n e}{(k+k')^2} \int d\omega_1 \mu_{k,\omega_1}^{(u)}$$

Now substitute this into Eq. (16) and solve for $P_k(v_1 | v_1)$. The result is

$$\begin{aligned} P_k^{(u,u)} &= \alpha_{k,\omega_2}^{(u)} \Phi_k^{(u)} - \frac{e}{m} \frac{(k/2)^2/2\omega_2}{(\omega_2 + k/v_1)^2} \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \Phi_k^{(u)} - i\omega_2 \Phi_k^{(u)} \right] \quad (23) \\ &- \Phi_k^{(u)} \int \frac{d\omega_1}{(2\pi)} \frac{2\pi}{k^2} W_k^{(u)} \left[\mu_{k,\omega_1}^{(u)} + \frac{M_{k,k'}^{(u,u')} + N_{k,k'}^{(u,u')}}{D_{k,k'}^{(u,u')}} \right] \\ \frac{\partial \Phi_k^{(u)}}{\partial t} - i\omega_2 \Phi_k^{(u)} &= -i \frac{\partial \Phi_k^{(u)}}{\partial t} \int \frac{d\omega_1}{(2\pi)^2 k^2} W_k^{(u)} \left[\frac{M_{k,k'}^{(u,u')} (k/k') \omega_2}{D_{k,k'}^{(u,u')}} M_{k,k'}^{(u,u')} + N_{k,k'}^{(u,u')} \right] \end{aligned}$$

The coefficients μ , M describe 3-wave processes and the coefficients

$$\mu_{k,\omega_2}^{(u)} = -\frac{e}{m} \frac{1}{\omega + \omega_2 + (k + k')/v_1} \left[\frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} \mu_{k,\omega_2}^{(u)} \right]$$

$$N_{k,k'}^{(u,u')} = -\frac{4\pi n e}{(k+k')^2} \int d\omega_1 \eta_{k,\omega_1}^{(u)}$$

describe 4-wave processes.

$$D_k^{(u)}(\omega_2) = [2 D_k^{(u)} / (2\omega)] \omega = \omega_2$$

and

$$W_k^{(u)} = \frac{k^2}{8\pi} n \int d\omega_1 F(\omega_1) |\Phi_k^{(u)}|^2$$

Now making use of Eq. (12) we can calculate the pair correlation function

$$\begin{aligned} G_k(\omega_1, \omega_2) &= n \int d\omega_1 F(\omega_1) P_k^{(u,u)}(\omega_1, \omega_2) P_k^{(u,u)}(\omega_2) \quad (24) \\ &+ \frac{n}{2} \int d\omega_1 \int d\omega_2 \delta(k+k'-k) \int d\omega_1 d\omega_2 F(\omega_1) F(\omega_2) Q_{k,k'}^{(u,u)(u,u)}(\omega_1, \omega_2) Q_{k,k'}^{(u,u)(u,u)}(\omega_2) \end{aligned}$$

and finally obtain a kinetic equation. The electrostatic energy is

$$W_k = \frac{2\pi}{h} \left(\frac{ne^2}{h} \right) \int d\omega_1 d\omega_2 G_{k\bar{k}}(\omega_1, \omega_2)$$

$$\frac{\partial W_k}{\partial t} = \frac{4\pi}{h} \left(\frac{ne^2}{h} \right)^2 \int d\omega_1 d\omega_2 \frac{1}{h^2 k^2} \text{Im } G_{k\bar{k}}(\omega_1, \omega_2)$$

$$\frac{\partial W_k}{\partial t} = T_k W_k + \frac{W_k}{D_k(\omega_k)} \text{Im} \left\{ \int \frac{d\omega_1}{(2\pi)^2} \left[\frac{M(k; \omega_1; k; \omega_1) M(k; \omega_1; k+k'; \omega_1+\omega_2)}{D_{k+k'}(\omega_1+\omega_2)} \right] \right. \quad (25)$$

$$\left. + N(k; \omega_1; k; \omega_1; k; \omega_2) \frac{\partial W_{k'}}{h^2 k'^2} \right\} + \text{Im} \left\{ \int \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} \frac{\delta(\omega_1 + \omega_2)}{D_k(\omega_1 + \omega_2)} \left[\frac{|M(k; \omega_1; k; \omega_1)|^2}{D_{k+k'}(\omega_1 + \omega_2)} \right]^2 \frac{q e k^2}{h^2 k'^2} W_k W_{k'} \right.$$

The kinetic equation is obtained by substituting into Eq. (15)

$$\frac{\partial f(x)}{\partial t} = -\frac{e}{h} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{8\pi W_k}{h^2} \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial k} \text{Im } \alpha_{k\bar{k}, \omega_k}(x) \quad (26)$$

$$-\frac{e}{h} \int \frac{dk dk'}{(2\pi)^2} \frac{(8\pi)^2 W_k W_{k'}}{(k k')^2} \frac{1}{2\omega} \left\{ \text{Im} \left[\frac{M(k; \omega_1; k; \omega_1)}{D_{k+k'}(\omega_1 + \omega_2)} \right] \left[\frac{1}{k} (x) \right] \right. \quad (26)$$

$$+ M(k; \omega_1; k+k'; \omega_1 + \omega_2) \frac{\partial}{\partial \omega_1} \alpha_{k\bar{k}, \omega_k}(x) + \frac{M(k; \omega_1; k; \omega_1)}{D_{k+k'}^2(\omega_1 + \omega_2)} \alpha_{k+k', \omega_1 + \omega_2}(x).$$

$$\left. - \mu_{k\bar{k}, \omega_k}(x) \right\} + \text{Im} \left[\eta_{k\bar{k}, \omega_k}(x) + N(k; \omega_1; k; \omega_1; k; \omega_2) \frac{\partial}{\partial \omega_1} \alpha_{k\bar{k}, \omega_k}(x) \right]$$

Apart from some differences in notation, Eqs. (25) and (26) are the same as the equations derived from the Vlasov equation with a random phase approximation. [9] Although derivatives higher than the second occur in Eq. (26), they in fact cancel, [10] so that Eq. (26) can be expressed in the form

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} = \frac{2}{2\pi} \cdot \mathcal{P}_k(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \quad (27)$$

V. RANDOM PHASE METHOD

Since initial correlations do in fact decay as a result of non-linear effects, the description of an unstable plasma by means of the Vlasov equation is justified. This gives the same results if random initial phases $\sigma = \sigma_{k_1} \sigma_{k_2} \dots$ etc. are postulated. For example assume

$$f_k(\sigma_1 \sigma_2 \dots) = V^{-4} P_k(\sigma_1 \sigma_2 \dots) + \frac{1}{2!} \sum_{k_1 k_2} Q_{k_1 k_2}(\sigma_1 \sigma_2, \sigma_3 \sigma_4) \delta_{k_1 k_2, k} + \frac{V^{-4}}{3!} \sum_{k_1 k_2 k_3} R_{k_1 k_2 k_3}(\sigma_1 \sigma_2, \sigma_3 \sigma_4, \sigma_5 \sigma_6) \delta_{k_1 k_2 k_3, k} \dots$$

Initially f_k depends on only one phase so that $Q = R = 0$ etc. at $t = 0$. Initial random phases means that the distribution function for initial phases is $\mathcal{F}_{\sigma_1 \sigma_2 \dots}$ where $\mathcal{F}_{\sigma_1 \sigma_2 \dots} = 1/\pi^2$. In this case P , Q etc. vanish if we average over any one phase. If the initial phases are uncorrelated but not random then P , Q etc. do not have this property. However the same resultant equations are obtained by

following the procedure of Section II and defining P, Q, etc. as sums to all orders. Making use of the Vlasov equation

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \epsilon_{k_1} v_1 f_1 + \frac{e}{m} \vec{E}_1 \cdot \vec{v}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}_1} = -\frac{e}{m} \frac{1}{V} \sum_{k_2, k_3, k_4} \vec{F}_{k_2} \cdot \vec{v}_{k_2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \vec{v}_1 \partial \vec{v}_{k_2}}$$

We can obtain equations for P_k , Q_{k_1} , etc. which are just the Fourier transforms of Eqs. (15), (16) and (17). The only change is that the parameters v_1 , v_2 are replaced by σ_{k_1} , σ_{k_2} , etc. A similar replacement takes place in the superposition formulas. For example Eq. (24) becomes

$$G_k(\omega, \omega_1) = \underbrace{f_{k_1}(\omega_1) f_{k_2}(\omega_2)}_{\nabla} = \int d\sigma_{k_1} F(\sigma_{k_1}) P_{k_1}(\sigma_{k_1}, \omega_1) P_{k_2}(\sigma_{k_2}, \omega_2) \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{V} \sum_{k_3, k_4} S_{k_1, k_2, k_3, k_4} \int d\sigma_{k_1} d\sigma_{k_2} F(\sigma_{k_1}) F(\sigma_{k_2}) Q_{k_1, k_2}^{*}(\sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}, \omega_1) Q_{k_3, k_4}(\sigma_{k_3}, \sigma_{k_4}, \omega_2)$$

Thus all of the previous results are reproduced and the calculations are even formally identical.

VI. DISCRETE PARTICLE EFFECTS

The processes described by Eqs. (25) and (26) involve spreading of the spectrum of waves by mode-coupling into regions where absorption can take place. Eventually the electrostatic energy is returned to the particles. As a result the plasma is stabilized and the particle kinetic energy has increased slightly by an increment of the order of $(\gamma/\omega_p)(nkT)$. Then and to some extent during this process the neglect of the discrete particle terms is not justified. We consider their inclusion as an expansion up to terms of order $(1/nL_D^3)(\gamma/\omega_p)$.

One method of including discrete particle effects is to return to the asymptotic expressions given by Eq. (21). Here we have neglected terms from the pole at $\omega = -k \cdot v_1$ which are on the average small in comparison with Eq. (21). They can however be included in the previous formalism. Alternately we may proceed from the method discussed in Section V. Assume random phases in the initial state and consider Eq. (15) for the one-body function. However in this case $\Phi_M(x_1) \neq 0$, but is a random function as in the previous section. The result of this calculation is that collision terms of the Lenard-Balescu type should be added to Eq. (27). In addition, in Eq. (25) γ_k should be replaced by $\gamma_k + \gamma_k^{(c)}$ where $\gamma_k^{(c)}$ is the collisional absorption. The calculation of this quantity is the same as the calculation of the real part of the conductivity $\sigma(k, \omega_k)$ in the work of Oberman, Ron and Dawson. [11] While $\gamma_k^{(c)}$ is of order $1/nL_D^3$ which is small compared to γ_k for unstable waves, it is in fact much larger than γ_k for long-wavelength stable modes. Thus when mode-coupling produces waves of large phase velocity collisional damping plays a part in determining the shape of the spectrum.

ACKNOWLEDGMENT

We are indebted to Professor W. E. Drummond and Professor R. Aamodt for discussions during the course of this work.

REFERENCES

- [1] ROSTOKER, N and ROSENBLUTH, M. N., Phys. Fluids 3, (1960) 1; BALESCU, R., Phys. Fluids 3, (1960) 52; GUERNSEY, R. L., dissertation, University of Michigan (1960); LENARD, A., Ann. Phys. (N.Y.) 10, (1960) 390.
- [2] VEDENOV, A. A., VELIKOV, E. P., and SAGDEEV, R. Z., Nuclear Fusion 1, (1961) 82; DRUMMOND, W. E. and PINES, D., Salzburg (1961); Ann. Phys. (N.Y.) 28, (1964) 478; AAMODT, R. E. and DRUMMOND, W. E., Phys. Fluids 7, (1964) 1816; KADOMTSEV, B. B., Soviet Phys.--JETP 43, (1962) 2234, 45, (1963) 1230; Plasma Turbulence, Academic Press, New York (1965).

- [3] DUPREE, T. H., Phys. Fluids 6, (1963) 1714.
- [4] ROSTOKER, N., Phys. Fluids 7, (1964) 479-491; Ann. Phys. (N.Y.) 31, (1965) 243.
- [5] O'NEIL, T. and ROSTOKER, N., Phys. Fluids 8, (1965) 1109.
- [6] FRIEMAN, E. A. and BOOK, D. L., Phys. Fluids 6, (1963) 1700.
- [7] SANDRI, G., Ann. Phys. (N.Y.) 24, (1963) 332.
- [8] MISAWA, S., Phys. Rev. Letters 13, (1964) 337.
- [9] GALEEV, A. A., KARPMAN, V. I., and SAGDEEV, R. Z., USSR (Doklady), 157 (1964) 1088.
- [10] AAMODT, R. and DRUMMOND, W. E., IAEA Conference at Culham, England, September 1965, CN 21/83.
- [11] OBERMAN, C., RON, A., and DAWSON, J., Phys. Fluids 5, (1962) 1514.

DISCUSSION

N. L. TSINTSADZE: What do you think about the application of your theory to a plasma in a constant magnetic field?

N. ROSTOKER: There is no particular difficulty in obtaining the corresponding kinetic equations with a constant magnetic field. Of course, actually to obtain numerical results would be considerably more difficult.

V. P. SILIN: I feel that your approach (as other approaches) does not provide an exhaustive explanation of the phenomena in a plasma in a magnetic field which is so strong that the Larmor radii of the particles are smaller than the Debye radii. In so far as one employs the concept of particle orbits which are not disturbed by, for example, Coulomb interaction, divergences occur in the theory as a result of the infinite time spent in the interaction region by particles having no velocity component along the magnetic field. One needs to modify the theory so as to take into account (in terms of current concepts) the effects of higher approximations.

N. ROSTOKER: Dr. Rosenbluth and I* have applied an approach similar to this one when there is a strong magnetic field. Explicit results were obtained for the case where the Larmor radius is small compared with the Debye radius. There was no difficulty from such particles and no divergences were obtained.

* Physics of Fluids 3 (1961) 1.

EQUILIBRIUM AND STABILITY OF THE M-AND-S TORUS AND RELATED CONFIGURATIONS

D. PFIRSCH AND H. WOBIG
MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PHYSIK UND ASTROPHYSIK,
MUNICH, FEDERAL REPUBLIC OF GERMANY

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

EQUILIBRIUM AND STABILITY OF THE M-AND-S TORUS AND RELATED CONFIGURATIONS. Using the model of a field free plasma which is characterized by surface currents only, one derives a differential equation for the equilibrium surface S:

$$\sum_{i,k=1}^2 g^{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} = 1$$

(g_{ik} = metric tensor of the surface S; $\phi(x^i, x^k)$ = magnetic potential on S, x^i, x^k = surface parameters). To obtain a suitable coordinate system we take a reference line $\vec{R}(s)$ (s = arc length) and introduce polar coordinates r, θ in the plane of the normal-binormal vectors n, b . It is shown that the M-and-S torus [1] is a special solution of this equation, and a rough picture of the whole class of M-and-S configurations is given. For this purpose an auxiliary torus $r_0(s, \theta)$ is constructed with the property that all the lines $\theta = \text{constant}$ have the same total length. If $\phi(s, \theta)$ is defined to be the arc length along these lines, the unknown equilibrium torus almost coincides with the auxiliary torus. The difference is of the order of the aspect ratio. On the basis of the MHD energy principle modified by Lüst and Martensen the interchange instability is investigated and a stability criterion is $\oint (\mu/\rho) d\ell > 0$ ($1/\rho$ = curvature of a magnetic field line, ℓ = arc length along a field line, $1/\mu = d$ = "distance" between two field lines) is established for all field lines. The M-and-S torus can be stabilized against pure interchanges if along each of the field lines the curvature is sufficiently favourable in the mean. The general theory is also applied to the simple torus with circular cross section where a stabilizing effect of the torus curvature is found. The above criterion can be obtained formally from the $\delta \int d\ell/B < 0$ criterion, which is derived for the low- β case. The requirement $B^2 = \text{constant}$ on a certain pressure surface yields the above criterion.

EQUILIBRE ET STABILITE DU TORE M-ET-S ET DE CONFIGURATIONS ASSOCIEES. A l'aide d'un modèle de plasma sans champ caractérisé par des courants de surface seulement, les auteurs établissent une équation différentielle de la surface d'équilibre S:

$$\sum_{i,k=1}^2 g^{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} = 1$$

(g_{ik} = tenseur métrique de la surface S; $\phi(x^i, x^k)$ = potentiel magnétique sur S, x^i, x^k = paramètres de la surface). Pour obtenir un système de coordonnées approprié, ils choisissent une courbe de référence $\vec{R}(s)$ (S = longueur de l'arc) et introduisent des coordonnées polaires r, θ dans le plan du vecteur normal \vec{n} et du vecteur binormal \vec{b} . Ils montrent que le tore M-ET-S est une solution particulière de cette équation et ils donnent une idée approximative de la classe toute entière des configurations M-ET-S. A cette fin, ils construisent un tore auxiliaire $r_0(s, \theta)$ tel que toutes les courbes $\theta = \text{constante}$ aient la même longueur totale. Si $\phi(s, \theta)$ est défini comme étant la longueur de l'arc le long de ces courbes, le tore d'équilibre inconnu coïncide presque avec le tore auxiliaire. La différence est de l'ordre de l'allongement. En se fondant sur le principe de l'énergie en magnétohydrodynamique modifié par Lüst et Martensen, les auteurs étudient l'instabilité d'échange et établissent un critère de stabilité $\oint (\mu/\rho) d\ell > 0$ pour toutes les lignes de champ ($1/\rho$ = courbure de la ligne de champ magnétique, ℓ = longueur de l'arc le long des lignes de champ, $1/\mu = d$ = « distance » entre deux lignes de champ). On peut rendre le tore M-ET-S stable à l'égard des échanges purs si, le long de chacune des lignes de champ, la courbure est suffisamment favorable en moyenne. Les théories générales

s'applique également au tore simple à section circulaire dans lequel on constate un effet stabilisateur de la courbure du tore. On peut obtenir le critère ci-dessus d'une manière formelle à partir du critère $\delta \int dl/B < 0$ qui est déduit du cas où β est faible. La condition $B^2 = \text{constante}$ sur une certaine surface de pression entraîne le critère énoncé ci-dessus.

РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ М-И-С ТОРА И СВЯЗАННЫХ С НИМ КОНФИГУРАЦИЙ. С помощью модели, свободной от поля плазмы, которая характеризуется только поверхностными токами, можно получить дифференциальное уравнение для равновесной поверхности S:

$$\sum_{i,k=1}^2 g^{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} = 1$$

(g_{ik} – метрический тензор поверхности S; $\phi(x^i, x^k)$ – магнитный потенциал на S, x^i, x^k – параметры поверхности). Для получения подходящей системы координат мы берем базисную линию $\vec{R}(s)$ (s – длина дуги) и вводим полярные координаты r, θ в плоскость нормально-бинормальных векторов \vec{n}, \vec{b} . Показывается, что M-и-S-тор является специальным решением данного уравнения и дается приближенная картина всего класса M-и-S-конфигураций. С этой целью строится вспомогательный тор $r_0(s, \theta)$, имеющий то свойство, что все линии $\theta = \text{пост.}$ имеют ту же общую длину. Если $\phi(S, \theta)$ устанавливается равным длине дуги вдоль этих линий, неизвестный тор равновесия почти совпадает с вспомогательным тором. Разница составляет порядка относительного удлинения. На основе принципа магнитогидродинамической энергии, модифицированного Люстом и Мартенсеном, исследуется неустойчивость взаимного обмена и устанавливается критерий устойчивости для всех линий поля $\phi(\mu/\rho)dl > 0$ ($1/\rho$ – кривизна линии магнитного поля, l – длина дуги вдоль линий поля, $1/\mu = d$ – «дистанция» между двумя линиями поля). M-и-S-тор может быть стабилизирован против чистых взаимных обменов, если кривизна вдоль каждой линии поля в среднем достаточно благоприятна. Общая теория применяется также к простому тору с круговым сечением, где обнаружен стабилизирующий эффект кривизны тора. Приведенный выше критерий может быть получен формально из критерия $\delta \int dl/B < 0$, который выведен для случая с низким значением β . Требование $B^2 = \text{пост.}$ на определенной поверхности давления приводит к указанному выше критерию.

EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD DEL TORO M-y-S Y DE LAS CONFIGURACIONES AFINES. Con ayuda de un modelo de plasma exento de campos caracterizado por corrientes superficiales únicamente, los autores deducen una ecuación diferencial de la superficie de equilibrio, S.

$$\sum_{i,k=1}^2 g^{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} = 1$$

(g_{ik} = tensor métrico de la superficie S; $\phi(x^i, x^k)$ = potencial magnético en S; x^i, x^k = parámetros de la superficie). Para obtener un sistema adecuado de coordenadas, los autores toman una línea de referencia $\vec{R}(s)$ (s = longitud del arco) e introducen las coordenadas polares r, θ en el plano de los vectores normales-binormales \vec{n}, \vec{b} . Demuestran que el toro M-y-S representa una solución particular de esta ecuación, y describen a grandes rasgos toda la serie de configuraciones M-y-S. Para ello, establecen un toro auxiliar $r_0(s, \theta)$, que presenta la propiedad de que todas las líneas de $\theta = \text{const.}$ poseen la misma longitud total. Si se define $\phi(s, \theta)$ como la longitud del arco interceptado por estas líneas, el toro de equilibrio desconocido tiende a coincidir con el toro auxiliar. La diferencia es del orden de la razón de dimensiones. Basándose en el principio de la energía magnetohidrodinámica modificado por Lüst y Martensen, investigan la inestabilidad de intercambio y establecen un criterio de estabilidad: $\oint (\mu/\rho)dl > 0$; para todas las líneas de fuerza ($1/\rho$ = curvatura de la línea de fuerza magnética, l = longitud del arco interceptado por las líneas de fuerza, $1/\mu = d$ = «distancia» entre dos líneas de fuerza). El toro M-y-S puede estabilizarse frente a los intercambios puros siempre que la curvatura media a lo largo de cada línea de fuerza sea en término medio suficientemente favorable. La teoría general se aplica también al toro sencillo de sección circular, en el cual se observa el efecto estabilizador de la curvatura. El criterio expuesto puede deducirse formalmente del criterio $\delta \int dl/B < 0$, que se deduce para el caso de valor β bajo. La condición de $B^2 = \text{const.}$ en una determinada superficie de presión, da el mencionado criterio.

Introduction

In respect to fast pinch experiments the following model often is used: a fieldfree plasma is separated from the vacuum region by a current carrying boundary layer. In this case the structure of the boundary layer is neglected and the considerations are confined to the behaviour of the plasma in the large: geometrical form and longwave instabilities. In the framework of this model F. Meyer and H.U. Schmidt [1] found a toroidal θ -pinch, an equilibrium configuration without a total azimuthal current. As there always occur regions of unfavourable curvature along the magnetic field lines, such a configuration must be unstable due to localized disturbances [2]. Thus, there seemed to be no further need for studying these socalled M-and-S surfaces. But in the last years the stabilizing effect of finite Larmor-radii was investigated [3] and there is the hope that the shortwave instabilities are stabilized by this effect. However, there still remains the problem of instabilities with long wavelengths along the magnetic field and perpendicular to the magnetic field.

In the following work we wish to consider more general M-and-S surfaces than in ref. [1] and investigate the interchange instabilities at these surfaces.

The main result of this investigation is easily understood physically: Because of the constant magnetic field on the equilibrium surface the interchanging flux-tubes have a constant cross section, and therefore the interchange perturbation is weighted more heavily in regions with a small distance between the magnetic field lines than in regions with a large distance. The effect is that the surface can be stabilized against pure interchanges if the magnetic field lines have a smaller distance in regions of favourable curvature than in regions of unfavourable curvature.

Basic equations for the equilibrium

The equilibrium relations for a plasma with such an ideal boundary layer can be found elsewhere in literature [1,2,5,7].

These equations are:

$$1) \quad B_n = 0 \quad \text{on } S \quad (\text{boundary condition})$$

$$(1) \quad 2) \quad B^2 = 8\pi p \quad \text{on } S \quad (\text{equilibrium condition})$$

$$3) \quad \vec{n} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (\text{Maxwell equation})$$

\vec{B} = magnetic field on the boundary B_n = component of \vec{B} normal on S .
 j = density of the surface current \vec{n} = normal vector of S .
 p = constant plasma pressure

The plasma is quiescent and all electric fields are neglected. Because of the boundary condition for \vec{B} the magnetic field on the equilibrium surface can be written as a surface gradient:

$$(2) \quad B_i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad i = 1, 2$$

(x^1, x^2) are some surface parameters and $g_{ik}(x^1, x^2)$ is the metric tensor of the surface. The equilibrium condition comes out to be:

$$(3) \quad \sum_{i,k=1}^2 g_{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} = 1.$$

Here we have normalized $B^2 = 8\pi p = 1$.

As is shown in standard books of differential equations [4] the variational principle for this equation (3) has the form

$$(4) \quad \delta \int \sqrt{\sum_{i,k=1}^2 g_{ik} dx^i dx^k} = 0.$$

The magnetic field lines therefore are geodesics on the equilibrium surface and the lines $\phi = \text{const}$ are identical with the streamlines of the surface current j . ϕ is the arc length along the field lines.

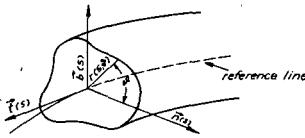


FIG. 1. Coordinate system

To describe the toroidal surface by equation (3) we choose a suitable coordinate system: If $\vec{R}(s)$ ($s = \text{arc length}$, $L = \text{total length}$) is the vector of a closed reference line we can describe the surface S by its distance $r(s, \vartheta)$ in the plane of the normal-binormal vectors (see fig. 1). The vector to some point (s, ϑ) on S has the form

$$(5) \quad \vec{r}(s, \vartheta) = \vec{R}(s) + r(s, \vartheta) \cos \vartheta \vec{n}(s) + r(s, \vartheta) \sin \vartheta \vec{b}(s)$$

and after calculating the metric tensor the equilibrium condition leads to:

$$(6) \quad E^2 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s} \right)^2 - 2 F \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \frac{\partial \vartheta}{\partial s} + G^2 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s} \right)^2 = E^2 G^2 - F^2$$

$$\begin{aligned} E^2 &= r_s^2 + (1 - \frac{r}{\tau} \cos \vartheta)^2 + \frac{r^2}{\tau^2}; & G^2 &= r^2 + r_\vartheta^2; \\ F &= r_s r_\vartheta + \frac{r^2}{\tau}; & r_s &= \frac{\partial r}{\partial s}, \quad r_\vartheta &= \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \end{aligned}$$

$\frac{1}{\tau(s)}$, $\frac{1}{\tau(s)}$ are the curvature and torsion of the reference line. Since the torus is a double connected domain, the magnetic potential is multivalued.

$$(7) \quad \phi(s, \vartheta) = C_{\text{mer}} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} + C_{\text{az}} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} \frac{s}{L} + P(s, \vartheta).$$

$P(s, \vartheta)$ is periodic in both variables, C_{mer} is a curve on S closed around the reference line and C_{az} is closed in azimuthal direction. This is analogous to the continuous case, where M.D. Kruskal et al. [6] derived such a form of $\phi(s, \vartheta)$ on the magnetic surfaces.

The periods of the \vec{B} -field on S are the total currents.

$$I_{\text{az}} = \oint_{C_{\text{mer}}} \vec{B} \cdot d\vec{l}; \quad I'_{\text{mer}} = \oint_{C_{\text{az}}} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

are the total azimuthal current and the total current around the reference line. Equation (3) can be used to solve two problems:

1. The surface $r(s, \vartheta)$ is given and we solve eq.(3) to obtain the system of field lines and streamlines on S .
2. We search for a torus $r(s, \vartheta)$, which makes possible certain periods of the magnetic field.

For the second problem a general existence theorem is still missing. The difficulty is that the solutions $r(s, \vartheta)$ must be periodic in both variables s, ϑ .

Now we confine ourselves to M-and-S surfaces and assume that these exist and are continuous differentiable. This means that the curvature of the field lines and streamlines always is finite. A special case of these equilibria was calculated in [1].

M-and-S surfaces

These are characterized by the condition:

$$(8) \quad I_{\text{az}} = 0.$$

We give here a rough picture of this equilibrium without solving eq.(3) explicitly. This is possible if there are some symmetries available and we choose

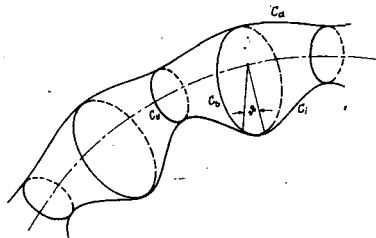


FIG. 2. M-and-S torus

the geometry as simple as possible. The reference line shall be a circle

$$1/\varrho = 1; \quad 1/\epsilon = 0$$

and we assume the torus to be symmetric to the plane of this circle (see fig.2). In this case all quantities depend on $\cos \vartheta$ and eq.(3) is simplified to:

$$(9) \quad \left[r_s^2 + (1 - \frac{r}{\varrho} \cos \vartheta)^2 \right]^2 (\frac{\partial \phi}{\partial \vartheta})^2 - 2 r_s r_\vartheta \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} + (r_\vartheta^2 + r^2) (\frac{\partial \phi}{\partial s})^2 \\ = (r_\vartheta^2 + r^2) (1 - \frac{r}{\varrho} \cos \vartheta)^2 + r^2 r_s^2.$$

To define the potential function $\phi(s, \vartheta)$ we construct an auxiliary torus $r_o(s, \vartheta)$ with the following properties:

1. $r_o(s, \vartheta)$ depends on ϑ only through $\cos \vartheta$.

2. All the lines $\vartheta = \text{const.}$ have the same total length.

We define the potential to be the arc length along these lines

$$(10) \quad \phi(s, \vartheta) = \int_0^s \sqrt{(\frac{\partial r_o}{\partial s'})^2 + (1 - \frac{r_o}{\varrho} \cos \vartheta)^2} ds'$$

$\phi(s, \vartheta)$ has the required form

$$\phi = C s + P(s, \vartheta)$$

with $I_{az} = 0$ and $P(s, \vartheta)$ periodic in both variables. C is a constant independent of ϑ . The aim of this procedure is to obtain a relation between the potential $\phi(s, \vartheta)$ and the unknown equilibrium torus $r(s, \vartheta)$. We construct a surface $r_o(s, \vartheta)$ with the ansatz:

$$(11) \quad r_o(s, \vartheta) = r_H + b(\vartheta) \frac{a}{2} (1 - \cos 2 n s)$$

(n is some natural number).

The function $b(\vartheta)$ must be chosen in such a way that the above condition is fulfilled. This torus consists of n periods and has some special lines of symmetry.

$$(12) \quad \begin{aligned} C_H, C_B : \quad s = s_\nu (\nu = 1 \dots 2n) : \quad & \frac{\partial r_o}{\partial s} \Bigg|_{s=s} = 0 \quad \text{for all } \vartheta \\ C_a, C_i : \quad \vartheta = \pi, 0 \longrightarrow & \frac{\partial r_o}{\partial \vartheta} \Bigg|_{\substack{s=s \\ \vartheta=0, \pi}} = 0 \quad \text{for all } s. \end{aligned}$$

Introducing (10), (11), (12) into eq.(9) we reduce the partial differential equation to:

$$\begin{aligned} \vartheta = 0, \pi \quad & \left(\frac{\partial r_o}{\partial s} \right)^2 + (1 - \frac{r_o}{\varrho})^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 + (1 - \frac{r}{\varrho})^2 \\ s = s_\nu \quad & (1 - \frac{r_o}{\varrho} \cos \vartheta)^2 = (1 - \frac{r}{\varrho} \cos \vartheta)^2. \end{aligned}$$

From this it follows that the equilibrium torus $r(s, \vartheta)$ coincides with the auxiliary torus along these four lines. In a more exact way we also can get this result by starting from the system of characteristic equations of eq.(9). If we take the special ansatz $\phi = \phi(s)$ eq.(9) is reduced to the differential equation

used in \square_1 , where the streamlines lie in the plane $s = \text{const}$. Choosing the parameters r_H , a , n in a suitable way we can get regions of favourable and unfavourable curvature along each magnetic field line, while in those former calculations the outer line C has no regions of favourable curvature. The difference between $r(s, \psi)$ and $r(s, \psi + \delta\psi)$ is of order r_0/μ . If we consider an infinitely large torus ($1/\mu = 0$) then both surfaces must coincide; this can easily be seen from eq.(9) with $1/\mu = 0$.

Stability of M-and-S surfaces

To consider interchange instabilities we start from the energy principle \square_2 and refer to a paper of R.Lüst und E.Martensen \square_7 . These authors derive for the change of energy

$$(13) \quad \begin{aligned} \delta W &= \frac{B^2}{8\pi} \iint_S \xi_n \frac{1}{\mu} df + \frac{1}{8\pi} \iint_S \text{Div}(\xi_n \vec{B}) \phi^* df \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{1,k}^2 L_{ik}^{(-1)} \iint_S \xi_n (\vec{B} \cdot \vec{Y}_1) df \iint_S \xi_n (\vec{B} \cdot \vec{Y}_k) df \end{aligned}$$

$\vec{\xi}$ = perturbation vector (with $\text{div } \vec{\xi} = 0$); ξ_n = normal component on S ;
 X = curvature of the field line.

ϕ^* is defined by: $\Delta \phi^* = 0$ in V ; $\frac{\partial \phi^*}{\partial n} = \text{Div}(\xi_n \vec{B})$ on S , $\frac{\partial \phi^*}{\partial n} = 0$ on F .

\vec{Y}_1, \vec{Y}_2 are two magnetic fields with no components normal to the surfaces S and F ($\vec{Y}_n = 0$). $L^{(-1)}$ is the inverse induction matrix. (For the geometry see fig.3.)

Now interchanges are perturbations which leave the magnetic field unaltered. These terms are:

$$\begin{aligned} \delta W_a^{(1)} &= \frac{1}{8\pi} \iint_S \text{Div}(\xi_n \vec{B}) \phi^* df \\ \delta W_a^{(2)} &= \frac{1}{2} \sum_{1,k} L_{ik}^{(-1)} \iint_S \xi_n (\vec{B} \cdot \vec{Y}_1) df \iint_S \xi_n (\vec{B} \cdot \vec{Y}_k) df . \end{aligned}$$

Each term is positive because $L^{(-1)}$ is a positive definite matrix and

$$\delta W_a^{(1)} = \frac{1}{8\pi} \iiint_V (\text{grad } \phi^*)^2 d^3x .$$

Therefore each term must vanish separately for an interchange. The first term $\delta W_a^{(1)}$ vanishes only if the condition

$$(14) \quad \text{Div } \xi_n \vec{B} = 0$$

is satisfied. But then the second term vanishes too. To prove this we introduce an appropriate coordinate system. We take the streamlines $\phi = \text{const.}$ and the field lines $\psi = \text{const.}$ as a new set of parameter lines on S . This leads to the general form of the line element

$$(15) \quad (d\ell)^2 = (d\phi)^2 + \frac{1}{\mu^2} (d\psi)^2 .$$

Writing the surface divergence Div in this special coordinate system we can solve eq.(14) and we obtain

$$(16) \quad \xi_n = \mu(\phi, \psi) F(\psi) .$$

Here $F(\psi)$ is an arbitrary function of ψ with a vanishing mean value.

$$(17) \quad \iint_S \xi_n df = 0 \longrightarrow \int_F(\psi) d\psi = 0 .$$

As it can be seen from eq.(15) $d = 1/\mu$ is a measure for the distance between two magnetic field lines ψ and $\psi + \delta\psi$.

From physical reasons a perturbation ξ_n must be continuous; therefore eq.(16) makes no sense if the field lines are ergodic on the equilibrium surface. For a pure interchange to be possible the field lines must be closed. In this case we cut the surface S following field lines and streamlines in such a way that the surface S becomes simply connected. Under these conditions one can show that the second part $\delta W_a^{(2)}$ vanishes too. Because of the boundary condition for \vec{Y}_1 ,

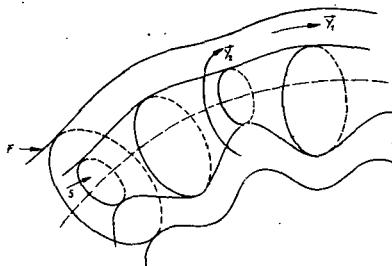


FIG. 3. Plasma and conducting coil F

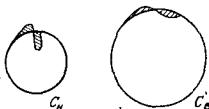


FIG. 4. Cross section of the interchanging flux tubes

these fields can ^a be represented as surface gradients: $\vec{Y}_1 = \text{Grad } \phi_1$. ϕ_1 has the same topological properties as $\phi(r, s)$ [eq.(7)]. Then using partial integration and Gauß's theorem together with eq.(15), (16), (17) one can show that all the integrals $\int \epsilon_n (\vec{B} \cdot \vec{Y}_1) d\tau$ df vanish.

With these special interchange perturbations the whole change of energy is

$$\delta W = \frac{B^2}{8\pi} \int F^2(\psi) \int \mu(\psi, \theta) \chi(\psi, \theta) d\theta .$$

Therefore

$$(18) \quad G(\psi) = \int \mu(\theta, \psi) \chi(\psi, \theta) d\theta > 0$$

is a necessary and sufficient criterion for stability against interchanges. Along each magnetic field line there must be sufficiently enough favourable curvature to make $G(\psi)$ positive. It can easily be seen that this condition is not fulfilled by the original M-and-S torus [1], because the outer contour C_a has no regions of favourable curvature. The general expression for the interchange perturbation eq.(16) depends on the distance of the magnetic field lines. If these run together in a region of favourable curvature, this region has a heavier weight in $G(\psi)$ than a region with unfavourable curvature. As already mentioned these different weights can be understood arising from the constant cross section of the interchanging flux tubes (fig. 4).

The criterion (18) shall be used to get a picture of a stable M-and-S torus. The function $G(\psi)$ can be calculated approximately for the inner and outer contour C_a and C_b since here the curvature is known, and we use the torus $r_o(s, \theta) = r_H + a/2(1 - \cos 2\pi s)$ to calculate μ . The field line C_a seems to be the most unstable line on S , therefore we must make $G(\psi)$ positive for this line. In the limit of large aspect ratio ($\varrho = 1$, $r_H \ll 1$) we obtain the final result

$$(19) \quad a n^2 \frac{a}{a + 2r_H} > 1 .$$

The picture (fig. 5) shows the contour of a M-and-S torus which fulfills condition (19).

In the case of a torus with circular cross section $r(s, \theta) = r_o = \text{const.}$ the problem can be solved completely. The calculation is straightforward and shall not be given here. The equilibrium equation (6) is solved for $\phi(s, \theta)$ by separation of variables. The function μ and the curvature of the field lines are calculated to obtain $G(\psi)$, which is const. for all field lines. The result is that there is

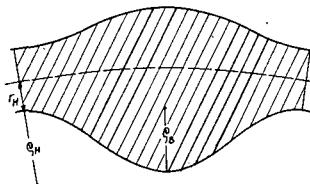


FIG. 5. Contours of a M-and-S torus stable against pure interchanges



FIG. 6. Torus with circular cross-section

a small region where $G(\psi)$ can be positive. This can be seen in the following way: taking the geometry and the plasma pressure fixed we have a set of possible equilibria on S . The two limiting cases are the toroidal z-pinch (magnetic field lines are closed around the short way) and the minimum rotational transform of the field lines. (The field lines are almost parallel to the inner contour C_1). These two cases are shown in fig. 6.

In the latter case the field lines pass a region with favourable curvature around C_1 , and interchanges will not occur. The final result is:

$$1 - \alpha - \frac{2}{7} \alpha < \frac{I_{\text{mer}}}{2\pi R_0 \sqrt{8\pi p}} \leq 1 - \alpha$$

$\alpha = r_0/R_0$ = aspect ratio if the torus. ($\alpha \ll 1$)

At the upper limit equilibrium is lost and the lower limit stability is lost. The effect depends on the torus curvature. A similar result was obtained by C. Mercier [8] and A.A. Ware [9] in the case of volume currents.

Concluding remarks

Formula (18) is quite general and can be applied to any equilibrium surface with closed field lines. It has a close analogy to the well-known criterion

$$(20) \quad \delta \int \frac{d\ell}{B} = 0$$

which holds for a low- β -plasma. One can calculate the variations $\delta \int \frac{d\ell}{B}$ quite generally and the result (under the assumption: $\text{rot } B = 0$) is

$$(21) \quad \delta \int \frac{d\ell}{B} = - \int \frac{\mu d\ell}{\zeta_n B^2}.$$

$1/\mu$ is the distance of the field lines on the surface $p = \text{const.}$, $1/\zeta_n$ is the normal curvature of the field lines. A special case of eq.(21) is calculated in [8]. Formally we obtain the criterion (18) from (20) with $B = \text{const.}$ on S although here β is not small and strong currents are present. The results show that it is possible to prohibit interchange perturbations under certain circumstances. If the perturbation has a finite wavelength along the field lines, the change of field energy is not zero and always provides a positive part to W . But to calculate this one must know the magnetic field B in the vacuum region and the conducting surface F .

This was done in the limit $1/R \rightarrow 0$ (R = torus radius) and the following results were obtained:

The M-and-S-torus is unstable to disturbances, which are very similar to interchanges, namely to flutes with constant depth along the field lines.

$$\xi_r = \xi_0 \sin m\psi \quad m = 1, 2, \dots$$

$m = 1$ is stable but all higher m are unstable. But at high values of m the wavelength perpendicular to the magnetic field becomes comparable to the ion Larmor radius and the Larmor radius stabilization could be effective. Therefore it seems that the $m = 2$ or $m = 3$ disturbance is the most dangerous one. The growth rate is estimated to be about one half of the growth rate calculated with the maximum unfavourable curvature.

R E F E R E N C E S

- [1] MEYER, F. and SCHMIDT, H.U., Z.f.Naturf. 13a (1958) 1005.
- [2] BERNSTEIN, J.B. et al., Proc. Roy. Soc. A 244 (1958) 17.
- [3] ROSENBLUTH, N.A. et al., Nucl. Fus. Suppl. Part 1 (1962) 143.
- [4] GARAEDIAN, P.R., Partial Differential Equations, Wiley, New York (1964).
- [5] KIPPENHABN, R., Z.f.Naturf. 13a (1958) 260.
- [6] KRUSKAL, M.D. and KULSRUD, R.M., Phys. of Fluids I 4 (1958) 265.
- [7] LIJST, R. and MARTENSEN, E., Z.f.Naturf. 15a (1960) 706.
- [8] MERCIER, C., Nucl. Fusion Suppl. Part 2 (1962) 801.
- [9] WARE, A.A., Phys. of Fluids 7 12 (1964) 2006.
- [10] ROSENBLUTH, M.N. and LONGMIRE, C., Annals of Physics 1 (1957) 120.

DISCUSSION

R. M. KULSRUD: How non-localized must the perturbation be in order to be stable?

H. WOBIG: Along the lines the wave length must be infinite, but it can be anything across the lines.



INSTABILITY OF A ROTATING PLASMA FROM THE TWO-FLUID EQUATIONS INCLUDING FINITE RADIUS OF GYRATION EFFECTS

G. BERGE
UNIVERSITY OF BERGEN,
NORWAY

Abstract — Résumé — Аннотация — Resumen

INSTABILITY OF A ROTATING PLASMA FROM THE TWO-FLUID EQUATIONS INCLUDING FINITE RADIUS OF GYRATION EFFECTS. The phenomenon of rotation and subsequent instability of a plasma has been the subject of many investigations. The inclusion of effects of the finite radius of gyration has been discussed by Rosenbluth et al. in a fundamental work on this problem, based on Vlasov's equation. Taylor has treated the same problem from a macroscopic point of view, by using ordinary hydrodynamic equations. In this investigation we try to give a more rigorous and complete macroscopic treatment of this problem that is based on the two-fluid equations for a plasma. The finite radius of gyration effects for ions are included in the pressure tensor for this particle species. The pressure tensor which is used is that given by Roberts and Taylor.

We start with a fairly thorough discussion of the model. The equations governing the perturbed state are analysed by the methods of normal modes in time and in the azimuthal co-ordinate. We are then left with a set of ordinary differential equations in the variable r , where r is a radial distance in the plasma cylinder. This set is solved consistently as an eigenvalue problem when we neglect terms of order higher than one in the parameter $\omega/\omega_i \ll 1$, where ω is the characteristic frequency of the system and ω_i the frequency of gyration for ions. The eigenvalue problem is converted into a standard one, and solved. Moreover, the "universal mode" discussed by Taylor appears as a special case of the more general solution, and we are able to show that it is the most unstable mode of motion. In spite of many approximations, as for instance the low- β approximation, the present investigation should put a fairly firm foundation for further investigations along the same line.

INSTABILITE D'UN PLASMA EN ROTATION A PARTIR DES EQUATIONS A DEUX FLUIDES ENGLOBANT LES EFFETS D'UNE GIRATION A RAYON FINI. Les phénomènes de la rotation d'un plasma et de l'instabilité qui en résulte ont fait l'objet de nombreuses recherches. L'inclusion des effets d'une giration à rayon fini a été étudiée par Rosenbluth et ses collaborateurs dans un mémoire fondamental sur la question, reposant sur l'équation de Vlasov. Taylor a étudié le même problème d'un point de vue macroscopique, au moyen d'équations hydrodynamiques ordinaires. L'auteur du mémoire s'efforce d'étudier de manière plus rigoureuse et complète les données macroscopiques de ce problème à partir des équations à deux fluides, représentant un plasma. Les effets du rayon de giration fini sur les ions entrent en ligne de compte dans le tenseur de pression pour ce genre de particules. Le tenseur de pression utilisé est celui de Roberts et Taylor.

L'auteur commence par étudier de manière assez approfondie le modèle choisi. Les équations régissant l'état perturbé sont analysées par les méthodes des modes normaux en fonction du temps et des coordonnées azimutales. On se trouve alors en présence d'un groupe d'équations différentielles ordinaires à variable r , où r est une distance radiale dans le plasma cylindrique. Ce groupe d'équations se résout en un problème de valeur propre si l'on néglige les termes supérieurs à 1 dans le paramètre $\omega/\omega_i \ll 1$, où ω est la fréquence caractéristique du système et ω_i la fréquence de giration des ions. Le problème de valeur propre est transformé en un problème normal, et résolu. De plus, le «mode universel» étudié par Taylor paraît constituer un cas particulier d'une solution plus générale, et les auteurs peuvent montrer qu'il s'agit du mode le plus instable de mouvement. Malgré de nombreuses approximations, par exemple l'approximation de β faible, les travaux décrits devraient fournir une base solide aux recherches qui pourront être entreprises à l'avenir dans la même direction.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ НА ОСНОВЕ ДВУХЖИДКОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С УЧЕТОМ КОНЕЧНОГО ГИРОСКОПИЧЕСКОГО РАДИУСА. Явление вращения

и последующей неустойчивости плазмы было предметом многих исследований. Учет влияния конечного гирокопического радиуса рассматривался Розенблютом и другими в фундаментальной работе по этой проблеме на основе уравнения Власова. Тейлор рассматривал ту же проблему с макроскопической точки зрения, используя обычные гидродинамические уравнения. Сделана попытка дать более строгое и полное макроскопическое рассмотрение этой проблемы, основанное на двухжидкостных уравнениях для плазмы. Конечность гирокопического радиуса ионов учитывается тензором давления данного вида частиц. Используется тензор давления, приводимый Робертсоном и Тейлором.

Уравнения, описывающие возмущенное состояние, анализируются методами разложения на нормальные колебания по времени и по азимуту. Затем остается система обычных дифференциальных уравнений с переменной r , где r — радиальное расстояние в плазменном цилиндре. Эта система решается последовательно как проблема, имеющая собственное значение, если мы пренебрегаем членами выше первого порядка по параметру $\omega/\omega_i \ll 1$, где ω — характерная частота системы и ω_i — гиро-частота ионов. Проблема, имеющая собственное значение, превращается в стандартную и решается. Более того, "универсальные колебания", рассмотренные Тейлором, представляются частным случаем более общего решения, и мы можем показать, что они являются наиболее неустойчивыми колебаниями. Несмотря на многие приближения, как, например, приближение низкого β , настоящее исследование должно послужить достаточно прочной основой для дальнейших исследований в этом направлении.

INESTABILIDAD DE UN PLASMA EN ROTACION A PARTIR DE LAS ECUACIONES DE LOS FLUIDOS INCLUYENDO LOS EFECTOS DE UN RADIO DE GIRO FINITO. Los fenómenos de rotación y la subsiguiente inestabilidad de un plasma han sido tema de numerosas investigaciones. Rosenbluth y colaboradores, en un trabajo fundamental basado sobre la ecuación de Vlasov, han analizado los efectos de un radio de giro finito. Taylor ha tratado el mismo problema desde un punto de vista macroscópico, utilizando ecuaciones hidrodinámicas corrientes. En la presente memoria, el autor procura estudiar de manera más rigurosa y más completa los datos macroscópicos de este problema, a partir de las ecuaciones de dos fluidos que representan un plasma. Los efectos de un radio de giro finito sobre los iones se incluyen en el tensor de presión correspondiente a esta clase de partículas. El tensor de presión usado es el dado por Roberts y Taylor.

El autor comienza estudiando a fondo el modelo escogido. Analiza las ecuaciones que rigen el estado de perturbación usando los métodos de los modos normales en función del tiempo y de las coordenadas azimutales. Obtiene entonces un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de variable r , siendo r una distancia radial en el cilindro de plasma. Este conjunto de ecuaciones se resuelve de manera coherente como un problema de valor propio cuando se desprecian los términos de orden superior a la unidad en el parámetro $\omega/\omega_i \ll 1$, donde ω es la frecuencia característica del sistema y ω_i la frecuencia de giro de los iones. El problema de valor propio se convierte en un problema corriente y se resuelve. Además, el «modo universal» analizado por Taylor aparece como un caso particular de la solución más general; el autor demuestra que es el modo de movimiento más inestable. Pese a numerosas aproximaciones, como por ejemplo la aproximación de bajo valor de β , el presente estudio debería constituir un fundamento firme para las investigaciones que en lo futuro puedan emprenderse en la misma dirección.

1. Introduction.

In the recent years considerable interest has been offered to stability problems where the effects of density gradients and finite radius of gyration for ions are included. In a fundamental paper by Rosenbluth, Krall and Rostoker [1] a treatment based upon the solution of Vlasov's equation is given in the low β approximation. Here and elsewhere in the present investigation β is the ratio between particle pressure and magnetic "pressure". These authors are mainly dealing with two independent problems. First a plane problem with an infinite plasma in a uniform external force field is considered. The second part deals with a rotating plasma confined by a magnetic field, i.e., a cylindrical problem.

The plane problem was reconsidered by Roberts and Taylor [2], who showed that the same results could be obtained in the MHD approximation by modifying the pressure tensor and the generalized Ohm's law. Among other authors dealing with this problem, Lehnert [3, 4, 5, 6] has written several papers on the same topic based upon the two fluid equations. By use of the same equations this problem has also been considered by the author [7] with a special emphasis on perturbations along the density gradient.

The cylindrical problem has, to the authors's knowledge, not yet been given any rigorous treatment based upon macroscopic equations. Taylor [8], however, discusses the problem briefly in an appendix and suggests that the stability condition obtained by Rosenbluth et.al. may be valid also in situations where the assumption of low β is not fulfilled. Guided by the physics of the phenomena and the results obtained from a simple MHD model, he restricts the study to a particular mode called "the universal mode" for rotational instability.

In the present investigation we discuss the stability of an infinitely long plasma cylinder which is rotating rigidly around the axis of symmetry with a constant angular velocity Ω . A more complete discussion of this problem from a macroscopic point of view is given. We are actually able to show that the particular mode, mentioned above, exists as a special case of the more general solution obtained here. Moreover this mode is shown to be the most unstable mode. The present analysis is among other approximations also subjected to the one of low β , and is done as follows: In Sec. 2 we state the equations of our model and discuss the assumptions and approximations. Sec. 3 deals with the equilibrium configuration with a special emphasis on the validity of the three following approximations: (i) Quasineutrality and its compatibility with a divergent electric field in equilibrium; (ii) zero electron mass in the acceleration terms in the equation of motion for electrons; (iii) homogeneous magnetic field and non-zero macroscopic current density in equilibrium.

A set of equations describing the perturbed state is obtained in Sec. 4 and solved as an eigenvalue problem in Sec. 5. In Sec. 6 the eigenvalues and solutions are discussed and the results are compared with those obtained by other authors.

2. The approximations, assumptions and basic equations.

The present analysis is based on the two fluid equations for a fully ionized plasma. The coupling between the ions and electrons is assumed to be due to interactions through the electric field only. Since $\beta \ll 1$ we can treat the magnetic field \vec{B} as a constant produced by external currents only (see Sec. 3). When using one of Maxwell's equations, this gives $\nabla \times \delta \vec{E} = 0 \iff \delta \vec{E} = -\nabla \psi$, where $\delta \vec{E}$ is the perturbed electric field and ψ the corresponding electric potential.

Further we assume the plasma to be quasi neutral, thus, since we do not use the Poisson equation we can put $n_i = n_e$ in the equations we are using, where n_i and n_e are the densities and indices i and e refer to ions and electrons, respectively (see Eq. (3.9)).

We also introduce a parameter $\epsilon = \omega/\omega_i$, where ω is the characteristic frequency of the system and ω_i is the gyro frequency for ions. The present investigation is limited to $\epsilon \ll 1$, because only zeroth and first order terms are retained when series expansions are performed in ϵ .

Finally we assume $(a_i/r_o)^2$ and Ω/ω_i to be of the same order of magnitude as ϵ , where a_i is the mean radius of gyration for ions and r_o is of the same order of magnitude as the radius in the plasma cylinder (see Eq. (3.3)).

The set of equations forming the starting point for our investigation is:

$$(2.1) n_i m_i \left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \nabla \vec{v}_i \right) = e n_i (\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B}) - \nabla \cdot \vec{\pi}_i ,$$

$$(2.2) n_e m_e \left(\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + \vec{v}_e \cdot \nabla \vec{v}_e \right) = -e n_e (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) - \nabla \cdot \vec{\pi}_e ,$$

$$(2.3) \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \vec{v}_i) = 0 ,$$

$$(2.4) \frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{v}_e) = 0,$$

$$(2.5) \nabla \times \delta \vec{E} = 0 \text{ or } \vec{E} = \vec{E}_0 - \nabla \psi,$$

where \vec{v}_1 and \vec{v}_e are the macroscopic velocities for the two fluid components, m_1 and m_e the particle masses, $\vec{\pi}_1$ and $\vec{\pi}_e$ the pressure tensors, \vec{E}_0 the equilibrium electric field, \vec{B} the magnetic field and e the numerical value of the elementary charge. MKSA units are used.

We now introduce cylindrical coordinates r, ϕ, z with unit vectors $\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$, respectively. We assume $\vec{B} = B \vec{e}_\phi$ and that all quantities are independent of z . The components of the divergence of the pressure tensor for ions are

$$(2.6) (\nabla \cdot \vec{\pi}_1)_r = \frac{\partial p_{11}}{\partial r} - v m_1 \left\{ \frac{\partial n_1}{\partial r} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial n_1}{\partial \phi} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{1}{r} v_r \right) + n_1 \left(\nabla_\perp^2 v_\phi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r^2} \right) \right\},$$

$$(2.7) (\nabla \cdot \vec{\pi}_1)_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial p_{11}}{\partial \phi} + v m_1 \left\{ \frac{\partial n_1}{\partial r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{v_r}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial n_1}{\partial \phi} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} v_\phi \right) + n_1 \left(\nabla_\perp^2 v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{v_r}{r^2} \right) \right\}.$$

$$(2.8) v = \frac{1}{4} a_1^2 \omega_1, \quad \nabla_\perp^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

This tensor is a special case of a tensor first derived by Chapman and Cowling [9] and later discussed by Thompson [10]. In order to include finite gyro-radius effects in macroscopic equations, it was used for the first time by Roberts and Taylor [2]. In these references the tensor appears in Cartesian coordinates only. The transformation to cylindrical coordinates is performed in Ref. [11]. Here p_{11} is the scalar particle pressure for ions perpendicular to \vec{B} . The pressure tensor for electrons is assumed to be scalar p_{e1} , since the mean radius of gyration for electrons is much less than for ions.

In order to close this set of equations we assume the scalar pressures p_{11} and p_{e1} to obey the ideal gas equation.

$$(2.9) p_{1,e1} = n_{1,e} m_{1,e} \theta_{1,e}, \quad \theta_{1,e} = \frac{1}{2} a_{1,e}^2 \omega_{1,e}^2$$

with $\theta_{1,e} = \text{const}$. The assumption $\theta_{1,e} = \text{constant}$ is reasonable since the magnetic moment for each particle is constant at least to terms of order e^2 (cf. Spitzer [12] p.9.).

The acceleration terms of Eq. (2.1) in cylindrical coordinates are

$$(2.10) \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \nabla \vec{v}_1 \approx \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} - 2\Omega v_\phi - \Omega^2 r + \Omega \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + 2\Omega v_r + \Omega \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) \vec{e}_\phi,$$

where $\vec{v}_1 = v_r \vec{e}_r + (\Omega r + v_\phi) \vec{e}_\phi$ and Eq. (2.10) is correct to the first order in the perturbed velocity components v_r and v_ϕ . We recognize the Coriolis and centrifugal acceleration terms, corresponding to a frame of reference rotating with the angular velocity Ω . The two additional terms appear because we refer the motion to a coordinate system at rest in the laboratory. These terms represent the difference between the local time derivatives in a fixed and a rotating frame of reference, and give a Doppler shift in ω (see Sec. 6.11) when going from the rotating system to that being at rest.

In the equation of motion for electrons, Eq. (2.2) we simply neglect the acceleration terms. In equilibrium the first of these terms $n_e m_e \partial v / \partial t$ is zero by definition. For the perturbed state

we can consider a series expansion in ω/ω_e , where ω_e is the gyro-frequency for electrons, and it turns out that this term usually becomes less important than second order terms in ϵ . The validity of neglecting the term $n_{eo}^m e \cdot \nabla v_{eo}$ is discussed in the subsequent section (Eq. 3.8).

3. Equilibrium.

In the steady state the ion velocity is given by

$$(3.1) \quad v_{10} = \Omega r \hat{e}_\phi .$$

Since $v_r = v_\theta = 0$ by definition, the divergence of the pressure tensor, Eqs. (2.6) and (2.7), reduces to

$$(3.2) \quad (\nabla \cdot \vec{\pi}_1)_r = \frac{\partial p_{10}}{\partial r}, \quad (\nabla \cdot \vec{\pi}_1)_\phi = 0 ,$$

where the index zero refers to equilibrium. To determine the density distribution in equilibrium by solving the governing equations subjected to proper boundary conditions is very difficult. We therefore simply assume the density distribution to be given a priori as

$$(3.3) \quad n_{eo} = n_{10} = n_0 \exp \left[- \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] .$$

This is a Gaussian density profile with n_0 constant and equal to the density at $r = 0$, i.e., on the axis. Further r_0 is a characteristic distance of the order of magnitude of the plasma radius. It is shown in Ref. [1] that such an equilibrium density distribution is a solution of Vlasov's equation,

By Eqs. (3.1) and (3.3) we obtain $\nabla \cdot (n_{10} v_{10}) = 0$, hence Eq. (2.3) is satisfied because $\frac{\partial n_{10}}{\partial t} = 0$.

From Eqs. (2.9) and (3.3) we get

$$(3.4) \quad p_{10} = n_0 m_1 \theta_1 \exp \left[- \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] .$$

Using this equation we obtain from Eq. (2.1)

$$(3.5) \quad E_{or} = - B \omega_1 r \left[\frac{\Omega}{\omega_1} + \left(\frac{\Omega}{\omega_1} \right)^2 + \left(\frac{a_1}{r_0} \right)^2 \right], \quad E_{o\phi} = 0 .$$

In Eq. (2.2) we first neglect the term $n_{eo}^m e \cdot \vec{v}_{eo} \cdot \nabla v_{eo}$, and afterwards justify this approximation, hence

$$(3.6) \quad -en_{eo} (E_{or} \hat{e}_r + \vec{v}_{eo} \times B) - \nabla p_{eo} = 0 .$$

We assume $\vec{v}_{eo} \cdot \hat{e}_z = \vec{v}_{eo} \cdot \hat{e}_r = 0$, and Eq. (3.6) gives

$$(3.7) \quad n_{eo} \vec{v}_{eo} = \frac{\nabla p_{eo} \times B}{eB^2} - \frac{n_{eo} E_{or} \hat{e}_\phi}{B}, \quad \frac{\partial p_{eo}}{\partial \phi} = 0 ,$$

from which we obtain $\nabla \cdot (n_{eo} \vec{v}_{eo}) = 0$. Eq. (2.4) is therefore fulfilled since $\frac{\partial n_{eo}}{\partial t} = 0$.

The leading term for \vec{v}_{eo} from Eq. (3.7) is $-E_{or}/B \hat{e}_\phi$, and $n_{eo}^m e \cdot \vec{v}_{eo} \cdot \nabla v_{eo} \approx -n_{eo}^m e \left(E_{or}/B \right) \frac{1}{r} \hat{e}_r$.

The ratio between the magnitudes of this term and the first term in Eq. (3.6) becomes

$$(3.8) \quad \frac{|n_{eo}^m e \cdot \vec{v}_{eo} \cdot \nabla v_{eo}|}{|-en_{eo} E_{or} \hat{e}_r|} \approx \frac{\omega_1}{\omega_e} \left[\frac{\Omega}{\omega_1} + \left(\frac{\Omega}{\omega_1} \right)^2 + \left(\frac{a_1}{r_0} \right)^2 \right] \lesssim \epsilon^2 ,$$

where Eq. (3.5) and the assumptions stated in Sec. 2 have been used. Thus, in our approximation we must neglect $n_{eo}^m e \cdot \vec{v}_{eo} \cdot \nabla v_{eo}$.

The assumption of quasi neutrality is connected to Eq. (3.5) through one of Maxwell's equations. Thus from $\nabla \cdot \vec{E} = (e/\epsilon_0)(n_{10} - n_{eo})$, we get

$$(3.9) \quad \frac{|n_{10} - n_{eo}|}{n_{10}} \approx 2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_{p1}} \right)^2 \epsilon \approx 2 \left(\frac{\lambda_{D1}}{a_1} \right)^2 \epsilon ,$$

where ϵ_0 is the permittivity of free space, λ_{D1} is the Debye length and ω_{p1} the plasma frequency for ions. Eq. (3.9)

indicates that as long as ω_{pi} exceeds ω_1 , i.e., a_1 exceeds λ_{D1} by an order of magnitude, the quasi neutrality is preserved to a high degree of accuracy. However, Eq. (3.9) indicates that in the outer region of the plasma cylinder quasi neutrality is not preserved. But this may also be only an apparent inconsistency in our theory, since there is probably a break down of the whole fluid description in this region. And since the main body of the plasma is situated in a region where quasi neutrality is preserved, we assume that the problems arising from possible charge separations in the outer region of the plasma cylinder do not matter for the system as a whole. This question, however, is open for discussion.

Finally we note that ions as well as electrons have nonzero mean velocities in equilibrium, but this does not affect the space charges. The difference between these velocities, however, gives a current density J which affects the magnetic field according to Maxwell's equation $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 J$, where the displacement current is neglected and μ_0 is the magnetic permeability of free space. Since $J = en_1(v_{r0} - v_{\phi0})$, we obtain the characteristic length L_{CB} in the radial direction for the magnetic field at $r = r_0$, by using Eqs. (3.1), (3.3) and (3.7): $L_{CB} = B/|\frac{dB}{dr}|_{r=r_0} \approx r_0/\beta$.

This shows that $L_{CB} \gg r_0$, and therefore we can neglect the space dependence of B , in agreement with our previous assumptions.

Thus the equilibrium configuration should be well established, as we have found all our assumptions reasonable and consistent with the equations governing the system. In the following section we shall study the stability of this equilibrium.

4. The equations for the perturbed state.

We are now able to develop a set of equations for the perturbed system. Starting from Eq. (2.1) and using Eqs. (2.6), (2.7) and (2.10) we obtain the following two equations, for the radial and azimuthal direction respectively,

$$(4.1) \quad n_1 m_1 \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} - 2\Omega v_\phi + \Omega \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \Omega^2 r \right) = \\ en_1 \left(E_{r0} - \frac{\partial \psi}{\partial r} + (v_\phi + \Omega r) B \right) - (\nabla \cdot \vec{v}_1)_r ,$$

$$(4.2) \quad n_1 m_1 \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + 2v_r \Omega + \Omega \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) = -en_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + v_r B \right) - (\nabla \cdot \vec{v}_1)_\phi .$$

We put $n_1 = n_{10} + n$, where n is the perturbation in the density. Using this and Eq. (3.5) we obtain Eq. (4.3) by linearizing Eq. (4.1) in n , v_r , v_ϕ and ψ , and from Eq. (4.2) we get in the same way Eq. (4.4).

$$(4.3) \quad \frac{\partial v_r}{\partial t} - 2\Omega v_\phi + \Omega \frac{\partial v_r}{\partial \phi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \theta_1 \left(\frac{n}{n_{10}} \right) + \frac{e}{m_1} \psi \right\} + \frac{eB}{m_1} v_\phi \\ + v \left\{ \frac{1}{n_{10}} \frac{\partial n_{10}}{\partial r} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} \right) + \nabla_1^2 v_\phi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r^2} \right\} ,$$

$$(4.4) \quad \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + 2v_r \Omega + \Omega \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \theta_1 \left(\frac{n}{n_{10}} \right) + \frac{e}{m_1} \psi \right\} - \frac{eB}{m_1} v_r \\ - v \left\{ \frac{1}{n_{10}} \frac{\partial n_{10}}{\partial r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{v_r}{r} \right) + \nabla_1^2 v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{v_r}{r^2} \right\} .$$

In Eq. (2.2) linearized we can now neglect the inertia terms as mentioned, and since $\nabla \cdot \vec{v}_e = \nabla p_e$ we get

$$(4.5) \quad en_e (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) + \nabla p_e = 0 .$$

This is an equation similar to the generalized Ohm's law, cf. Spitzer [12] Eq. (2.12). We note that Eq. (4.5) is formally identical with Eq. (3.6). By solving Eq. (4.5) with respect to $n_e v_e$ we obtain an expression - formally identical with the first of Eqs. (3.7) - which we put into the equation of continuity, Eq.

(2.4), and eliminate \vec{v} . The resulting equation can in the linearized form be simplified by using Eq. (3.5). We obtain

$$(4.6) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \omega_1 \left(\frac{\Omega}{\omega_1} + \left(\frac{\Omega}{\omega_1} \right)^2 + \left(\frac{a_1}{r_o} \right)^2 \right) \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \frac{2}{r_o^2} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0 ,$$

where we have introduced a dimensionless density $\rho = n/n_{10}$. Linearizing Eq. (2.3), we obtain

$$(4.7) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} v_r \left(1 - 2 \left(\frac{r}{r_o} \right)^2 \right) + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0 .$$

Eqs. (4.3), (4.4), (4.6) and (4.7) constitute the set of equations we discuss more detailed in the subsequent sections.

5. Solution of the equations.

We assume the perturbations to behave as

$$(5.1) \quad x(r, \varphi, t) = R(r) e^{i(\omega t + m\varphi)} ,$$

and introduce new variables by

$$(5.2) \quad v_r = v , \quad iv_\varphi = u , \quad \frac{r}{r_o} = x \Rightarrow r_o \frac{d}{dr} = \frac{d}{dx} .$$

This results in four simultaneous ordinary differential equations.

From Eqs. (4.6) and (4.7) combined we obtain an expression for $\theta_1 \rho + e\psi/m_1$, which substituted into Eqs. (4.3) and (4.4) gives

$$(5.3) \quad (a_1 x^2 + b_1) v + (a_2 x^2 + b_2) x \frac{dv}{dx} - \frac{a_2}{2} x^2 \frac{d^2 v}{dx^2} + (a_3 x^2 + b_3) u = 0 ,$$

$$(5.4) \quad (a_4 x^2 + b_4) v + c_1 (x^2 - 2) x \frac{dv}{dx} + c_1 x^2 \frac{d^2 v}{dx^2}$$

$$+ (a_5 x^2 + b_5) u + (a_6 x^2 + b_6) x \frac{du}{dx} - \frac{a_2}{2} x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 .$$

The coefficients are

$$(5.5) \quad a_1 = \epsilon \left(\frac{\bar{\omega}^2 - 1}{m\bar{\omega}} + \gamma \right) , \quad b_1 = \frac{1}{2} + \epsilon \left(m\delta - (m^2 + 1) \frac{\gamma}{2} \right) ,$$

$$a_2 = -\epsilon\gamma , \quad b_2 = \frac{1}{2} + \epsilon \left(m\delta + \frac{\gamma}{2} \right) ,$$

$$a_3 = \epsilon (\bar{\omega} + m\gamma) , \quad b_3 = \frac{m}{2} + \epsilon \left(m^2 \delta - m\gamma \right) ,$$

$$a_4 = \frac{1}{m} + \epsilon \left(2\delta + \bar{\omega} + m\gamma \right) , \quad b_4 = \frac{1}{2m} + \epsilon \left(\delta - m\gamma \right) ,$$

$$a_5 = 1 + \epsilon \left(\frac{2(\bar{\omega} - 1)}{m} + \gamma \right) , \quad b_5 = \frac{1}{2} + \epsilon \left(m\delta - (m^2 + 1) \frac{\gamma}{2} \right) ,$$

$$c_1 = -\frac{1}{2m} - \epsilon\delta , \quad b_6 = -\frac{1}{2} - \epsilon \left(m\delta - \frac{\gamma}{2} \right) ,$$

$$(5.6) \quad \bar{\omega} = 1 + \frac{\Omega}{m\bar{\omega}} , \quad \gamma = \frac{2v}{r_o^2 \omega} \quad \text{and} \quad \delta = \frac{(\bar{\omega} - 1)^2}{2m^2 \bar{\omega}} .$$

In series expansion in ϵ , γ and Ω/ω are considered to be of zeroth order. Eq. (5.3) is solved with respect to u , correct to the first order in ϵ . Using this to eliminate u from Eq. (5.4) we obtain

$$(5.7) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} + \left(-2 + \frac{3}{x^2} \right) x \frac{dv}{dx} + \left(\Gamma + \frac{1 - m^2}{x^2} \right) v = 0$$

where

$$(5.8) \quad \Gamma = \frac{-2}{\bar{\omega}(\bar{\omega} + 2m\gamma)} .$$

A detailed derivation of this equation is given in Ref. [11]. We now introduce new variables ξ and $\eta(\xi)$ by

$$(5.9) \quad v(x) = \xi^{\frac{1}{2}} (|m| - 1) \eta(\xi) , \quad \xi = x^2 .$$

Eq. (5.7) becomes

$$(5.10) \quad \xi \eta'' + (|m| + 1 - \xi) \eta' + \lambda \eta = 0 ,$$

where a prime denotes differentiation with respect to ξ and

$$(5.11) \quad \lambda = \frac{1}{2}(1 - |m| + \frac{1}{2}\Gamma)$$

Let the boundary conditions be: $v(x)$ is finite at $x = 0$, the kinetic energy density associated with the radial velocity component $\frac{1}{2}m^2 v(x)^2$, must decrease when x increases. Eq. (5.10) is a special case of the confluent hypergeometric differential equation which is discussed in standard books. Eq. (5.10) together with the boundary conditions above is an eigenvalue problem. Solutions exist if, and only if $\lambda = \lambda_\ell$, with

$$(5.12) \quad \lambda_\ell = \ell - |m|, (\ell = |m|, |m| + 1, \dots), m \neq 0,$$

where λ_ℓ are the eigenvalues. A proof is given in Ref. [11].

The eigenfunctions can be written in terms of associated Laguerre polynomials $L_\ell^{(|m|)}(\xi)$, where $\ell - |m|$ is the degree of the polynomial, or in terms of the confluent hypergeometric function. In terms of the former we have

$$(5.13) \quad v(x) = x^{|m|-1} L_\ell^{|m|}(x^2), (m \neq 0).$$

Eqs. (5.8), (5.11) and (5.12) yield

$$(5.14) \quad 1 - \frac{1}{\bar{\omega}(\bar{\omega}+2my)} = n,$$

where $n = 2\ell - |m|$ is a non negative integer.

Accordingly, there exists an infinity of modes in addition to the particular mode $\ell = |m|$, studied by Taylor [8]. A more detailed discussion will be given in the next section. We mention, however, in passing, that the confluent hypergeometric differential equation, written in normal form, is known as Whittaker's equation. In the paper by Rosenbluth et al. it is the latter form which is used as a basis of the study of the eigenvalue problem.

6. Discussion.

By substituting from Eqs. (5.6) in Eq. (5.14) we obtain

$$(6.1) \quad n\left(\frac{\omega}{m^2} + 1\right) = 1 - (n-1)\frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{r}\right)\frac{\omega}{\Omega} \pm \sqrt{\left(n-1\right)\frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{r}\right)\frac{\omega}{\Omega} - 1} - n.$$

We note from Eq. (6.1) that m appears only in the term $\frac{\omega}{m^2}$ and since n is a function of $|m|$, a change in sign for m only means that ω also changes sign. This is easily understood from Eq. (5.1).

Eq. (5.13) shows that it does not exist any solution for $m = 0$. In this case the perturbations would be in the radial direction, i.e., along the density gradient. It is interesting to note that in a plane problem discussed earlier by the author [7] (see Eq. (4.5)), the same result can be obtained for perturbations along the density gradient.

Although Eq. (5.13) provides a solution for $|m| = 1$ it must be excluded: By Eqs. (5.13) and (5.3), terms neglected in Eq. (2.10) are not finite on the axis, i.e., for $r = 0$. Moreover, v_ϕ and v_r are not singlevalued for $r = 0$. The restriction to be imposed on m is therefore $|m| \geq 2$, which by Eq. (5.12) implies $n \geq 2$ since $\ell \geq |m|$. Thus, the stability condition in our notations is

$$(6.2) \quad \frac{1 - \sqrt{n}}{2} < -\frac{\Omega r_0}{\omega_1^2 a_1^2} < \frac{1 + \sqrt{n}}{2}, \quad n \geq 2.$$

Eq. (3.5) can be rewritten as $(\Omega/\omega)^2 \epsilon + \Omega/\omega - W/\omega + 2\gamma = 0$ and to the zeroth order in ϵ we get

$$(6.3) \quad \Omega \approx W - \omega_1 \left(\frac{a_1}{r_0} \right)^2,$$

where W is an angular velocity associated with the radial electric field E_{or} , given by $W = -E_{or}/(Br)$. W is positive when the radial electric field is inward and, produces a drift velocity

* For the "universal mode," however, these terms cancel out.

in the positive, or counter clockwise direction, around the z-axis. From the well known formula for the diamagnetic velocity due to a pressure gradient it can be shown that the second term in the expression for Ω Eq. (6.3) is due to the diamagnetism of the ions. Using Eq. (6.3) in condition (6.2), we obtain after rearrangement condition (6.2) once more, but now with $-\Omega$ replaced by W . This shows that one should be very careful to distinguish between different rotational velocities in this problem.

(i) Comparison with the results of Rosenbluth et.al.

We note that if we substitute Eq. (6.3) in Eq. (6.1), we arrive to a result in agreement with Eq. (3.23) of Ref. [1], apart from a factor $1/2$ appearing in front of $(a_1/r_0)^2 \omega_1$, which is due to a different definition of a_1 ($\bar{a}_{j=1}^2 = (1/2)a_1^2$). But concerning the stability condition (6.2) there is a difference since we have imposed the restriction $n \geq 2$, while Rosenbluth et al. seem to accept the modes $m = 0$ and $|m| = 1$ in their treatment.

(ii) Comparison with J.B. Taylor's results.

We examine now in more detail the "universal mode" for a rotating plasma obtained by Taylor [8]. It turns out from condition (6.2) that for each value of m the most unstable mode is furnished by the least value of n , i.e., by the least value of l . Hence, by Eq. (5.12) the most unstable mode is given by $l = |m|$, and for this case Eqs. (5.13) and (5.3) simplify to give

$$(6.5) \quad v(x) = cx^{|m|-1}, \\ u(x) = -[1 + O(\epsilon^2)]v,$$

where c is an arbitrary constant and Eq. (5.14), with $|m| = l$ has been used. Thus, correct to the first order in ϵ , we obtain

$$(6.6) \quad v_r = c'(t, \varphi)r^{|m|-1}, \quad v_\varphi = iv_r,$$

This particular mode of motion is the "universal mode" discussed by Taylor [8], (see Eq. A19). Hence, we have shown in a rigorous mathematical way that the "universal mode" exists, and is the most unstable for rotational instability even when the effects of a finite radius of gyration are taken into account.

Let us turn back to our discussion of the angular frequency Ω , given approximately in Eq. (6.3). As far as we can see from the results of Taylor [8], Ω in his paper has the same meaning as our Ω . He points out, however, a difference in sign with the results of Rosenbluth et.al., and says that it is due to a definition. According to the results obtained here, expressed in Eqs. (6.2) and (6.3), there should be a difference in sign in this case, not due to the definition of the angular velocity associated with the ion diamagnetic current, but due to Ω , which is different from W as seen from Eq. (6.3). Except for this, Eq. (A.26) of Ref. [8] is seen to be in complete agreement with our Eq. (6.1) with $n = |m|$ ($l = |m| \Rightarrow n = |m|$) if the Doppler shift in the frequency ω mentioned in Sec. 2 is taken into account.

Acknowledgments.

The author is very grateful to Dr. J. Naze Tjøtta and Dr. S. Tjøtta for helpful discussions and valuable criticism. He would also like to thank Mr. K.B. Dysthe and Mr. A. Svardal for many stimulating discussions during the work.

References:

- [1] Rosenbluth, M.N., Krall, N.A., Rostoker, N., Nuclear Fusion, Suppl. part I (1962) 143.
- [2] Roberts, K.V. and Taylor, J.B., Phys. Rev. lett. 8 (1962) 197.
- [3] Lehner, B., Phys. Fluids 4 (1961) 847.
- [4] " Nuclear Fusion Suppl. part I (1962) 135.
- [5] " Phys. Fluids 5 (1962) 432.
- [6] " " Dynamics of Charged Particles". North-Holland Publishing Company (1964) 203.

- [7] Berge, G., Department of Applied Mathematics, University of Bergen, Report 2, (1964).
- [8] Taylor, J.B., Plasma Phys. (J. Nucl. Energy Part C) 4, (1962) 406.
- [9] Chapman, S. and Cowling, T.G., "The Mathematical Theory of Non-uniform gases". Cambridge Univ. press. (1960) 337.
- [10] Thompson, W.B., Reports on Progress in Physics, Phys. Soc., London, 24 (1961) 363.
- [11] Berge, G., Department of Applied Mathematics, University of Bergen, Report 6, (1965).
- [12] Spitzer, L., Physics of Fully Ionized Gases. Interscience Publishers (1956) 21.

DISCUSSION

H. LASHINSKY: To what extent are the results affected by the choice of the density distribution?

G. BERGE: I have not studied this problem for other density distributions.

M. G. HAINES: Firstly, I should like to say that the universal mode of instability can be arrived at without the assumptions of a particular density distribution and of low β . Then the stability criterion is a local stability criterion. In a high- β model, the $\vec{\nabla}B$ and centrifugal guiding centre drifts should be included. This is equivalent to using the full Ohm's law equation with Hall and $\vec{\nabla}P_e$ terms*.

Secondly, I should like to ask what energy equation was used in your paper.

G. BERGE: The equation of state for an ideal gas was used, with the assumption of constant temperature.

H. BREMMER: You assume at equilibrium an equation of state such that pressure is proportional to density. Is this equation of state preserved in the perturbed time-dependent case?

G. BERGE: Yes, as long as the magnetic moment is preserved, which is the case here. I would refer you to the comments following eq. 2.9 in the paper.

* Advances in Physics 14 (1965) 167.

CONFERENCE ON PLASMA PHYSICS AND CONTROLLED NUCLEAR FUSION RESEARCH

HELD AT THE CULHAM LABORATORY
(ABINGDON, BERKS., ENGLAND)
6-10 SEPTEMBER 1965

CHAIRMEN OF SESSIONS

Session I	Prof. HANNES ALFVÉN	Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden
Session II	Dr. PETER THONEMANN	Culham Laboratory, Abingdon, United Kingdom
Session III	Dr. BRUNO BRUNELLI	Laboratorio Gas Ionizzato, Frascati, Italy
Session IV	Dr. MARSHALL ROSENBLUTH	University of California (San Diego) La Jolla, California, USA
Session V	Dr. IGOR GOLOVIN	I. V. Kurchatov Institute, Moscow, USSR
Session VI	Dr. MICHEL TROCHERIS	CEN, Fontenay-aux-Roses, France
Session VII	Dr. CORNELIS BRAAMS	FOM Institute for Plasma Physics, Jutphaas, Netherlands
Session VIII	Prof. ARNULF SCHLÜTER	Institute for Plasma Physics, Munich, Federal Republic of Germany
Session IX	Prof. SHIGEO NAGAO	Nagoya University, Nagoya, Japan
Session X	Dr. JOHN B. ADAMS	Culham Laboratory, Abingdon, United Kingdom

SECRETARIAT OF THE CONFERENCE

Scientific Secretary:	Dr. DALE W. MAGNUSON	Division of Research and Laboratories, IAEA
Editor/Associate Scientific Secretary:	Dr. HERBERT POMERANCE	Division of Scientific and Technical Information, IAEA

Assistant Scientific Secretaries:	Dr. PHILIP DAVENPORT Dr. CHRISTIAN GOURDON Dr. JAMES A. PHILLIPS Dr. VITALY SHAFRANOV	Culham Laboratory, United Kingdom CEN, Fontenay-aux-Roses, France Los Alamos Scientific Laboratory, United States of America I. V. Kurchatov Institute, Union of Soviet Socialist Republics
-----------------------------------	--	--

Program Selection Committee

Committee	Prof. LUDWIG BIERMANN Dr. J. G. LINHART Dr. JAMES A. PHILLIPS Dr. KEITH ROBERTS	Max-Planck-Institute f. Physik u. Astrophysik, Federal Republic of Germany Laboratorio Gaz Ionizzati, Italy Los Alamos Scientific Laboratory, United States of America Culham Laboratory, United Kingdom
Administrative Secretary:	Mr. HAAKON STORHAUG	Division of Scientific and Technical Information, IAEA
Records Officer:	Mr. MICHAEL DAVIES	Division of Languages, IAEA
UK Liaison Officer:	Mr. PETER FLOWERDAY	Culham Laboratory, Abingdon, United Kingdom

IAEA SALES AGENTS

Orders for Agency publications can be placed with your bookseller or any of our sales agents listed below:

ARGENTINA

Comisión Nacional de
Energía Atómica
Avenida del Libertador
General San Martín 8250
Buenos Aires • Suc. 29

AUSTRALIA

Hunter Publications,
23 McKillop Street
Melbourne, C.1

AUSTRIA

Georg Fromme & Co.
Spengergasse 39
A-1050, Vienna V

BELGIUM

Office international de librairie
30, avenue Marnix
Brussels 5

BRAZIL

Livraria Kosmos Editora
Rua do Rosário, 135-137
Rio de Janeiro

Agencia Expoente Oscar M. Silva
Rua Xavier de Toledo, 140-1º Andar
(Caixa Postal No. 5.614)
São Paulo

BYELORUSSIAN SOVIET SOCIALIST REPUBLIC

See under USSR

CANADA

The Queen's Printer
Ottawa, Ontario

CHINA (Taiwan)

Books and Scientific Supplies
Service, Ltd.,
P.O. Box 83
Taipei

CZECHOSLOVAK SOCIALIST REPUBLIC

S.N.T.L.
Spolena 51
Nové Město
Prague 1

DENMARK

Ejnar Munksgaard Ltd.
6 Nørregade
Copenhagen K

FINLAND

Akateeminen Kirjakauppa
Keskuskatu 2
Helsinki

FRANCE

Office international de
documentation et librairie
48, rue Gay-Lussac
Paris 5^e

GERMANY, Federal Republic of

R. Oldenbourg
Rosenheimer Strasse 145
8 Munich 8

HUNGARY

Kultura
Hungarian Trading Co. for Books
and Newspapers
P.O.B. 149
Budapest 62

ISRAEL

Heiliger and Co.
3 Nathan Strauss Street
Jerusalem

ITALY

Agenzia Editoriale Internazionale
Organizzazioni Universali (A.E.I.O.U.)
Via Meravigli 16
Milan

JAPAN

Maruzen Company Ltd.
6, Tori Nichome
Nihonbashi
(P.O. Box 605)
Tokyo Central

MEXICO

Librería Internacional
Av. Sonora 206
Mexico 11, D.F.

NETHERLANDS

N.V. Martinus Nijhoff
Lange Voorhout 9
The Hague

NEW ZEALAND

Whitcombe & Tombs, Ltd.
G.P.O. Box 1894
Wellington, C.1

NORWAY	SWITZERLAND
Johan Grundt Tanum Karl Johans gate 43 Oslo	Librairie Payot Rue Grenus 6 1211 Geneva 11
PAKISTAN	TURKEY
Karachi Education Society Haroon Chambers South Napier Road (P.O. Box No. 4866) Karachi 2	Librairie Hachette 469, İstiklal Caddesi Beyoğlu, İstanbul
POLAND	UKRAINIAN SOVIET SOCIALIST REPUBLIC
Osrodek Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych Polska Akademia Nauk Pałac Kultury i Nauki Warsaw	See under USSR
ROMANIA	UNION OF SOVIET SOCIALIST REPUBLICS
Cartimex Rue A. Briand 14-18 Bucarest	Mezhdunarodnaya Kniga Smolenskaya-Sennaya 32-34 Moscow G-200
SOUTH AFRICA	UNITED KINGDOM OF GREAT BRITAIN AND NORTHERN IRELAND
Van Schaik's Bookstore (Pty) Ltd. Libri Building Church Street (P.O. Box 724) Pretoria	Her Majesty's Stationery Office P.O. Box 569 London, S.E.1
SPAIN	UNITED STATES OF AMERICA
Libreria Bosch Ronda de la Universidad 11 Barcelona	National Agency for International Publications, Inc. 317 East 34th Street New York, N.Y. 10016
SWEDEN	VENEZUELA
C.E. Fritzes Kungl. Hovbokhandel Fredsgatan 2 Stockholm 16	Sr. Braulio Gabriel Chacares Gobernador a Candilito 37 Santa Rosalia (Apartado Postal 8092) Camas D.F.
	YUGOSLAVIA
	Jugoslovenska Knjiga Terazije 27 Belgrade

IAEA publications can also be purchased retail at the United Nations Bookshop at United Nations Headquarters, New York, at the news-stand at the Agency's Headquarters, Vienna, and at most conferences, symposia and seminars organized by the Agency.

In order to facilitate the distribution of its publications, the Agency is prepared to accept payment in UNESCO coupons or in local currencies.

Orders and inquiries from countries where sales agents have not yet been appointed may be sent to:

Distribution and Sales Group, International Atomic Energy Agency,
Kärntner Ring 11, A-1010, Vienna 1, Austria